Численные методы

Преподаватель:
Редькина Белла Александровна

Список литературы

1. Турчак Л. И., Плотников П. В. **Основы численных методов**
2. Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К. **Численные методы**
3. Пантина И. В., Синчуков А. В. **Вычислительная математика**
4. Каханер Д., Моулер К., Нэш С., **Численные методы и программное обеспечение.**

Темы:

- Элементы теории погрешностей
- Решение нелинейных уравнений
- Численное интегрирование функций с одной переменной

Элементы теории погрешностей

- Источники и классификация погрешностей
- Точные и приближенные числа. Правила округления чисел
- Математические характеристики точности приближенных чисел
- Число верных знаков приближенного числа. Связь с абсолютной погрешностью

Источники погрешностей

- Математическая модель
- Исходные данные
- Приближенный метод
- Округления при вычислениях

При вычислениях погрешности накапливаются

Виды погрешностей

- Погрешность метода решения
- Погрешность округления
- Неустранимые погрешности

Точные

- Как правило получают в результате натурального счета
- Обозначают заглавными буквами ***A, B, C…***

Приближенные

- Незначительно отличаются от точных
- Получают в результате измерений и вычислений
- Обозначаются строчными буквами ***a,b,c…***

Числа могут быть записаны с помощью конечного числа разрядов в какой-либо системе счисления

$$a=\pm(a_1 b^n + a_2 b^{n-1} + \ldots + a_m b^{n-m+1})$$

a_i – целые положительные числа; $a_1>0$

$0 \le a_i < b$

i – номер разряда в котором стоит цифра

n – старший разряд

$n\text{-}m+1$ – младший разряд

Пример:

Число a=435,7068 записать в виде позиционного разложения

- **Решение**:

$a=435{,}7068=4\cdot 10^{2}+3\cdot 10^{1}+5\cdot 10^{0}+7\cdot 10^{-1}$ +

$+0\cdot 10^{-2}+6\cdot 10^{-3}+8\cdot 10^{-4}$

- Использование приближенных чисел приводит к тому, что из множества действительных чисел некоторого отрезка используется его конечное дискретное подмножество.

- Количество разрядов в записи числа ограничено.

Округление

- Использование числа с заданной степенью точности из конечного подмножества.

Округление применяют, когда результаты вычислений содержат избыточное количество разрядов, по сравнению с требуемой точностью.

Правила округления:

- Если отбрасываемые при округлении цифры составляют число, которое меньше половины единицы последнего оставляемого разряда, от оставляемые цифры остаются без изменений

- Если больше половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу

- Если равно половине единицы, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу (нечетная) и остается без изменения (четная)

Пример:

- Округлить число а=16,25075 до каждого разряда

Результат округления	Комментарий
16,2507	Отбрасываемая цифра 5, сохраняемая 7 не меняется т.к. она четная
16,251	Отбрасываемая цифра 7 больше 5, добавляем 1 к последней оставляемой цифре
16,25	Отбрасываемая цифра 1 меньше 5
16,3	Отбрасываемая цифра 5, к последней цифре добавляем 1 т.к. она нечетная
16	Отбрасываемая цифра меньше 5
20	Отбрасываемая цифра больше 5

Математические характеристики точности приближенных чисел

Истинная абсолютная погрешность

- $$\Delta_u(a) = |A - a|$$

A – точное значение величины

a – приближенное значение той же величины

Предельная абсолютная погрешность

- Или **абсолютная погрешность** *Δ(a)* приближенного числа *a*, представляющего неизвестное точное число А, называется такое возможно меньшее число, которого не $a_2 + a_3$ превосходит истинная абсолютная погрешность

$$\Delta_u(a) = |A - a| \leq \Delta(a)$$

$$A = a \pm \Delta(a)$$

Истинная относительная погрешность

- $$\delta_u(a) = \frac{\Delta_u(a)}{|a|} = \frac{|A - a|}{|a|}$$

Отношение истинной абсолютной погрешности числа ***a*** к модулю самого числа ***a***

Предельная относительная погрешность

- Или относительная погрешность числа ***a***, являющегося приближенным значением неизвестного точного числа ***A***, называется возможно меньшее число $\delta(a)$, которого не превосходит истинная относительная погрешность

$$\delta_u(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \leq \delta(a)$$

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

Пример

- Выяснить, какое из приближенных равенств точнее:

$$\frac{3}{11} \approx 0,272 \, \textit{или} \, \sqrt{18} \approx 4,24$$

Решение

- Вычисляем значения: $\frac{3}{11} = 0{,}2727(27)$

$$\sqrt{18} = 4{,}2426...$$

- Абсолютные погрешности:

$$\Delta_u(a_1) = \left|A_1 - a_1\right| = \left|0{,}272727... - 0{,}272\right| \le 0{,}00073$$

$$\Delta_u(a_2) = \left|A_2 - a_2\right| = \left|4{,}2426... - 4{,}24\right| \le 0{,}0027$$

- Относительные погрешности:

$$\delta(a_1) = \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|} = \frac{0,00073}{0,272} = 0,00026 = 0,026\%$$

$$\delta(a_2) = \frac{\Delta(a_2)}{|a_2|} = \frac{0,027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%$$

Число верных знаков приближенного числа

Первая слева, отличная от нуля цифра числа ***a***, и все расположенные справа от нее цифры (в том числе нули) называются **значащими**

Пример:

- Выделить значащие цифры чисел:

$a_1=0,0273050$

$a_2=2,7305$

$a_3=0,0002730$

Верные цифры

- Среди значащих цифр выделяют верные.
- Значащая цифра $\boldsymbol{a_s}$ числа $\boldsymbol{a}$ – верная, если предельная погрешность этого числа не превосходит половины единицы s-го разряда

$$\Delta(a) \leq \frac{1}{2} \times 10^{s}$$

- Если указано, что все значащие цифры числа ***a*** верные, то предельная абсолютная погрешность ***Δ(a)*** равна половине единицы младшего разряда ***-r***

$$\Delta(a) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-r}$$

Пример:

- Известно, что в числе **a=341,267** все цифры верные. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности.
- **Решение:**

$$\Delta(a) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{341{,}267} \approx 0{,}147 \cdot 10^{-5}$$

При округлении и записи абсолютной и относительной погрешности пользуются правилами:

- Погрешность всегда округляют в большую сторону не пользуясь правилами округления.
- Погрешность записывают с двумя значащими цифрами.

Погрешность арифметических действий

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta\left(a/b\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta(a^k) = k\delta(a)$$

- При вычислении погрешности результата математических вычислений определить какое действие выполняется последним:

+ —	• сначала вычисляют $\Delta(x)$
× ÷	• сначала вычисляют $\delta(x)$

Пример

$$x = {a_1}^3 + \frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}$$

Решение:

Последней операцией является сложение

$$\Delta(x) = \Delta({a_1}^3) + \Delta\left(\frac{(a_2 - a_3)^4}{a_1}\right)$$

Отдельно находим обе предельные абсолютные погрешности

$$\Delta\left(a_1^{\,3}\right) = 3\Delta(a_1)(a_1)^2$$

$$\Delta\left(\frac{(a_2-a_3)^4}{a_1}\right) = \delta\left(\frac{(a_2-a_3)^4}{a_1}\right)\cdot\left|\frac{(a_2-a_3)^4}{a_1}\right|$$

$$\delta\left(\frac{(a_2-a_3)^4}{a_1}\right) = \delta\left((a_2-a_3)^4\right) + \delta(a_1) = 4\delta(a_2-a_3) + \delta(a_1) = 4\frac{\Delta(a_2-a_3)}{\left|(a_2-a_3)\right|} + \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|}$$

$$\Delta(x) = 3\Delta(a_1)(a_1)^2 + \left(4\frac{\Delta(a_2)+\Delta(a_3)}{|a_2+a_3|} + \frac{\Delta(a_1)}{|a_1|}\right)\cdot\left|\frac{(a_2+a_3)^4}{a_1}\right|$$

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}$$