

# Численные методы

Преподаватель:  
Редькина Белла Александровна

# Список литературы

1

- Турчак Л. И., Плотников П. В. **Основы численных методов**

2

- Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К. **Численные методы**

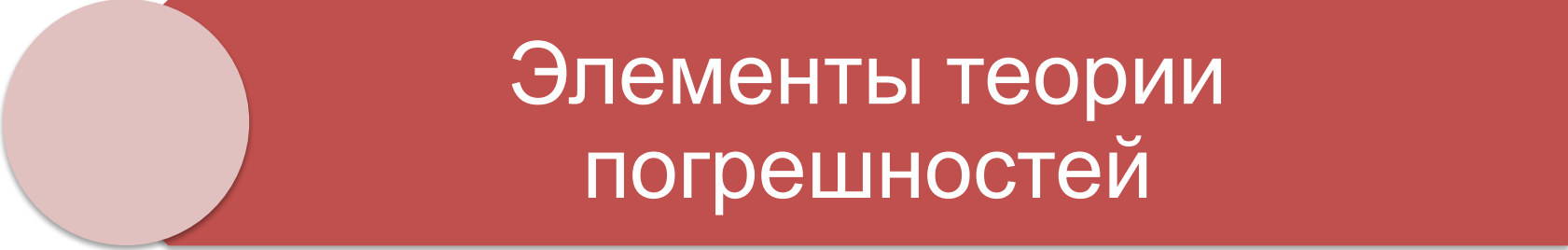
3

- Пантина И. В., Синчуков А. В. **Вычислительная математика**

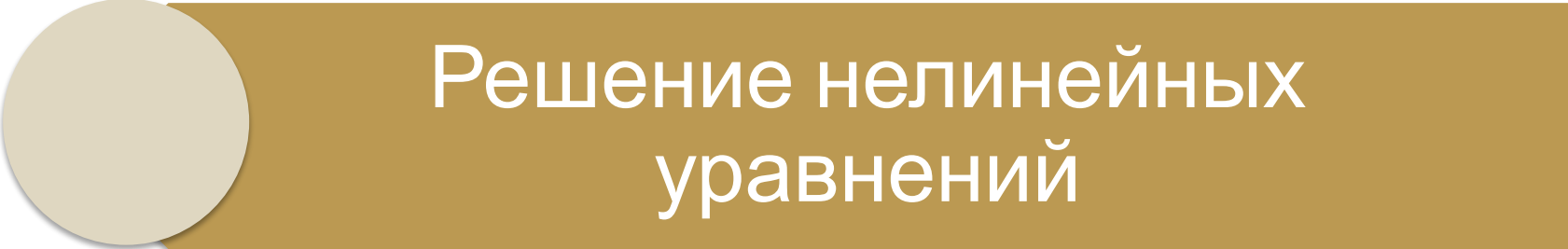
4

- Каханер Д., Моулер К., Нэш С., **Численные методы и программное обеспечение.**

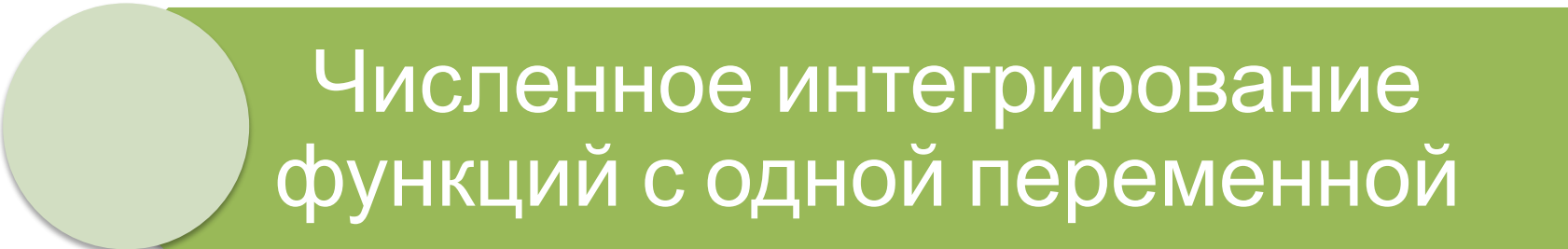
# Темы:



Элементы теории  
погрешностей



Решение нелинейных  
уравнений



Численное интегрирование  
функций с одной переменной

# Элементы теории погрешностей



Источники и классификация погрешностей

Точные и приближенные числа. Правила округления чисел

Математические характеристики точности приближенных чисел

Число верных знаков приближенного числа. Связь с абсолютной погрешностью

# Источники погрешностей

- Математическая модель
- Исходные данные
- Приближенный метод
- Округления при вычислениях

**При вычислениях погрешности  
накапливаются**

# Виды погрешностей

Погрешность метода  
решения

The diagram consists of three horizontal bars stacked vertically. The top two bars are green, and the bottom bar is blue. Each bar is connected to a white circle on the left by a thin blue line. The circles are arranged in a vertical line, with the top circle connected to the top bar, the middle circle to the middle bar, and the bottom circle to the bottom bar. The text is written in white on the colored bars.

Погрешность округления

Неустраняемые погрешности

Точные

- Как правило получают в результате натурального счета
- Обозначают заглавными буквами ***A, B, C...***

Приближенны

*e*

- Незначительно отличаются от точных
- Получают в результате измерений и вычислений
- Обозначаются строчными буквами ***a, b, c...***

Числа могут быть записаны с помощью конечного числа разрядов в какой-либо системе

счисления

$$a = \pm(a_1 b^n + a_2 b^{n-1} + \dots + a_m b^{n-m+1})$$

$a_i$  – целые положительные числа;  $a_1 > 0$

$$0 \leq a_i < b$$

$i$  – номер разряда в котором стоит цифра

$n$  – старший разряд

$n-m+1$  – младший разряд



# Пример:

Число  $a=435,7068$  записать в виде позиционного разложения

- **Решение:**

$$a=435,7068=4 \cdot 10^2+3 \cdot 10^1+5 \cdot 10^0+7 \cdot 10^{-1} \\ + \\ +0 \cdot 10^{-2}+6 \cdot 10^{-3}+8 \cdot 10^{-4}$$

- Использование приближенных чисел приводит к тому, что из множества действительных чисел некоторого отрезка используется его конечное дискретное подмножество.
- Количество разрядов в записи числа ограничено.

# Округление

- Использование числа с заданной степенью точности из конечного подмножества.

Округление применяют, когда результаты вычислений содержат избыточное количество разрядов, по сравнению с требуемой точностью.

# Правила округления:

- Если отбрасываемые при округлении цифры составляют число, которое меньше половины единицы последнего оставляемого разряда, от оставляемые цифры остаются без изменений
- Если больше половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу
- Если равно половине единицы, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу (нечетная) и остается без изменения (четная)

# Пример:

- Округлить число  $a=16,25075$  до каждого разряда

Результат округления	Комментарий
16,2507	Отбрасываемая цифра 5, сохраняемая 7 не меняется т.к. она четная
16,251	Отбрасываемая цифра 7 больше 5, добавляем 1 к последней оставляемой цифре
16,25	Отбрасываемая цифра 1 меньше 5
16,3	Отбрасываемая цифра 5, к последней цифре добавляем 1 т.к. она нечетная
16	Отбрасываемая цифра меньше 5
20	Отбрасываемая цифра больше 5

# **Математические характеристики точности приближенных чисел**

# Истинная абсолютная погрешность

- $$\Delta_u(a) = |A - a|$$

$A$  – точное значение величины

$a$  – приближенное значение той же величины

# Предельная абсолютная погрешность

Или абсолютная погрешность  $\Delta(a)$  приближенного числа  $a$ , представляющего неизвестное точное число  $A$ , называется такое возможно меньшее число, которого не превосходит истинная абсолютная погрешность

$$\Delta_u(a) = |A - a| \leq \Delta(a)$$

$$A = a \pm \Delta(a)$$



# Истинная относительная погрешность

- $$\delta_u(a) = \frac{\Delta_u(a)}{|a|} = \frac{|A - a|}{|a|}$$

Отношение истинной абсолютной погрешности числа  $a$  к модулю самого числа  $a$

# Предельная относительная погрешность

Или относительная погрешность числа  $a$ , являющегося приближенным значением неизвестного точного числа  $A$ , называется возможно меньшее число  $\delta(a)$ , которого не превосходит истинная относительная погрешность

$$\delta_u(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \leq \delta(a)$$

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

# Пример

- Выяснить, какое из приближенных равенств точнее:

$$\frac{3}{11} \approx 0,272 \text{ или } \sqrt{18} \approx 4,24$$

# Решение

- Вычисляем значения:  $\frac{3}{11} = 0,2727(27)$   
 $\sqrt{18} = 4,2426\dots$

- Абсолютные погрешности:

$$\Delta_u(a_1) = |A_1 - a_1| = |0,272727\dots - 0,272| \leq 0,00073$$

$$\Delta_u(a_2) = |A_2 - a_2| = |4,2426\dots - 4,24| \leq 0,0027$$

- Относительные погрешности:

$$\delta(a_1) = \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|} = \frac{0,00073}{0,272} = 0,00026 = 0,026\%$$


$$\delta(a_2) = \frac{\Delta(a_2)}{|a_2|} = \frac{0,027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%$$


# Число верных знаков приближенного числа

Первая слева, отличная от нуля цифра числа  $a$ , и все расположенные справа от нее цифры (в том числе нули) называются **значащими**

# Пример:

- Выделить значащие цифры чисел:

$$a_1 = 0,0273050$$


$$a_2 = 2,7305$$


$$a_3 = 0,0002730$$


# Верные цифры

- Среди значащих цифр выделяют верные.
- Значащая цифра  $a_s$  числа  $a$  – верная, если предельная погрешность этого числа не превосходит половины единицы  $s$ -го разряда

$$\Delta(a) \leq \frac{1}{2} \times 10^s$$



Если указано, что все значащие цифры числа  $a$  верные, то предельная абсолютная погрешность  $\Delta(a)$  равна половине единицы младшего разряда  $-r$

$$\Delta(a) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-r}$$

# Пример:

- Известно, что в числе **a=341,267** все цифры верные. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности.

- **Решение:**

$$\Delta(a) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{341,267} \approx 0,147 \cdot 10^{-5}$$

При округлении и записи абсолютной и относительной погрешности пользуются правилами:

- Погрешность всегда округляют в большую сторону не пользуясь правилами округления.
- Погрешность записывают с двумя значащими цифрами.

# Погрешность арифметических действий

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta(a^k) = k\delta(a)$$

- При вычислении погрешности результата математических вычислений определить какое действие выполняется последним:

+ −

- сначала вычисляют  $\Delta(x)$

× ÷

- сначала вычисляют  $\delta(x)$

# Пример

$$x = a_1^3 + \frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}$$

## Решение:

Последней операцией является сложение

$$\Delta(x) = \Delta(a_1^3) + \Delta\left(\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right)$$

# Отдельно находим обе предельные абсолютные погрешности

→  $\Delta(a_1^3) = 3\Delta(a_1)(a_1)^2$

→  $\Delta\left(\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right) = \delta\left(\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right) \cdot \left|\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right|$

$$\delta\left(\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right) = \delta((a_2 - a_3)^4) + \delta(a_1) = 4\delta(a_2 - a_3) + \delta(a_1) = 4\frac{\Delta(a_2 - a_3)}{|a_2 - a_3|} + \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|}$$

$$\Delta(x) = 3\Delta(a_1)(a_1)^2 + \left( 4 \frac{\Delta(a_2) + \Delta(a_3)}{|a_2 + a_3|} + \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|} \right) \cdot \left| \frac{(a_2 + a_3)^4}{a_1} \right|$$

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}$$