Решение нелинейных уравнений

Часть 3

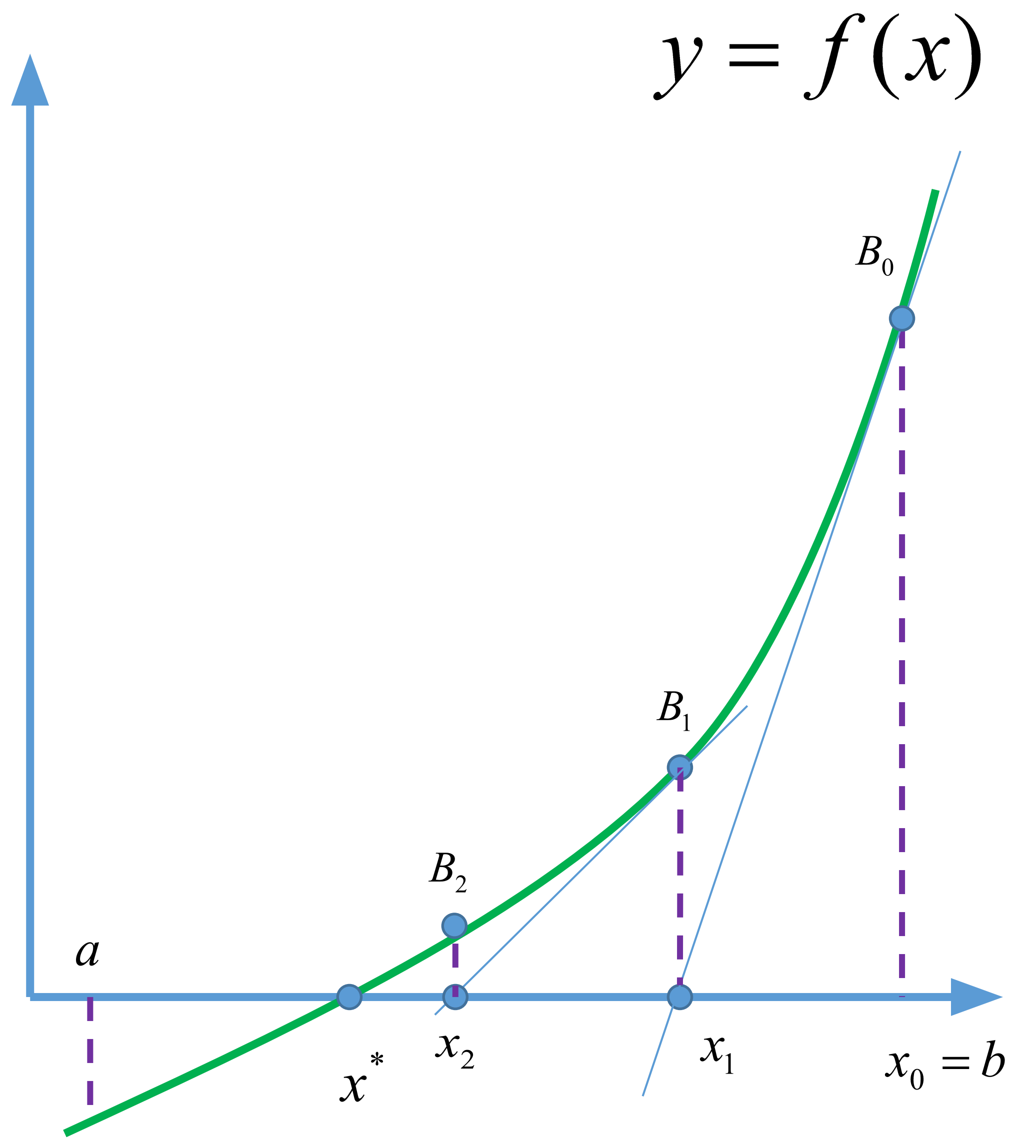
Метод Ньютона (касательных)

Известно, что простой корень находится на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Т.е. $x^* \in [a;b]$ и $f(x^*)=0$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < \boldsymbol{0}$

Предположим, что $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дважды непрерывно дифференцируема на $(a:b)$.

Пусть $x_0=b$



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Расчетная формула метода Ньютона

Сходимость метода

- Метод сходится с квадратичной скоростью
- Сходимость зависит от выбора начального приближения

- Если в качестве начального приближения взять тот конец отрезка для которого

$$f(x)f''(x) \geq 0$$

то метод сходится, причем монотонно.

Погрешность метода

$$\left|x_n - x^*\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right|$$

Критерий окончания

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$$

Метод ложного положения (метод хорд)

- Модификация метода Ньютона

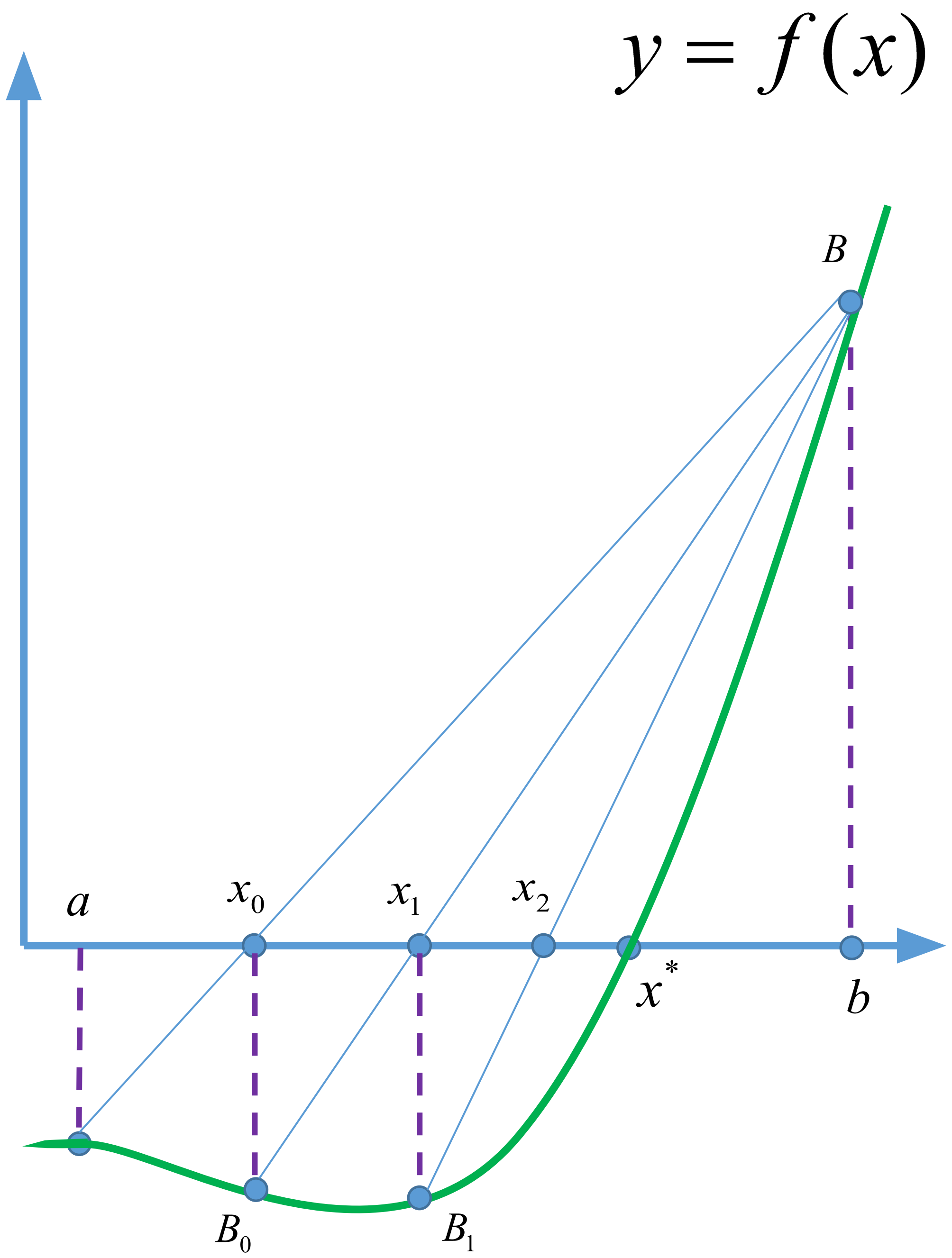
Известно, что простой корень находится на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Т.е. $x^* \in [a;b]$ и $\boldsymbol{f(x^*)=0}$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < \boldsymbol{0}$

- На одном из концов отрезка выполняется условие:

$$f(x)f''(x) \geq 0$$

- Возьмем эту точку в качестве начального приближения



$$f'(x_n) \approx \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)}$$

Расчетная формула метода ложного положения

Критерий окончания итераций

- Как в методе Ньютона
- При заданной точности вычисления производят пока

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| \le \varepsilon$$