Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

# Математика

## Лекция 4. Предел функции. Бесконечно малые функции. 1-ый и 2-ой замечательные пределы.

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

# Рекомендуемая литература


1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
5. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

# Содержание лекции

**§1. Предел функции**

1.1. Предел функции в точке

1.2. Односторонние пределы

1.3. Предел функции при $x \to \infty$

1.4. Бесконечно большая функция

**§2. Бесконечно малые функции**

2.1. Определение и основные теоремы

2.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

2.3. Основные теоремы о пределах

2.4. Признаки существования пределов

**§3. 1-ый и 2-ой замечательные пределы**

# §1. Предел функции
## 1.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, кроме, может быть, самой точки $x_0$.

**Df:** (на «языке последовательностей» или по Гейне): Число $A$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$, если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n$, сходящейся к $x_0$, последовательность соответствующих значений функции $f_n = f(x_n)$, сходится к числу $A$:

$$\lim_{x \to x0} f(x) = A. \qquad (1)$$

**Df:** (на «языке ε–δ» или по Коши): Число $A$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Краткая запись этого определения с использованием кванторов имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x0} f(x) = A.$$

# 1.2. Односторонние пределы

**Df:** Число $A_1$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$ **слева,** если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Краткая запись с помощью кванторов:

$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x0-0} f(x) = A_1$.

**Df:** Число $A_2$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$ **справа,** если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Краткая запись:

$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x0+0} f(x) = A_2$.

# 1.2. Односторонние пределы (продолжение)

**Df:** Пределы функции слева и справа называются **односторонними** пределами.

Т е о р е м а 1: Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области $D \subset \mathbf{R}$. Для существования (полного) предела $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A$ в точке $x_0 \in D$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонних предела: $\lim\limits_{x \to x0-0} f(x) = A_1 = A_2 = \lim\limits_{x \to x0+0} f(x)$.

Доказательство: СРС.

З а м е ч а н и е: Если $A_1 \neq A_2$ или хотя бы один из двусторонних пределов в точке $x_0$ не существует, то не существует и полный предел $\lim\limits_{x \to x0} f(x)$.

# 1.2. Односторонние пределы (продолжение)

* П р и м е р 1: Функция $f(x) = sgn(x)$ («знак x»), рис. 1, определяется на всей числовой оси **R** следующим образом:

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

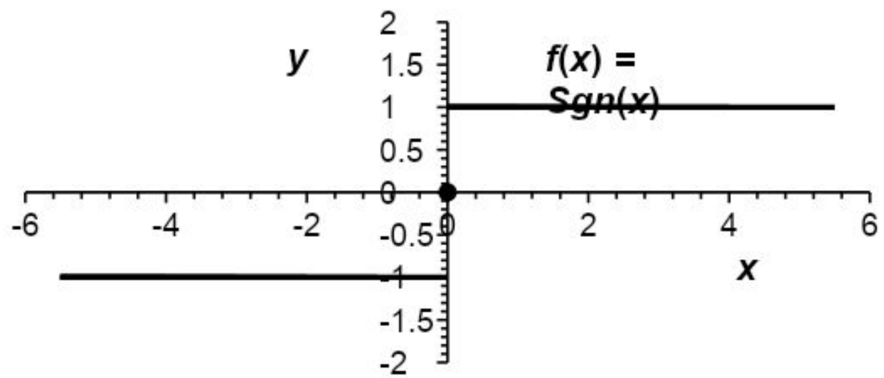



Рис. 1

Очевидно, в данном случае $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = A_1 \neq A_2 = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, поэтому $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует. К сказанному можно добавить, что значение функции в точке $x = 0$ не совпадает ни с $A_1$, ни с $A_2$.

# 1.3. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в бесконечном промежутке $x \in (-\infty; +\infty)$.

***Df*:** Число $A$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ **при x** $\to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Аналогично определяются пределы функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

# 1.4. Бесконечно большая функция

**Df:** Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(M) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство: $|f(x)| > M$. Записывают это так:

$$\lim_{x \to x0} f(x) = \infty.$$

**Df:** Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое положительное число $N = N(M) > 0$, что при всех $|x| > N$ выполняется неравенство: $|f(x)| > M$. Записывают это так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Аналогично определяются бесконечные пределы функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

## §2. Бесконечно малые функции
### 2.1. Определение и основные теоремы

**Df:** Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой функций (б.м.ф.)** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = 0$.

Иными словами, функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство: $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции (б.м.ф.) при $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или, просто, бесконечно малыми; б.м.ф. обычно обозначают малыми греческими буквами: $\alpha(x)$, $\beta(x)$, … Например, б.м.ф. являются функции $\alpha(x) = x^2$ при $x \to 0$, $\beta(x) = x - 2$ при $x \to 2$, последовательность $\gamma_n = x_n = \frac{1}{n}$ (при $n \to \infty$) и т.д.

# 2.1. … основные теоремы о б.м.ф. (продолжение)

Т е о р е м а 2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Доказательство: Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две б.м.ф. при $x \to x_0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $x$ таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$, одновременно выполнены оба неравенства: $|\alpha(x)| < ½\,\varepsilon$, $|\beta(x)| < ½\,\varepsilon$. Тогда, с учетом известного свойства модуля числа: $|a + b| \le |a| + |b|$, имеем оценку:

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < ½\,\varepsilon + ½\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Это, по определению, и означает, что $\lim\limits_{x\to x0}(\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, т.е. что сумма б.м.ф. $\alpha(x) + \beta(x)$ является б.м.ф., ч.т.д.

П р и м е ч а н и е. Доказанную теорему можно легко обобщить на любое конечное число слагаемых б.м.ф.

# 2.1. … основные теоремы о б.м.ф. (продолжение)

Т е о р е м а 3. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

Доказательство: Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$, как только $|x - x_0| < \delta_1$, где $\delta_1 = \delta_1(M) > 0$. Пусть $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что при всех $x$ таких, что $|x - x_0| < \delta_2$, выполнено неравенство: $|\alpha(x)| < \frac{1}{M}\varepsilon$. Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Тогда, с учетом свойств модуля, для всех $x$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < M\cdot\frac{1}{M}\varepsilon = \varepsilon.$$

Это, по определению, и означает, что $\lim\limits_{x\to x0}(f(x)\cdot\alpha(x)) = 0$, т.е. что произведение $f(x)\cdot\alpha(x)$ является б.м.ф., ч.т.д.

С л е д с т в и е 1. Всякая б.м.ф. является ограниченной. Поэтому произведение двух (и более) б.м.ф. является б.м.ф.

С л е д с т в и е 2. Произведение б.м.ф. на число является б.м.ф.

# 2.1. … основные теоремы о б.м.ф. (продолжение)

Т е о р е м а 4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

Доказательство: Пусть $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x0} \alpha(x) = 0$. Пусть функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to x_0$. Тогда частное $\alpha(x)/f(x)$ – можно представить в виде произведения б.м.ф $\alpha(x)$ на функцию $\frac{1}{f(x)}$.

Докажем, что функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Пусть $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = a$. Выберем $0 < \varepsilon < |a|$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Тогда, с учетом известного свойства модуля числа $|a| - |f(x)| \le |f(x) - a| < \varepsilon$, имеем оценку, $|f(x)| > |a| - \varepsilon > 0$. Отсюда вытекает неравенство $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|a|-\varepsilon} = M > 0$, свидетельствующее об ограниченности функции $1/f(x)$.

По теореме 3 заключаем, что $\lim\limits_{x\to x0}(\alpha(x)/f(x)) = 0$, т.е. что частное $\alpha(x)/f(x)$, где $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = a \neq 0$, есть б.м.ф., ч.т.д.

# 2.1. … основные теоремы о б.м.ф. (продолжение)

* Т е о р е м а 5. Если функция $\alpha(x)$ – б.м.ф., то функция $1/\alpha(x)$ – б.б.ф., и наоборот, если функция $f(x)$ – б.б.ф., то функция $1/f(x)$ – б.м.ф., .

Доказательство: СРС.

П р и м е р 2. Показать, что функция

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3\frac{1}{x-1}$$

при $x \to 1$ является бесконечно малой.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, то функция $\alpha(x) = (x-1)^2$ является б.м.ф. при $x \to 1$. Функция $\sin^3\frac{1}{x-1}$, в любом случае является ограниченной: $\left|\sin\frac{1}{x-1}\right| \leq 1$. На основании теоремы 3 заключаем, что функция $f(x)$ при $x \to 1$ является б.м.ф.

## 2.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Т е о р е м а 6. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный $A$, то ее можно представить как сумму числа $A$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Доказательство: Т.к. $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A$, то, по определению, $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim\limits_{x \to x0} (f(x) - A) = 0$, т.е. функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является б.м.ф. при $x \to x_0$. Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$, ч.т.д.

Справедлива и обратная теорема:

Т е о р е м а 7. Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа $A$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A$.

Доказательство: СРС.

# 2.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы о пределах, которые облегчают нахождение пределов функций. Формулировка и доказательство теорем для случаев $x \to x_0$ и $x \to \infty$, аналогичны. Будем считать, что все упомянутые ниже пределы существуют.

# 2.3. Основные теоремы о пределах (продолжение)

* Т е о р е м а 8. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x0}(f(x)\pm\ \varphi(x)) = \lim_{x\to x0} f(x) \pm \lim_{x\to x0}\varphi(x).$$

Доказательство: Рассмотрим для определенности случай «+». Пусть $\lim_{x\to x0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to x0}\varphi(x) = B$. По теореме 6 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить в виде сумм их пределов $A$ и $B$ и соответствующих бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$:

$$f(x) + \varphi(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x),$$

где $\alpha(x) + \beta(x)$ – б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме 7:

$$\lim_{x\to x0}(f(x) +\ \varphi(x)) = A + B = \lim_{x\to x0} f(x) + \lim_{x\to x0}\varphi(x), \qquad \text{ч.т.д.}$$

З а м е ч а н и я: 1) В случае «–» теорема доказывается аналогично. 2) Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

# 2.3. Основные теоремы о пределах (продолжение)

* Т е о р е м а 9. Функция может иметь только один предел.

Доказательство: Пусть у рассматриваемой функции $f(x)$ есть два предела: $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = B$. На основании теоремы 7:

$$\lim_{x\to x0}(f(x) - f(x)) = A - B = 0, \text{ т.е. } A = B,$$ ч.т.д.

Т е о р е м а 10. Предел произведения двух функций равен произведению пределов: $\lim\limits_{x\to x0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x0}\varphi(x)$.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x0}\varphi(x) = B$. Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. Отсюда

$$f(x)\cdot\varphi(x) = (A + \alpha(x))\cdot(B + \beta(x)) = A\cdot B + A\cdot\beta(x) + B\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x),$$

так что произведение $f(x)\cdot\varphi(x) = A\cdot B$ + б.м.ф., т.е.

$$\lim_{x\to x0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = A\cdot B = \lim_{x\to x0} f(x)\cdot \lim_{x\to x0}\varphi(x),$$ ч.т.д.

# 2.3. Основные теоремы о пределах (продолжение)

Из теоремы 10 вытекают два следствия, широко используемые на практике.

С л е д с т в и е 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x0} f(x).$$

С л е д с т в и е 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \to x0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x0} f(x)\right)^n.$$

# 2.3. Основные теоремы о пределах (продолжение)

Т е о р е м а 11. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, при условии, предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to x0}(f(x)/\varphi(x)) = \lim_{x\to x0} f(x)/\lim_{x\to x0}\varphi(x), \quad \lim_{x\to x0}\varphi(x) \neq 0.$$

Доказательство: Доказательство аналогично предыдущим случаям. Пусть $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x0} \varphi(x) = B$. Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. Отсюда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B\cdot(B+\beta(x))},$$

так что отношение $f(x)/\varphi(x) = A/B$ + б.м.ф., т.е.

$$\lim_{x\to x0}(f(x)/\varphi(x)) = A/B = \lim_{x\to x0} f(x)/\lim_{x\to x0}\varphi(x),$$ ч.т.д.

# 2.3. Основные теоремы о пределах (продолжение)

П р и м е р 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение: Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+14x-32)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+8)=0$, так что применить теорему о пределе отношения функций нельзя. В этом случае говорят о раскрытии неопределенности вида {0/0}. Заметим, что

$$x^2+14x-32=(x-2)\cdot(x+16)$$

и

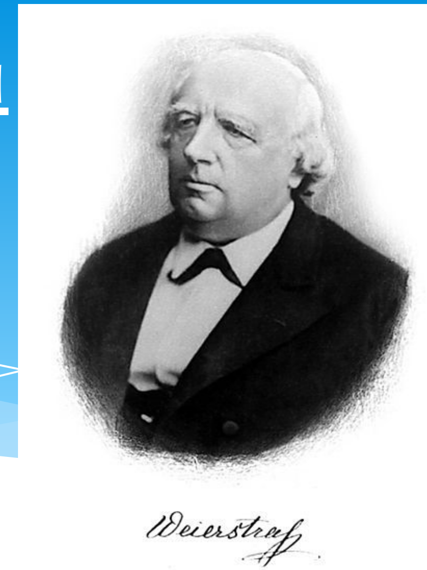
$$x^2-6x+8=(x-2)\cdot(x-4),$$

поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+16)}{(x-2)\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{18}{-2}=-9.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=-9$.

# К. Вейерштрасс. Краткая биография




Карл Тéодор Вильгéльм Вéйерштрасс (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß; 31 октября 1815 — 19 февраля 1897) — выдающийся немецкий математик, «отец современного анализа».

**Биография**

Родился в Остенфельде, предместье Эннигерло, в семье чиновника.
1834: закончил с отличием гимназию в Падерборне и, по настоянию отца, поступил на юридический факультет Боннского университета.
Проучившись 4 года, в течение которых вместо юриспруденции Вейерштрасс усиленно занимался математикой, он бросил университет и поступил в университет Мюнстера.
1840: подготовил экзаменационную работу по теории эллиптических функций, в которой уже содержатся зачатки его будущих открытий.

# К. Вейерштрасс. Краткая биография

1841: в новой работе Вейерштрасс установил: если последовательность аналитических функций, равномерно сходится внутри некоторой области (то есть в каждом замкнутом круге, принадлежащем области), то предел последовательности — тоже функция аналитическая. Здесь ключевым условием является равномерность сходимости; это понятие и строгая теория сходимости стали одним из важнейших вкладов Вейерштрасса в обоснование анализа.
1842: по окончании Академии получает место учителя в провинциальной католической прогимназии, где проработал 14 лет. Навыки учителя в дальнейшем помогли Вейерштрассу стать лучшим преподавателем Германии, а редкое свободное время (чаще всего ночное) он использовал для математических исследований. Кроме математики, он вёл там занятия по физике, ботанике, географии, истории, немецкому языку, чистописанию и гимнастике.
1854: публикует статью по абелевым функциям, за которую Кёнигсбергский университет сразу присуждает ему степень доктора honoris causa (почётного доктора без защиты диссертации). Дирихле присылает восторженный отзыв, благодаря которому Вейерштрасс получает звание старшего учителя и давно просимый годичный отпуск. Отдых он использовал для подготовки ещё одной блестящей статьи (1856). Александр фон Гумбольдт и Куммер помогли Вейерштрассу устроиться профессором сначала Промышленного Института в Берлине, а через пару месяцев — экстраординарным профессором Берлинского университета. Одновременно он избран членом Берлинской Академии наук. Берлинскому университету он отдал 40 лет жизни.

# К. Вейерштрасс. Краткая биография

С конца 1850-х годов международная известность Вейерштрасса быстро растёт. Этим он обязан великолепному качеству своих лекций. Вот список тематики его курсов:

- Введение в теорию аналитических функций, включающее теорию действительных чисел.
- Теория эллиптических функций, приложения эллиптических функций к задачам геометрии и механики.
- Теория абелевых интегралов и функций.
- Вариационное исчисление.

Здоровье Вейерштрасса оставляет желать лучшего — сказывается постоянное переутомление в молодые годы. В 1861 году во время выступления у него начался сильный приступ головокружения. и пришлось прервать лекцию. Больше Вейерштрасс никогда не читал лекции стоя — он неизменно сидел, а один из лучших студентов писал за него на доске.

1861: избран членом Баварской академии наук.

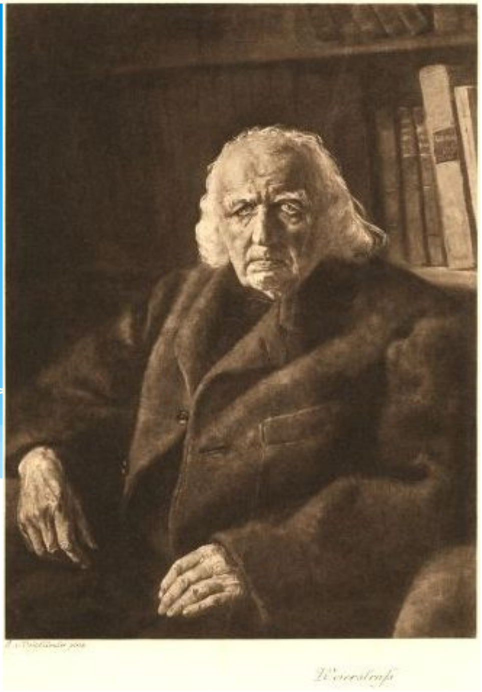
1864: назначен ординарным профессором.

1868: избран членом-корреспондентом Парижской академии наук.

1870: знакомится с двадцатилетней Софьей Ковалевской, приехавшей в Берлин для подготовки диссертации. Нежное чувство к своей Sonja Вейерштрасс пронёс сквозь всю жизнь (он так и не женился). Вейерштрасс помогает Ковалевской выбрать тему диссертации и метод подхода к решению, в дальнейшем регулярно консультирует её по сложным вопросам анализа, содействует в получении научного признания.

После защиты диссертации Ковалевская уехала, на письма учителя отвечала редко и неохотно, за исключением ситуаций, когда ей срочно требовалась консультация.

# К. Вейерштрасс. Краткая биография



1873: избран ректором Берлинского университета.
1881: избран членом Лондонского королевского общества.
1883: после самоубийства мужа Ковалевская, оставшаяся без средств с пятилетней дочерью, приезжает в Берлин и останавливается у Вейерштрасса. Ценой огромных усилий, используя весь свой авторитет и связи, Вейерштрассу удаётся выхлопотать ей место профессора в Стокгольмском университете.
1885: 70-летие прославленного математика торжественно отмечается в общеевропейском масштабе.
1889: Вейерштрасс сильно заболел.
1891: неожиданно умирает Софья Ковалевская. Потрясённый Вейерштрасс посылает цветы на её могилу и сжигает все письма от Ковалевской (письма от него сохранились и были в начале XX века опубликованы [1]). Состояние Вейерштрасса заметно ухудшается, он редко встаёт, занимается редактированием своего сборника трудов.
1897: после продолжительной болезни Вейерштрасс скончался от осложнений после гриппа.
В его честь был назван кратер Weierstrass на Луне. Имя Вейерштрасса носит математический институт WIAS в Берлине.

# К. Вейерштрасс. Краткая биография

**Научная деятельность**

Исследования Вейерштрасса существенно обогатили математический анализ, теорию специальных функций, вариационное исчисление, дифференциальную геометрию и линейную алгебру. В математике Вейерштрасс стремился к ясности и строгости. Пуанкаре писал о нём: «Вейерштрасс отказывается пользоваться интуицией или по крайней мере оставляет ей только ту часть, которую не может у нее отнять».

До Вейерштрасса оснований анализа фактически не существовало. Даже Коши, который впервые ввёл стандарты строгости, многое молчаливо подразумевал. Не было теории вещественных чисел — превосходная статья Больцано (1817) осталась незамеченной. Важнейшее понятие непрерывности использовалось без какого-либо определения. Отсутствовала полная теория сходимости. Как следствие, немало теорем содержали ошибки, нечёткие или чрезмерно широкие формулировки.

Вейерштрасс завершил построение фундамента математического анализа, прояснил тёмные места, построил ряд доказательных контрпримеров (аномальных функций), например, всюду непрерывную, но нигде не дифференцируемую функцию.

Он сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории действительных (вещественных) чисел и так называемого ε-δ-языка.

Одновременно он дал строгое доказательство основных свойств непрерывных функций. Приведенное определение, а также его определения предела, сходимости ряда и равномерной сходимости функций воспроизводятся без всяких изменений в современных учебниках. О публикациях своих выдающихся лекций сам Вейерштрасс не заботился. Однако ещё при жизни начало выходить собрание его трудов; всего вышло 7 томов (последний — в 1927 г.).

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …