Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

«Математика»

Лекция 1. Элементы линейной алгебры. Матрицы и определители

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика . М.: Высшая школа. 1999. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М.: Высшая школа. 1999. – 400 с.
4. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике, М., Айрис Пресс, 2007, ч. 1, 2.
5. Коробков, С.С. Математика для гуманитарных специальностей [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Екатеринбург: УрГПУ, 2007. – 124 с.
6. Кремер Н.И. Высшая математика для экономических специальностей – М : Высшая школа. 2008. – 732 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
10. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Матрицы

§2. Определители

§3. Невырожденные матрицы

Цель и задачи занятия

Цель занятия: развитие средствами изучаемой дисциплины общекультурных и профессиональных компетенций, регламентируемых ФГОС ВПО направлению «080400 – Управление персоналом» (квалификация «бакалавр») по циклу Б2 – математический и естественно-научный цикл, в частности, компетенции ОК-16: *владение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования*, и др.

Задачи занятия: Познакомиться с профессионально важными понятиями линейной алгебры (матрицы, определители, системы линейных уравнений и методы их решения и др.); проиллюстрировать применение изученного материала на конкретных примерах.

§1. Матрицы

1.1. Основные понятия

* ***Df***: **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк одинаковой длины (или *n* столбцов одинаковой длины). Матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ – номер строки; $j = 1, 2, \ldots, n$ – номер столбца.

Df: Матрицу *A* называют **матрицей размера *m*×*n*** и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} называются **элементами** матрицы *A*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют **главную диагональ** матрицы *A*.

1.1. Матрицы: основные понятия (продолжение)

Df: Матрицы A и B **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij},$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Df: Матрицы, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n-го порядка.

Df: Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Df: Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**; единичная матрица обозначается буквой E.

1.1. Матрицы: основные понятия (продолжение)

П р и м е р 1. а) Единичная матрица 3-го порядка:

$$E = E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б) Единичная матрица n-го порядка:

$$E = E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Df: Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, расположенную по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Df: Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**; обозначается буквой O:

$$O = O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

1.1. Матрицы: основные понятия (продолжение).

Df: Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец или вектор-строка, соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Df: Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times1} \equiv 5$.

Df: Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** к данной; обозначается буквой A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1; 0)$.

С в о й с т в о транспонированных матриц: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами.
1.2.1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковой размерности.

Df: **Суммой C = A + B двух матриц** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ той же размерности такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

П р и м е р 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Найти $C = A + B$.

<u>Решение:</u> $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 6 & 5 & 16 \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется **разность матриц C = A – B.**

1.2. Действия над матрицами.
1.2.2. Умножение матрицы на число

Операция умножения матрицы на число вводится для матриц произвольной размерности.

***Df*: Произведением матрицы** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на число** $\boldsymbol{k}$ называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij} = k\cdot a_{ij}.$$

Записывают: $B = k\cdot A$. Если $k = -1$, то матрицу $-A$ называют *противоположной* к матрице A.

П р и м е р 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Найти $C = A - 2B$.

<u>Решение:</u> $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами.
Свойства операций сложения и умножения матриц

Для операций сложения (вычитания), умножения матрицы на число справедливы следующие (линейные) свойства:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где A, B, C – матрицы; α и β – действительные числа.

1.2. Действия над матрицами.
1.2.3. Элементарные преобразования матриц

Df: **Элементарными преобразованиями матриц** являются следующие:

- Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Df: Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью эквивалентных преобразований. Записывают: $A \sim B$.

1.2.3. Элементарные преобразования матриц (продолжение)

С в о й с т в о: При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой по диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют **канонической**, например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 3. Привести к каноническому виду матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Элементарные преобразования матриц (продолжение)

Решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица *A* приведена к каноническому виду.

1.2. Действия над матрицами.
1.2.4. Умножение матриц

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*. Иначе: матрицы можно умножать друг на друга, если *длина строки первой матрицы равна длине столбца второй*.

Df: Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на матрицу** $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения $C = A\cdot B$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B. Индексы i, j, k пробегают значения: $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, p$.

1.2.4. Умножение матриц (продолжение)

Свойства произведения *квадратных* матриц:

1. Если A и B – квадратные матрицы одного размера, то произведение $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$ всегда существуют (при этом в общем случае $A{\cdot}B \neq B{\cdot}A$).
2. $A{\cdot}E = E{\cdot}A = A$, где A – квадратная матрица и E – единичная матрица того же размера.

Пример 4. Найти произведения $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$ данных матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>: Длина строки (число столбцов) матрицы A равна 3; длина столбца (число строк) матрицы B равна 2. Поэтому произведение $A{\cdot}B$ матриц не существует. Однако произведение $B{\cdot}A$ определено и равно: $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0 \\ 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Умножение матриц (продолжение)

Df: Матрицы A и B называются **перестановочными,** если $A \cdot B = B \cdot A$.

П р и м е р 5. Доказать, что а) матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ перестановочны; б) матрицы $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и B не перестановочны.

Решение: Вычислим необходимые произведения.

а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$;

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 26 & 18 \end{pmatrix}$. Вывод: $A \cdot B = B \cdot A$.

б) $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 22 \\ 17 & 12 \end{pmatrix}$;

$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 17 & 30 \end{pmatrix}$. Вывод: $A^T \cdot B \neq B \cdot A^T$.

1.2. Действия над матрицами. Свойства операций умножения и транспонирования матриц

Для операций умножения и транспонирования матриц справедливы следующие свойства (при условии, что все написанные суммы и произведения имеют смысл).

Свойства умножения матриц:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$.

Свойства транспонирования матриц:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

§2. Определители
2.1. Основные понятия

Df: Квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее **определителем** или **детерминантом**, следующим образом:

1) $n = 1$: $A = (a_{11})$; $\Delta_1 = a_{11}$.

2) $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3) $n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

и т.д.

§2. Определители
2.1. Основные понятия (продолжение)

Общее определение детерминанта для матрицы порядка *N* является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие свести вычисление определителей высоких порядков к вычислению определителей низших порядков.

Один из таких методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда, что позволяет на единицу понизить порядок вычисляемых определителей.

Имеются также правила преобразования определителей, не изменяющие их величину, но позволяющие их упростить, добиваясь, например, того, чтобы в данном ряду все элементы, кроме одного, стали нулевыми.

§2. Определители
2.1. Основные понятия (продолжение)

П р и м е р 6. Вычислить определители указанных матриц: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение: Вычислим детерминанты по определению.

а) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot6 - (-3)\cdot5 = 12 + 15 = 27.$

б) $\det B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) = 1.$

в) $\det C = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 5\cdot(-3 + 0) + 2\cdot(-9 + 24) + 1\cdot(0 - 6) = -15 + 30 - 6 = 9.$

§2. Определители
2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям произвольных порядков. Некоторые свойства проиллюстрируем на примере определителей 3-го порядка.

С в о й с т в о 1. Строки и столбцы определителя равноправны. Точнее: Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот. Иными словами, определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы:

а) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$;

б) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

Свойство 1 позволяет не различать строки и столбцы определителя; в дальнейшем будем называть их *рядами* определителя.

С в о й с т в о 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Например, $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$, тогда как $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (1-8) - 3 \cdot (-6-5) = -42 + 33 = -9.$

С в о й с т в о 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

С в о й с т в о 4. Общий множитель элементов какого – либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

С л е д с т в и е из свойств 3, 4. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \cdot [2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2)] = 12 \cdot (-2+2) = 0.$

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

С в о й с т в о 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

С в о й с т в о 6. Элементарные преобразования определителя. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, умноженные на любое число.

У т в е р ж д е н и е: Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \text{ Тогда и } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{32} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Доказательство: Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta + k \cdot 0 = \Delta,$$ ч.т.д.

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Df: **Минором** некоторого элемента a_{ij} определителя матрицы A порядка n называется определитель $(n - 1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, т.е. вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}. Минор обозначается как m_{ij}.

Df: **Алгебраическим дополнением** некоторого элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $(i + j)$ – четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетна. Алгебраическое дополнение обозначается как $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

С в о й с т в о 7. Разложение определителя по элементам некоторого ряда. Определитель Δ равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, разложение определителя 3-го порядка по элементам первой строки дает:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

С в о й с т в о 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

В частности, для определителя 3-го порядка имеем:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0.$$

Например, в случае определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, имеем

$$A_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6; \; A_{22} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

Теперь $5 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-21) + 1 \cdot (-12) = -30 + 42 - 12 = 0.$

§2. Определители
2.2. Свойства определителей (продолжение)

П р и м е р 7. Вычислить определитель, используя свойства определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 11 & -7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 9.$$

§3. Невырожденные матрицы
3.1. Основные понятия

Пусть A – квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Df: Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае, т.е. в случае $\Delta = 0$, матрица A называется **вырожденной.**

Df: Матрицей A^*, союзной к матрице A называется матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов a_{ij} матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е: Отметим важное равенство $A^* = (A_{ij})^T$.

§3. Невырожденные матрицы
3.1. Основные понятия (продолжение)

Df: Матрица A^{-1} называется **обратной** (к) матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет ту же размерность, что и матрица A.

П р и м е р 8. Показать, что матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ является обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Вычислим произведения $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ ч.т.д.}$$

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица

Т е о р е м а об обратной матрице. Всякая невырожденная матрица A имеет обратную.

Доказательство: Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, причем $\det A \neq 0$. Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица (продолжение)

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & \ldots & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & \ldots & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & \ldots & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E.$$

Аналогично получаем $A^*\cdot A = \det A\cdot E$. Т.о., имеем

$$A\cdot\frac{A*}{\det A} = \frac{A*}{\det A}\cdot A = E,$$

т.е. матрица A^{-1} существует и равна $A^{-1} = A^*/\det A$, ч.т.д.

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица (продолжение)

П р а в и л о вычисления обратной матрицы:

1) Вычислить определитель матрицы det$A$, убедившись в том, что det$A \neq 0$.
2) Вычислить алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} данной матрицы A; составить матрицу алг. дополнений;
3) Составить союзную матрицу A^* к матрице A, транспонировав матрицу алгебраических дополнений;
4) Вычислить обратную матрицу $A^{-1} = A^*/\det A$.
5) Выполнить проверку, удостоверившись, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

С в о й с т в а обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица (продолжение)

П р и м е р 9. При каких λ матрица $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет обратную? Вычислить A^{-1} при $\lambda = 2$, если существует.

Решение: 1) Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ \lambda & 3 \end{vmatrix} = -9 + 4\lambda.$$

При $\lambda = 9/4$ определитель $\Delta = 0$; при прочих λ $\Delta \neq 0$ и матрица A имеет обратную.

При $\lambda = 2$ $\Delta = -1$. Вычислим обратную матрицу к матрице $A(\lambda = 2) = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица (продолжение)

2) Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} данной матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 4 & -3 & -5\\ -6 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

3) Составим союзную матрицу A^* к матрице A:

$$A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -6\\ -2 & -3 & 4\\ -4 & -5 & 7\end{pmatrix}.$$

§3. Невырожденные матрицы
3.2. Обратная матрица (продолжение)

4) Вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = A^*/\Delta = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

5) Выполним проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3-4+8 & -4-6+10 & 6+8-14 \\ -6+6+0 & -8+9+0 & 12-12+0 \\ -6+2+4 & -8+3+5 & 12-4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убеждаемся, что $A^{-1} \cdot A = E$. Задача решена.

§3. Невырожденные матрицы

3.3. Ранг матрицы

Df: Пусть $A = A_{m\times n}$ – прямоугольная матрица размером $m\times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \le \min(m;\ n)$). Из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются **минорами матрицы *A***.

Так, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ минорами 2-го порядка будут миноры $\mu_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; $\mu_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; $\mu_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

§3. Невырожденные матрицы
3.3. Ранг матрицы (продолжение)

Df: Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**. Ранг матрицы обозначается r, или $r(A)$, или rang$A$. Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min(m; n)$).

Df: Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**; таких миноров у матрицы может быть несколько.

С в о й с т в а ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ее ранг не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.
4. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

§3. Невырожденные матрицы
3.3. Ранг матрицы (продолжение)

П р и м е р 9. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: Воспользуемся 4-ым свойством ранга матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$.

Добавим, что базисным будет, например, минор $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …