Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

Математика

Лекция 3. Введение в анализ. Числовые множества. Функции.

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
5. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Введение в анализ (основные понятия)

§2. Числовые множества

§3. Функции

§1. Введение в анализ (основные понятия)

В математике для сокращения записей используются некоторые простейшие *логические символы*:

$\alpha \Rightarrow \beta$ – «из предложения (утверждения) α следует (вытекает) предложение (утверждение) β»;

$\alpha \Leftarrow \beta$ – «из предложения β следует (вытекает) предложение (утверждение) α»;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ – «предложения α и β равносильны, т.е. из предложения α следует β, а из предложения β следует α»;

$\forall$ – означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ – «существует», «найдется»;

: – «имеет место», «найдется»;

$\rightarrow$ – «соответствие».

Н а п р и м е р, 1) запись $(\forall x \in A: \alpha)$ означает: «для всякого элемента x из A имеет место предложение α»;

2) Запись $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ определяет объединение множеств A и B.

§2. Числовые множества

Df: Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми** множествами.

Примерами числовых множеств являются:

$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{N_0} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ – множество натуральных чисел с нулем, т.е. целых неотрицательных чисел. Ясно, что $\boldsymbol{N_0} = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$;

$\boldsymbol{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q} = \{\frac{m}{n}: m \in \boldsymbol{Z}; n \in \boldsymbol{N}\}$ – множество рациональных чисел;

$\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел.

Между этими множествами существуют отношения:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N_0} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}.$$

Множество $\boldsymbol{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается конечной или бесконечной периодической дробью.

Df: Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными** числами.

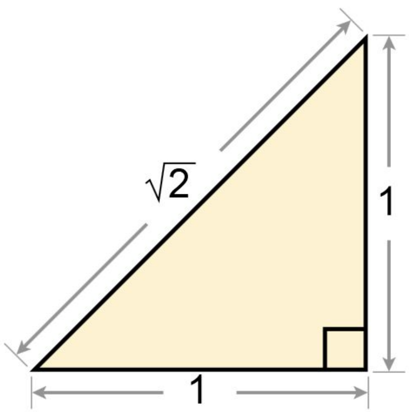
Множество действительных чисел не исчерпывается только множеством рациональных чисел.

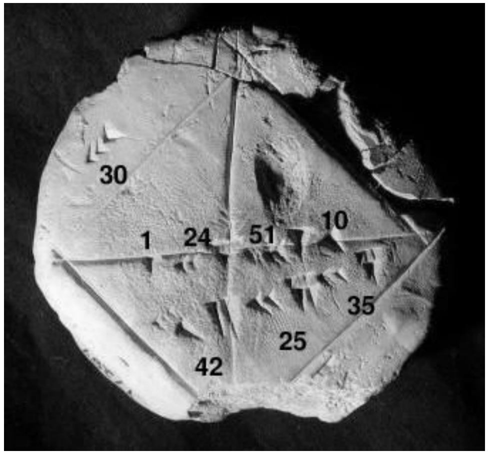
§2. Числовые множества (продолжение)

Т е о р е м а: Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

П р е д ы с т о р и я в о п р о с а: Геометрически корень из 2 (обозначается $\sqrt{2}$) можно представить как длину диагонали квадрата со стороной 1 (это следует из теоремы Пифагора). Вероятно, это было первое известное в истории математики иррациональное число (то есть число, которое нельзя точно представить в виде дроби).

Хорошим и часто используемым приближением к $\sqrt{2}$ является дробь $\frac{99}{70}$. Несмотря на то, что числитель и знаменатель дроби лишь двузначные целые, оно отличается от реального значения меньше, чем на 1/10000.





§2. Числовые множества (продолжение)

Доказательство: Доказательство теоремы построим от противного.

Допустим, что существует рациональное число, представленное *несократимой* дробью $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2 (ясно, что $m, n \in \mathbf{N}$). Тогда имеем:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \qquad \text{т.е. } m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что m^2, а значит и m – четное число, т.е. возможно представление $m = 2k$. Подставляя $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$, получим: $2k^2 = n^2$. Рассуждая, как и выше, заключаем, что и число n – четное, т.е. $n = 2l$.

Т.о., $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$, т.е. вопреки предположению, дробь $\frac{m}{n}$ оказывается сократимой. Полученное противоречие и доказывает теорему, ч.т.д.

§2. Числовые множества (продолжение)

В отличие от рациональных чисел, иррациональные числа выражается бесконечной непериодической дробью. Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$; $\pi = 3{,}1415926\ldots$, и др. Можно сказать, что множество ***R*** действительных чисел есть множество всех бесконечных десятичных дробей. И записать:

$$\mathbf{R} = \{x\colon x = a{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ \alpha_n \ldots\}, \text{ где } a \in \mathbf{Z},\ \alpha_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}.$$

С в о й с т в а множества ***R*** действительных чисел:

1. Множество ***R*** *упорядоченное*, т.е. $\forall a, b \in \mathbf{R}\colon a \neq b \Rightarrow a > b$ или $a < b$.

2. Множество ***R*** *плотное*, т.е. $\forall a, b \in \mathbf{R}\colon a \neq b\ \exists c\colon\ a < c < b$. Например, $c = ½\,(a + b)$.

3. Множество ***R*** *непрерывное*, т.е. всякому действительному числу x взаимно-однозначным образом можно поставить в соответствие точку на числовой оси.

§2. Числовые множества (продолжение)

Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$.

***Df*:** Числовыми промежутками на числовой оси называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x: a \le x \le b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x: a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x: a \le x < b\}$ – полуотрезок (полусегмент);

$(a; b] = \{x: a < x \le b\}$ – полуотрезок (полусегмент);

$(-\infty; b] = \{x: x \le b\}$; $(-\infty; b) = \{x: x \le b\}$ – лучи;

$[a; +\infty) = \{x: x \ge a\}$; $(a; +\infty) = \{x: x > a\}$ – лучи;

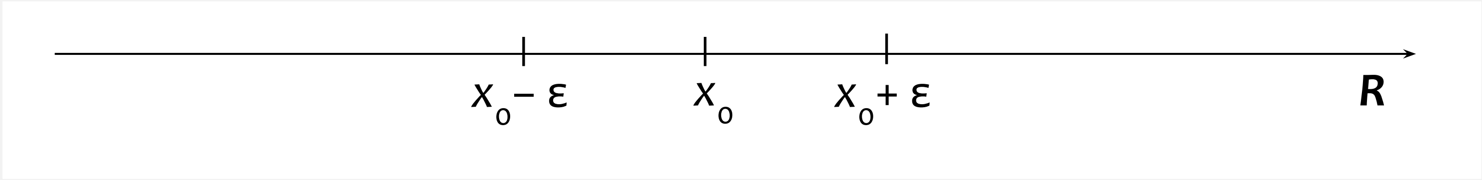
$(-\infty; +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\}$ – вся числовая ось $\boldsymbol{R}$.

§2. Числовые множества (продолжение)

Df: Числа *a* и *b* называются, соответственно, *левым* и *правым концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ обозначают не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от точки 0 начала отсчета влево и вправо.

Df: Пусть x_0 – произвольное действительное число (точка на числовой оси). **Окрестностью** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется **ε–окрестностью** точки x_0. Точка x_0 называется центром, а число ε – радиусом ε-окрестности (см. рис.).

В ε–окрестности т. x_0 имеем $|x - x_0| < \varepsilon$.



§3. Функции
3.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи, соответствия) между элементами двух непустых множеств.

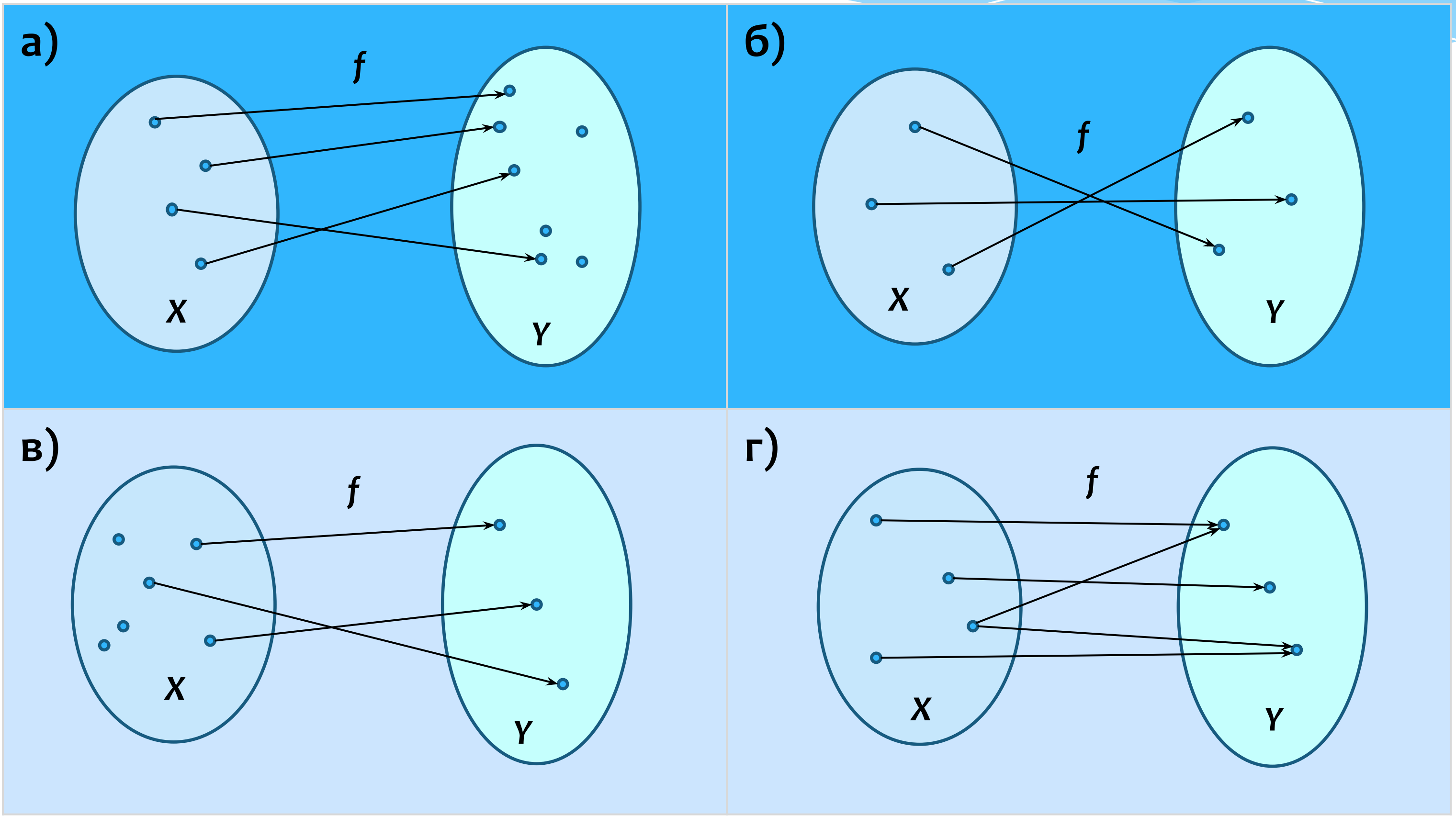
***Df*:** Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет определенный (единственный) элемент $y \in Y$, называется (однозначной) **функцией** и записывается как $f: X \to Y$. Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y.

Прим. Обозначая функцию, на практике чаще пишут: $y = f(x)$ или просто $y = y(x)$, $x \in X$.

***Df*:** Множество X называется **областью определения функции** f и обозначается $D(f)$. Множество всех допустимых значений $y \in Y$ называется **множеством значений функции** f и обозначается $E(f)$.

3.1. Понятие функции (продолжение)

П р и м е р 1. На приведенных рис. отображение f является (однозначной) функцией в случаях а) и б) и не является таковой в случаях в) и г).



3.2. Числовые функции

Пусть задана функция f: $X \to Y$.

***Df*:** Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т.е. $X \subset \boldsymbol{R}$, $Y \subset \boldsymbol{R}$), то функцию f называют числовой функцией.

В дальнейшем будем изучать, главным образом, числовые функции, именуя их просто: функции $y = f(x)$.

***Df*:** Переменная x при этом называется **аргументом** или **независимой переменной**, а $y = y(x)$ – **функцией** или **зависимой переменной** (от x). При этом говорят, что сами величины x и y **находятся в функциональной зависимости**.

Частное значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ записывают как $f(a)$ или $y(x = a) = y(a)$.

Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

3.2. Числовые функции (продолжение)

***Df*:** **Графиком** функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением (независимого) аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило (процедуру), позволяющее для каждого $x \in D(f)$ указать соответствующее значение $y \in E(f)$.

***Df*:** Функция $y = f(x)$ может быть задана одним или суперпозицией следующих наиболее употребимых способов:

- **аналитически**;
- **таблично**;
- **графически**;
- **программно**, и др.

3.2. Числовые функции (продолжение)

* **Df: Аналитический способ**: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений вида $y = f(x)$, $F(x; y) = 0$ и др.

Например,

1) $S = \pi R^2$ – функция $S(R)$ определяет зависимость площади круга от его радиуса R;
2) $F = ma$ – функция $F(a)$ определяет зависимость между силой и ускорением (II закон Ньютона);
3) $y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ – определяет функцию - модуль числа x.
4) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – задает неявно функцию $y(x)$ в виде уравнения окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса R.

3.2. Числовые функции (продолжение)

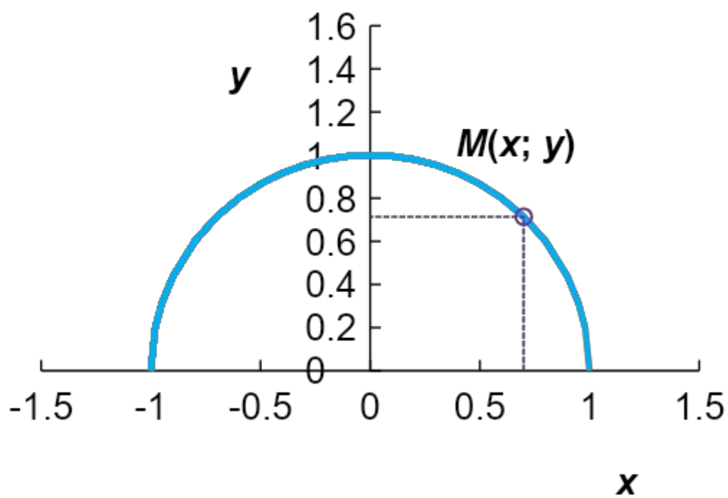
З а м е ч а н и е: Если область определения функции $D(f)$ функции $y = f(x)$ не указана явно, то предполагается, что она совпадает со множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Например, областью определения функции $y = f(x) = x^2$ является вся числовая ось: $D(f) = \mathbf{R}$; областью определения функции $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1 ; 1]$: $D(f) = [-1; 1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему могут быть приложены методы математического анализа, позволяющий полностью исследовать функцию $y = f(x)$, в частности, методами дифференциального исчисления.

3.2. Числовые функции (продолжение)

П р и м е р 2. Провести предварительное общее исследование функции и построить ее график: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение: Графиком функции $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $O(0; 0)$ (см. рис.); $D(f) = [-1; 1]$; $E(f) = [0; 1]$.



3.2. Числовые функции (продолжение)

***Df*: Графический способ**: функция задается в виде графика, часто не имеющего единого аналитического выражения. Примерами графического способа задания функции являются биржевые котировки, например, курсы валют на рынке Forex (см. рис.).

3.2. Числовые функции (продолжение)

Нередко графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции *y*, соответствующие тем или иным значениям аргумента *x*, непосредственно находятся из этого графика; это называют оцифровкой графика. Преимуществом графического задания функции является его наглядность, недостатком – его неточность.

***Df*: Табличный способ**: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, ранее широко использовались таблицы значений тригонометрических функции, таблицы логарифмов и др.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функции, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

3.3. Основные характеристики функций

Df: Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D = D(f)$, называется **чётной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия:

$$-x \in D \text{ и } f(-x) = f(x).$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D = D(f)$, называется **нечётной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия:

$$-x \in D \text{ и } f(-x) = -f(x).$$

Если функция не является четной или нечетной, то говорят, что ее четность не определена, или что рассматриваемая функция является **функцией общего вида**.

С в о й с т в о: График четной функции симметричен относительно оси Oy; нечетной функции – симметричен относительно начала координат $O(0; 0)$.

Так, $y = x^2$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = |x|$, $y = \cos x$ – четные функции; $y = x^3$, $y = x\sqrt{1-x^2}$, $y = \sin x$ – нечетные функции.

3.3. Основные характеристики функций (продолжение)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть область $D_1 \subset D$.

Df: Если для любых значений аргументов $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in D_1$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется (строго) **возрастающей** на множестве D_1; если $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **неубывающей** (нестрого возрастающей) на множестве D_1.

Df: Если для любых значений аргументов $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in D_1$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется (строго) **убывающей** на множестве D_1; если $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **невозрастающей** (нестрого убывающей) на множестве D_1.

3.3. Основные характеристики функций (продолжение)

Df: Возрастающей, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие (убывающие) – **строго монотонными.** Интервалы, в которых функция монотонна, называются **интервалами монотонности** функции.

Df: Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют **ограниченной** на этом множестве, существует такое (конечное) число $M > 0$, что $\forall x \in D$ выполнено неравенство $|f(x)| \le M$. Иными словами, функция $y = f(x)$ ограничена, если ограничено множество ее значений: $E(f) \subset [-M; M]$.

Так, функция $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ строго монотонна на интервале $(-1; 0)$, где она возрастает, и на интервале $(0; 1)$, где она убывает; функция ограничена, ибо $E = [0; 1] \subset [-1; 1]$.

3.3. Основные характеристики функций (продолжение)

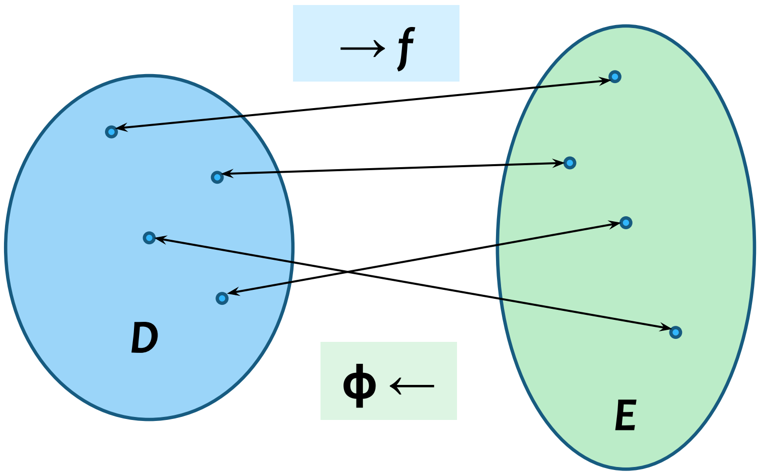
Df: Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называются **периодической** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что $\forall x \in D$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$ (подразумевается, что и $x + T \in D$). При этом число T называется **периодом** функции $y = f(x)$. Если T – период функции, то ее периодами будут также и числа вида nT, где $n \in \mathbf{Z}$. Наименьшее число T, для которого выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$ называется **основным периодом** (или просто периодом).

Так, для тригонометрической функции $y = f(x) = \sin x$ периодом являются числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, ибо $f(x + 2\pi n) = \sin(x + 2\pi n) = \sin x \cdot \cos 2\pi n + \cos x \cdot \sin 2\pi n = \sin x = f(x)$. Основной (наименьший положительный) период: $T = 2\pi$.

З а д а ч а. Установить периодичность следующих функций: а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = |\sin x|$.

3.4. Обратная функция

Df: Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения $D = D(f)$ и множеством значений $E = E(f)$. Если каждому значению $y \in E$ соответствует *единственное* значение $x \in D$, то определена функция $x = \phi(y)$ с областью определения D. Такая функция называется **обратной** к функции $y = f(x)$. Функции $f(x)$ и $\phi(y)$ являются взаимно обратными по отношению друг к другу. Функции $f(x)$ и $\phi(y)$ задают взаимно однозначное соответствие между множествами D и E.



3.4. Обратная функция (продолжение)

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно), после чего можно сделать привычное переобозначение: $x \leftrightarrow y$.

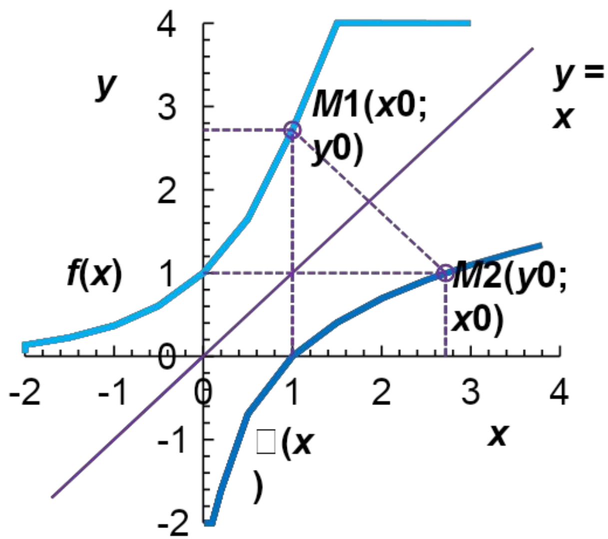
Например, для функции $y = 2x$ обратной является функция $x = ½\,y$ или, после переобозначения $x \leftrightarrow y$, $y = ½\,x$. Еще. Для функции $y = x^2$, $D = [0; 1]$ обратной является функция $x = \sqrt{y}$ или, после переобозначения $x \leftrightarrow y$, $y = \sqrt{x}$.

При построении обратной функции область $D(f)$ определения исходной («прямой») функции $y = f(x)$ для обратной функции $x = \varphi(y)$ становится множеством значений $E(\varphi)$ и, наоборот, множество $E(f)$ значений исходной («прямой») функции $y = f(x)$ для обратной функции $x = \varphi(y)$ становится областью определения $D(\varphi)$.

3.4. Обратная функция (продолжение)

Сказанное означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой прямой функции $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой обратной функции $y = \phi(x)$. Но точки M1 и M2 симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис.).

У т в е р ж д е н и е: графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \phi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



3.5. Сложная функция

Df: Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве $D = D(f)$, а функция $u = \phi(x)$ определена на множестве D_1, причем $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \phi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\phi(x))$, которая называется **сложной функцией** от x (или **функцией** f **от функции** ϕ или **суперпозицией функций** f и ϕ).

Переменную $u = \phi(x)$ называют промежуточным аргументом сложной функции.

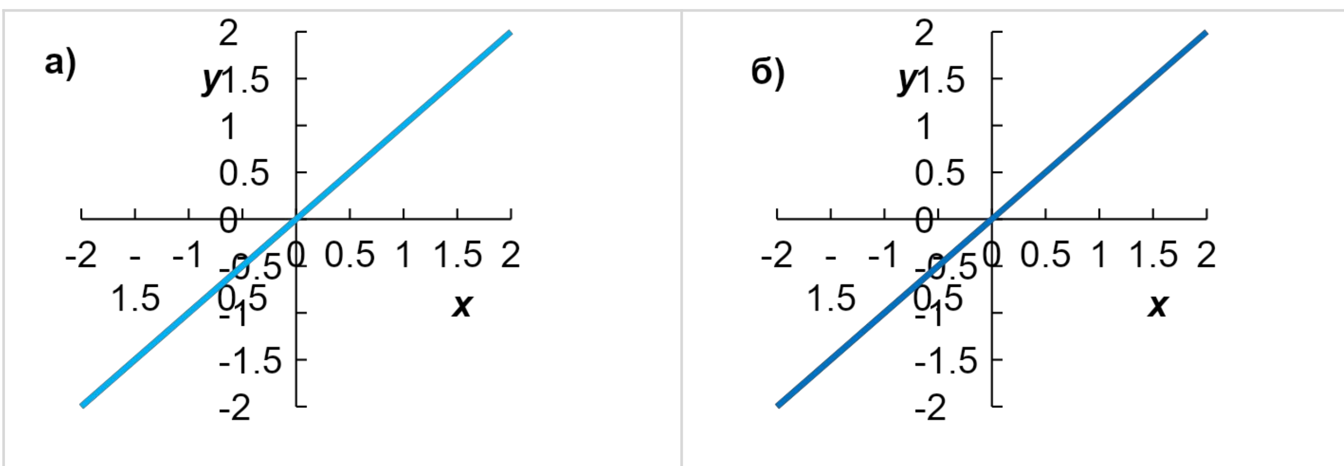
Так, функция $y = \sin 2x$ является суперпозицией двух простых (элементарных функций): $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

3.6. Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями называют нижеследующие функции $y = f(x)$.

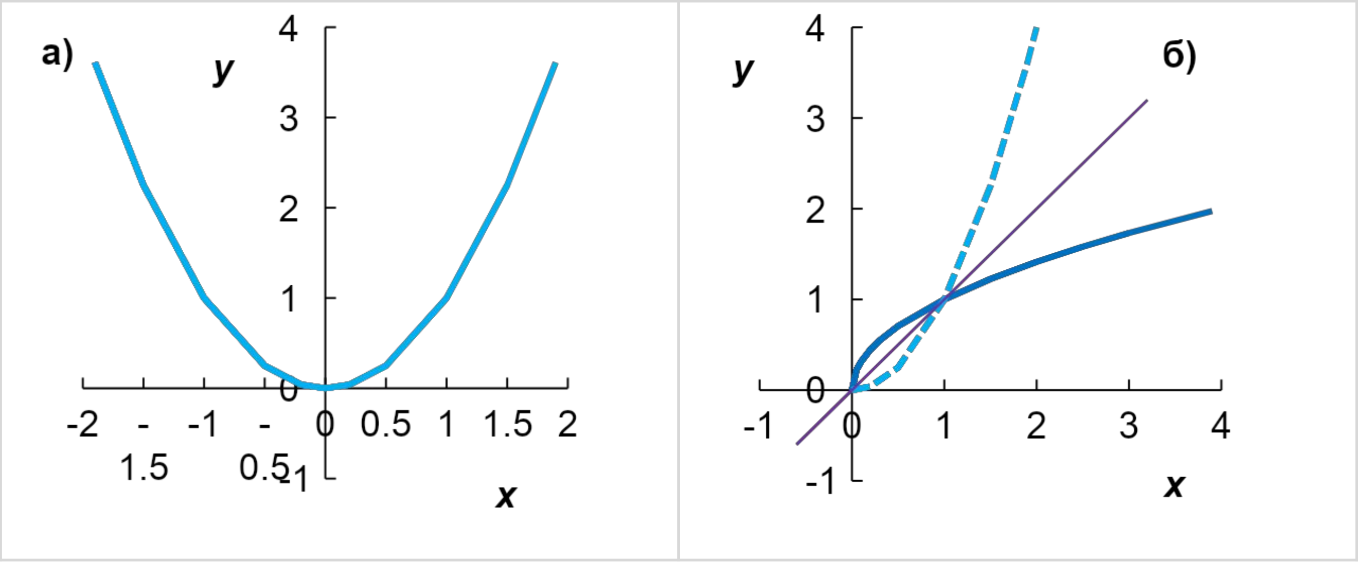
1. **Степенная функция** $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Среди степенных функций выделяется класс функций с целочисленным показателем степени: $y = x^{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.1. *Линейная функция*: $y = x$ (см. рис., а)). Область определения $D = \boldsymbol{R}$; множество значений: $E = \boldsymbol{R}$; функция нечетна и монотонно возрастает в D. Обратная функция: $y = x$ (б) совпадает с данной.



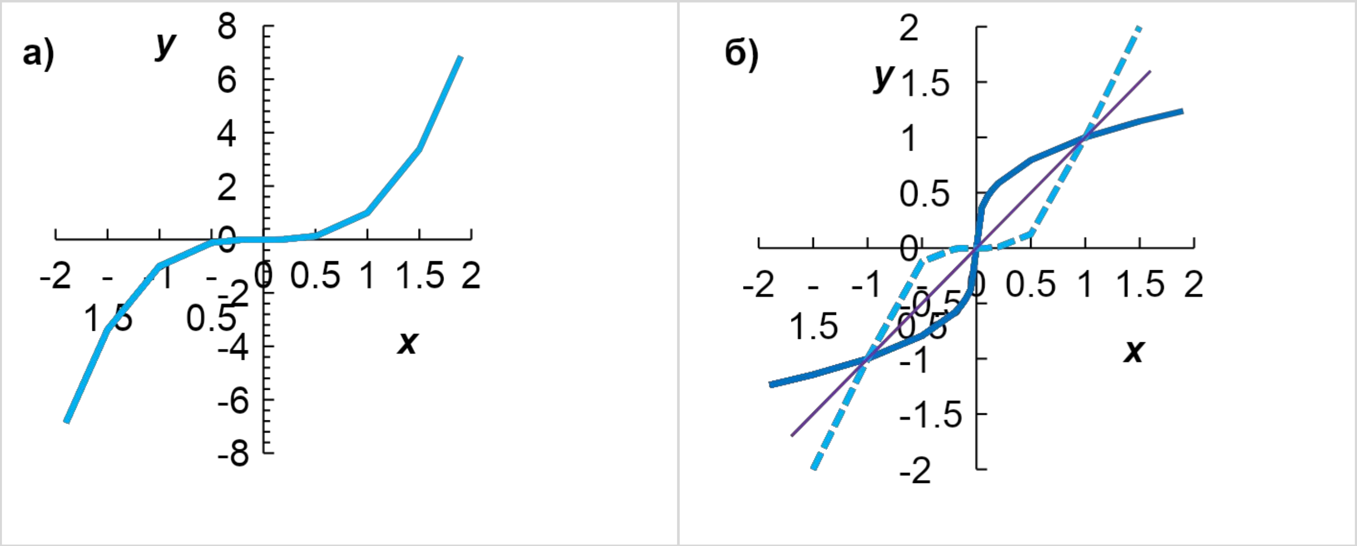
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.2. *Квадратичная функция*: $y = f(x) = x^2$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = [0; \infty)$; функция четна и монотонно возрастает в области $D(\varphi) = \mathbf{R}_+ = [0; \infty)$. Обратная функция $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ (рис., б)) определена в области $D(\varphi) = \mathbf{R}_+ = [0; \infty)$; множество значений обратной функции $E(\varphi) = \mathbf{R}_+ = [0; \infty)$.



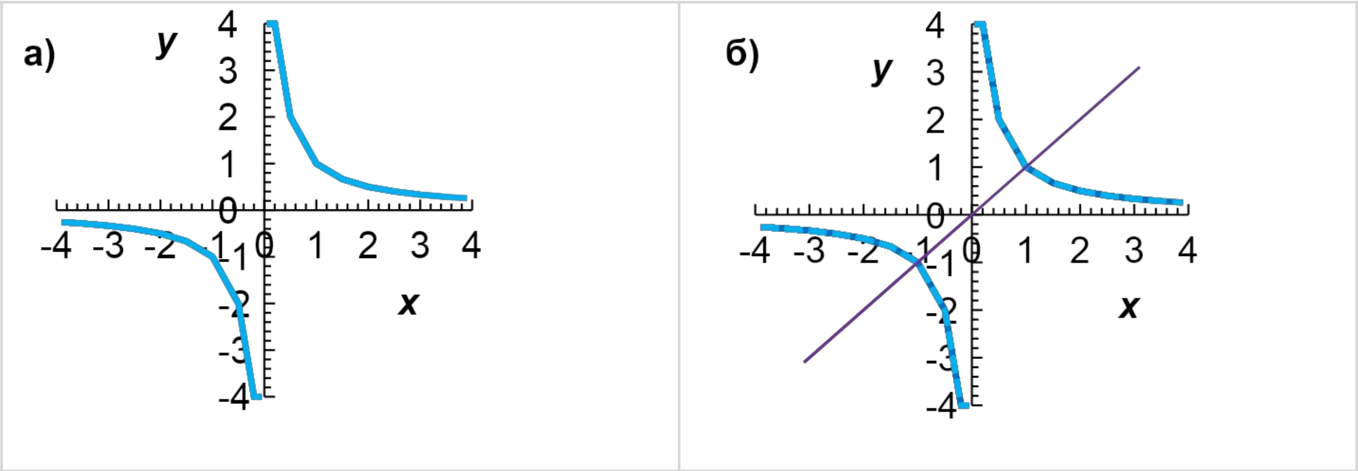
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.3. *Кубическая функция*: $y = f(x) = x^3$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = \mathbf{R}$; функция нечетна и монотонно возрастает в D. Обратная функция $y = \varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ (рис., б)) определена в области монотонности функции $y = x^3$, т.е. в области $D(\varphi) = \mathbf{R}$; множество значений обратной функции $E(\varphi) = \mathbf{R}$.



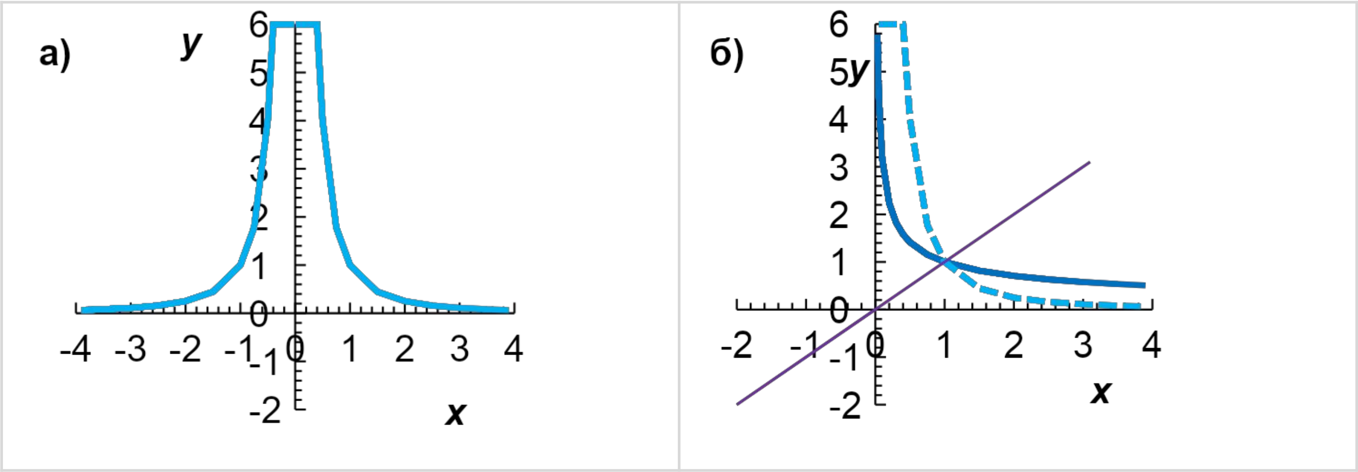
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.4. Функция: $y = f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; множество значений: $E = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; функция нечетна и монотонна в D. Обратная функция $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ (рис., б)) совпадает с данной функцией, ее область определения $D(\varphi) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; множество значений $E(\varphi) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.



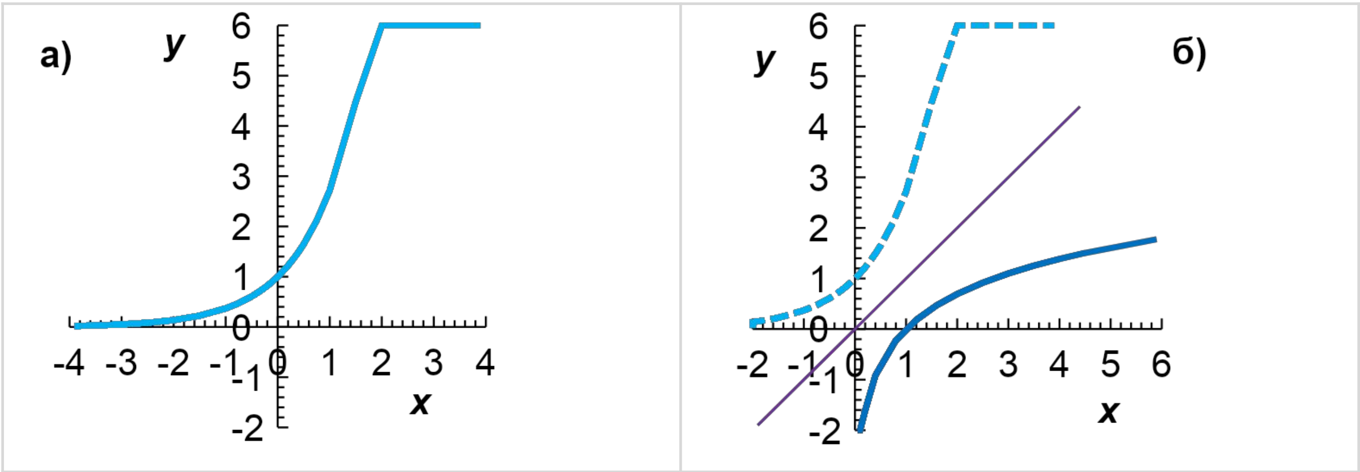
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.5. *Функция*: $y = f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; множество значений: $E = \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$; функция четна и монотонно убывает в области $\mathbf{R}_+\backslash\{0\}$. Обратная функция $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (рис., б)), ее область определения $D(\varphi) = \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$; множество значений $E(\varphi) = \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$.



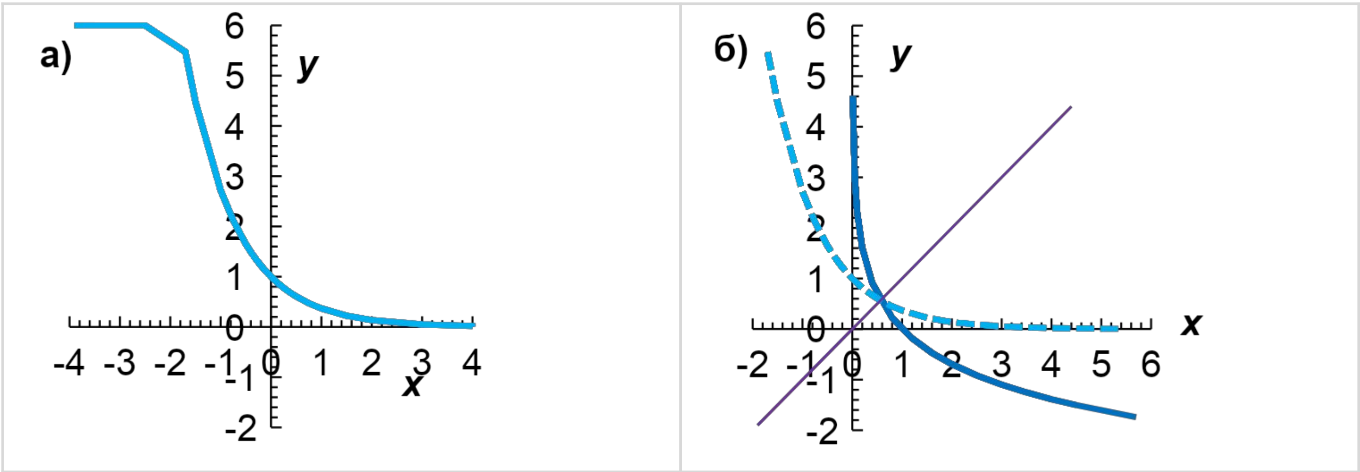
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.6. Функция: $y = f(x) = a^x$, $a > 1$ (см. рис., а) для основания $a = e$). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$; функция общего вида и монотонно возрастает в области $D = \mathbf{R}$. Обратная функция $y = \varphi(x) = \log_a x$ (рис., б)), ее область определения $D(\varphi) = \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$; множество значений $E(\varphi) = \mathbf{R}$.



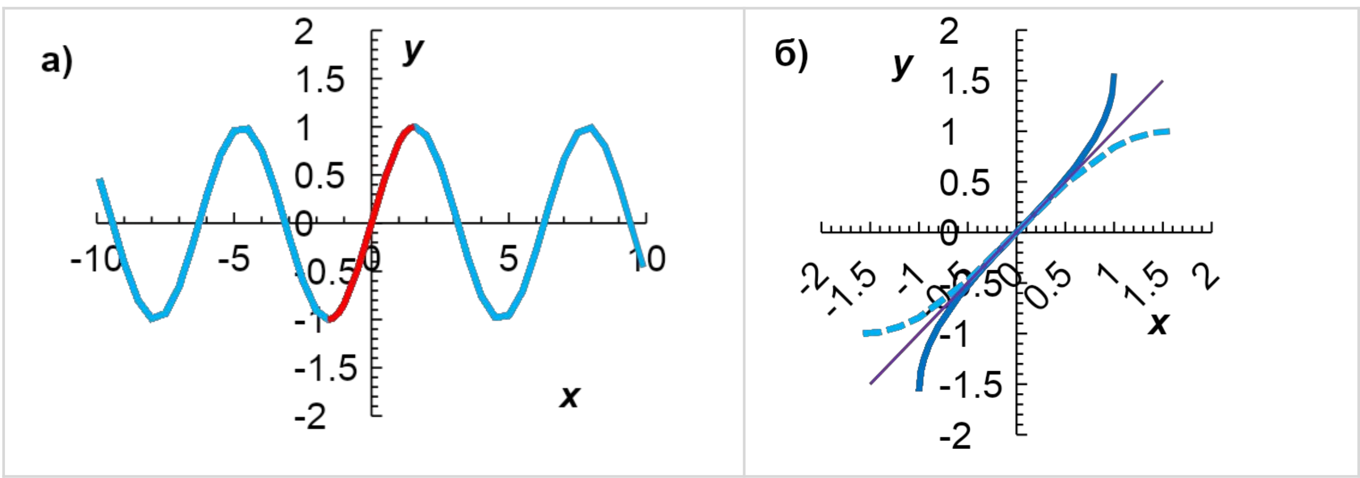
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.7. *Функция*: $y = f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ (см. рис., а) для основания $a = 1/e$). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = \mathbf{R}_+ \backslash \{0\}$; функция общего вида и монотонно убывает в области $D = \mathbf{R}$. Обратная функция $y = \varphi(x) = \log_a x$ (рис., б)), ее область определения $D(\varphi) = \mathbf{R}_+ \backslash \{0\}$; множество значений $E(\varphi) = \mathbf{R}$.



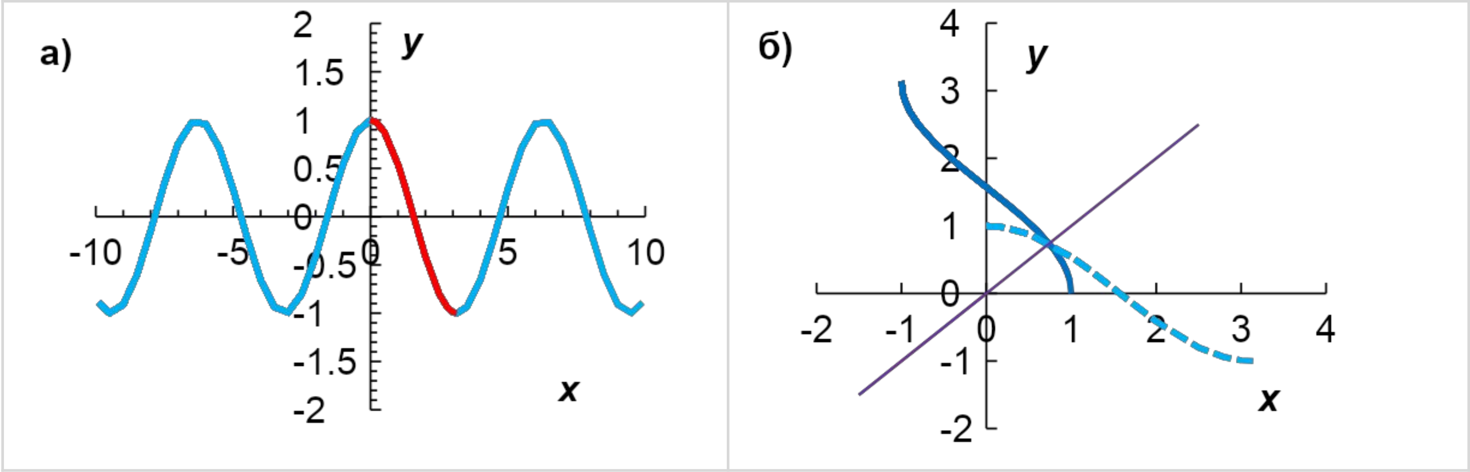
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.8. *Функция*: $y = f(x) = \sin x$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = [-1; 1]$; функция является нечетной и периодической (период $T = 2\pi$) и монотонно возрастает на промежутке $D_1 = [-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi]$. Обратная функция $y = \phi(x) = \arcsin x$ (рис., б)), ее область определения $D(\phi) = E = [-1; 1]$; множество значений $E(\phi) = D_1 = [-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi]$.



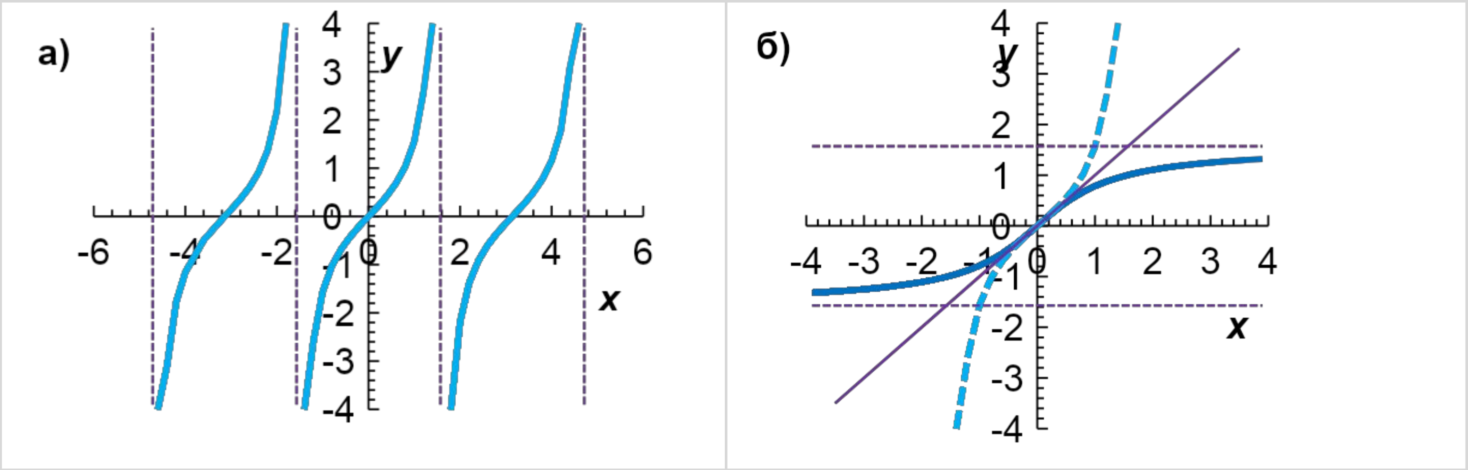
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.9. *Функция*: $y = f(x) = \cos x$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}$; множество значений: $E = [-1; 1]$; функция является четной и периодической (период $T = 2\pi$) и монотонно убывает на промежутке $D_1 = [0; \pi]$. Обратная функция $y = \phi(x) = \arccos x$ (рис., б)), ее область определения $D(\phi) = E = [-1; 1]$; множество значений $E(\phi) = D_1 = [0; \pi]$.



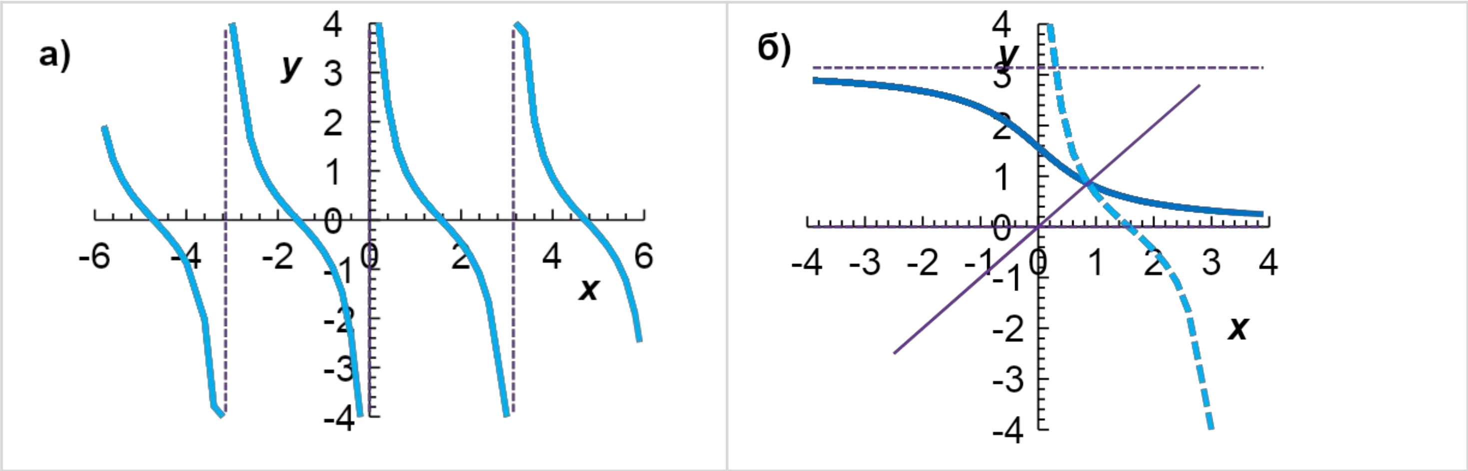
3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.10. *Функция*: $y = f(x) = \text{tg}\, x$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R}\backslash\{\pi(n + ½), n \in \mathbf{N}\}$; множество значений: $E = \mathbf{R}$; функция является нечетной и периодической (период $T = \pi$) и монотонно возрастает на промежутке $D_1 = [-½\pi; ½\pi]$. Обратная функция $y = \phi(x) = \text{arctg}\, x$ (рис., б)), ее область определения $D(\phi) = E = \mathbf{R}$; множество значений $E(\phi) = D_1 = [-½\pi; ½\pi]$.



3.6. Основные элементарные функции (продолжение)

1.11. *Функция*: $y = f(x) = \text{ctg}\, x$ (см. рис., а)). Область определения $D = \mathbf{R} \backslash \{\pi n, n \in \mathbf{N}\}$; множество значений: $E = \mathbf{R}$; функция является нечетной и периодической (период $T = \pi$) и монотонно убывает на промежутке $D_1 = [0; \pi]$. Обратная функция $y = \phi(x) = \text{arcctg}\, x$ (рис., б)), область определения $D(\phi) = E = \mathbf{R}$; множество значений $E(\phi) = D_1 = [0; \pi]$.



3.5. Сложная функция

Df: Вообще, функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется **элементарной функцией.**

Так, примерами *элементарных* функций могут служить функции: $y = 3^{\cos x}$; $y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}$; $y = \lg(1 + x^3)$.

Примерами *неэлементарных* функций могут служить функции:

$$y = \begin{cases} -1, x < 0, \\ 0, x = 0, \\ 1, x > 0; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 1, \ x < 0, \\ x^2 - 1, \ x \geq 0; \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)} + \ldots .$$

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …