Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

Математика

Лекция 5. Непрерывность функции. Непрерывные функции и их свойства.

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
5. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Непрерывность функции

1.1. Непрерывность функции в точке и на множестве

1.2. Точки разрыва функции и их классификация

§2. Непрерывные функции и их свойства

2.1. Основные теоремы о непрерывных функциях

2.2. Непрерывность элементарных функций

2.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

§1. Непрерывность функции

1.1. Непрерывность функции в точке и на множестве

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

***Df*:** Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0**, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.:

$$\lim_{x \to x0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

1) Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;
2) Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполнено равенство (1).

§1. Непрерывность функции (продолжение)

Так как $\lim\limits_{x\to x0} x = x_0$, то равенство (1) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x0} f(x) = f(\lim_{x\to x0} x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Это означает справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е: При нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком этой функции, т.е. в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Пример 1. а) Найти: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{sinx}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}} = e^1 = e$.

б) Вычислить: $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) =$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

§1. Непрерывность функции (продолжение)

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

***Df*:** Пусть функция $y = f(x)$ (рис. 1) определена в некотором интервале $(a; b)$. Возьмем произвольную точку $x_o \in (a; b)$. Для любого $x \in (a; b)$ разность $\Delta x = x - x_o$ называется **приращением аргумента** $\boldsymbol{x}$ **в точке** $\boldsymbol{x_o}$. Разность соответствующих значений функции $\Delta y \equiv \Delta f(x_o) = f(x) - f(x_o) \equiv f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ называется **приращением функции** $\boldsymbol{f(x)}$ **в точке** $\boldsymbol{x_o}$.

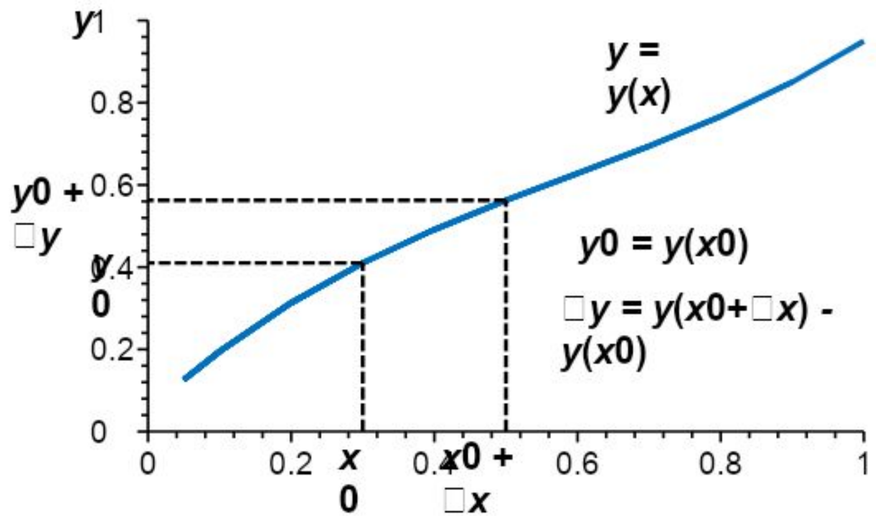


Рис. 1

§1. Непрерывность функции (продолжение)

Запишем равенство (1) в новых обозначениях, с использованием понятий приращения аргумента и функции. Условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ эквивалентны, поэтому требование непрерывности $\lim_{x \to x0} f(x) = f(x_0)$ может быть переписано как $\lim_{x \to x0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (3)$$

Df**:** Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке в точке** $\mathbf{x_0}$, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполнено требование непрерывности (3), т.е. бесконечно малому приращению функции соответствует бесконечно малое приращение аргумента.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо непосредственно определение (1), либо, что часто бывает удобнее, его следствие (3).

§1. Непрерывность функции (продолжение)

П р и м е р 2. Доказать непрерывность функции в произвольной точке x_0 ее области определения D.

(а) $y = x^2$.

Решение: Найдем приращение функции в некоторой точке $x_0 \in D$:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0.$$

Вывод: Функция $y = x^2$ непрерывна.

(б) $y = \sin x$.

Решение: Найдем приращение функции в точке $x_0 \in D$:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) =$$

$$= \sin(x_0)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x_0)\cdot\sin(\Delta x) - \sin(x_0) =$$

$$= \sin(x_0)\cdot(\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x_0)\cdot\sin(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0.$$

Вывод: Функция $y = \sin x$ непрерывна.

§1. Непрерывность функции (продолжение)

Df: Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в (на) интервале (a; b)**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Df: Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в (на) отрезке [a; b]**, если она непрерывна в интервале (a; b), а в граничных точках a и b односторонне непрерывна. А именно, *в точке a непрерывна справа*, т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, а *в точке b непрерывна слева*, т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Df: Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной (в области определения)**, если она непрерывна в каждой точке $x \in D$ области своего определения.

1.2. Точки разрыва функции и их классификация

Df: Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции.**

Если $x = x_0$ – точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности функции (см. выр. (1)). А именно,

(1) Функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. Например, $y = \frac{1}{x-4}$.

(2) Функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ в точке x_0. Например, $y = \mathrm{sgn}(x)$.

(3) Функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности, существует предел $\lim\limits_{x\to x0} f(x)$ в точке x_0, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция

$$y = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет разрыв в точке $x_0 = 0$.

1.2. Точки разрыва функции и их классификация (продолжение)

Все точки разрыва функции классифицируются на точки разрыва первого (I) и второго (II) рода.

***Df*:** Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{x \to x0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x0+0} f(x) = A_2$. При этом:

(а) Если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

(б) Если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного (неустранимого) разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

***Df*:** Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1.2. Точки разрыва функции и их классификация (продолжение)

* Приведем примеры классификации точек разрыва функции (на примере уже упомянутых функций).

П р и м е р 3 (а). $y(x) = \frac{1}{x-4}$.

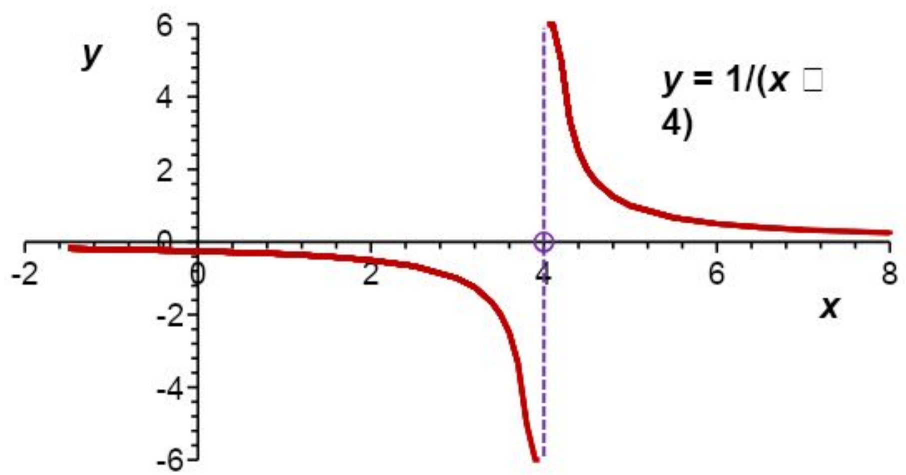


Рис. 2

Функция $y = f(x)$ определена всюду на числовой оси $\mathbf{R}$ за исключением точки $x_0 = 4$. В точке $x_0 = 4$ пределы слева и справа бесконечны: x_0 является точкой разрыва II рода.

1.2. Точки разрыва функции и их классификация (продолжение)

П р и м е р 3 (б). $y(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

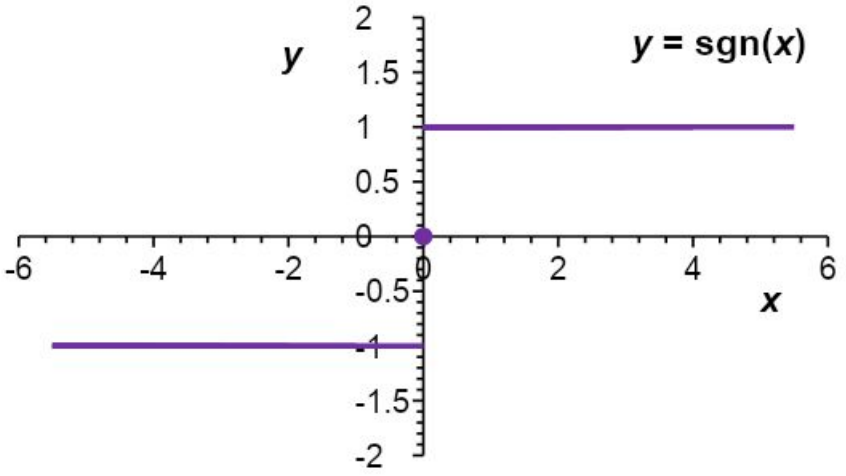


Рис. 3

Функция $y = f(x)$ определена всюду на числовой оси $\boldsymbol{R}$. В точке $x_0 = 0$ пределы слева и справа существуют, но различны: x_0 является точкой (неустранимого) разрыва I рода.

1.2. Точки разрыва функции и их классификация (продолжение)

П р и м е р 3 (в). $y(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

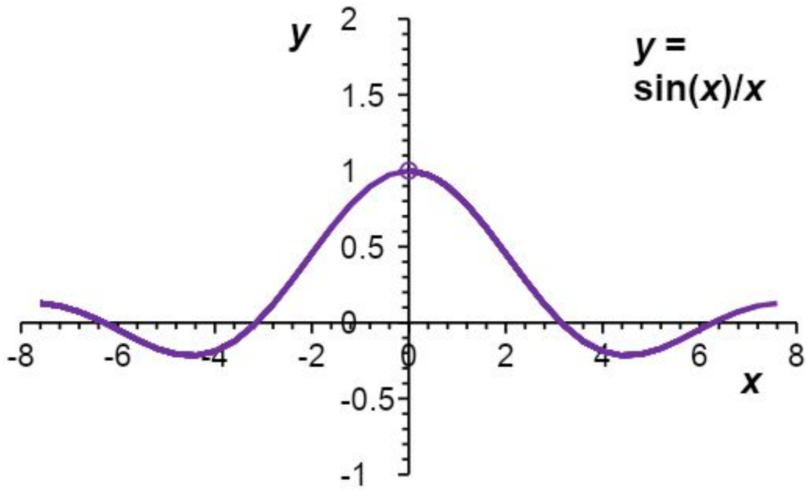


Рис. 4

Функция $y = f(x)$ определена всюду на числовой оси ***R*** за исключением точки $x_0 = 0$. В точке $x_0 = 0$ пределы функции слева и справа равны 1: x_0 является точкой устранимого разрыва I рода. Доопределение функции делает ее непрерывной:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{при } x \neq 0; \\ 1, \text{при } x = 0. \end{cases}$$

§2. Непрерывные функции и их свойства

2.1. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теоремы о непрерывности функций прямо вытекают из соответствующих теорем о пределах.

Т е о р е м а 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного – за исключением тех значений аргумента, в которых ее делитель равен нулю).

Более строго: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в области D. Тогда и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ также непрерывны в области D.

Доказательство: Докажем теорему, например, для случая произведения непрерывных функций. С учетом непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ по теореме о пределе произведения имеем:

$$\lim_{x \to x0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x0} f(x) \cdot \lim_{x \to x0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$ ч.т.д.

2.1. Основные теоремы о непрерывных функциях (продолжение)

* Т е о р е м а 2. Суперпозиция двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Более строго: Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, являющаяся суперпозицией непрерывных функций непрерывна в точке x_0.

Доказательство: В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x\to x0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0, ч.т.д.

2.1. Основные теоремы о непрерывных функциях (продолжение)

Т е о р е м а 3. Функция, обратная к непрерывной функции, есть функция непрерывная.

Более строго: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a; b]$ оси Ox. Тогда обратная функция также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy.

Доказательство: (без доказательства).

В примере 2 установлено, что функция $y = \sin x$ непрерывна. Следовательно, непрерывной функций будет и обратная к синусу функция $y = \arcsin x$ во всей области своего определения (D: $-1 \leq x \leq 1$). Подобным же образом непрерывны в области своего определения D функции $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

2.2. Непрерывность элементарных функций

***Df*:** Элементарной функцией называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций.

Т е о р е м а 4. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

<u>Доказательство</u>: (без доказательства).

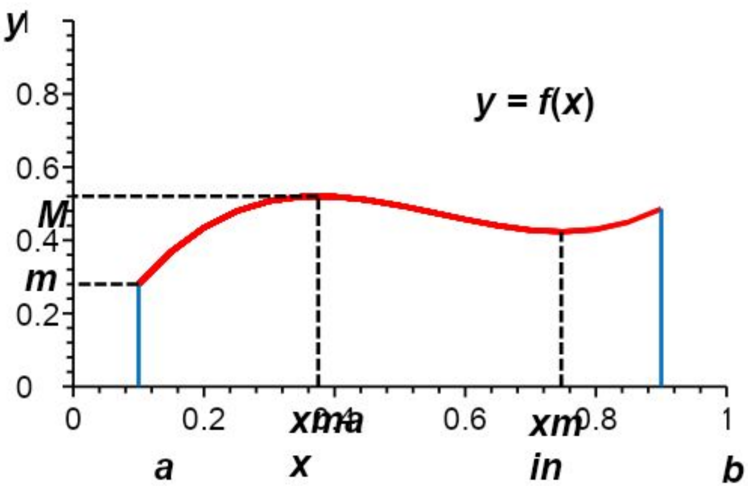
Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, в которых они определены.

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств.

2.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Т е о р е м а 5 (Вейерштрасс). Если функция определена и непрерывна на отрезке [*a*; *b*], то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

<u>Доказательство</u>: (без доказательства).



Изображенная на рис. 5 функция непрерывна на отрезке [*a*; *b*] и принимает на нем свое наименьшее (*m*) и наибольшее (*M*) значения.

С л е д с т в и е . Если функция определена и непрерывна на отрезке [*a*; *b*], то она ограничена на нем.

2.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Т е о р е м а 6 (Больцано – Коши). Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Доказательство: (без доказательства).

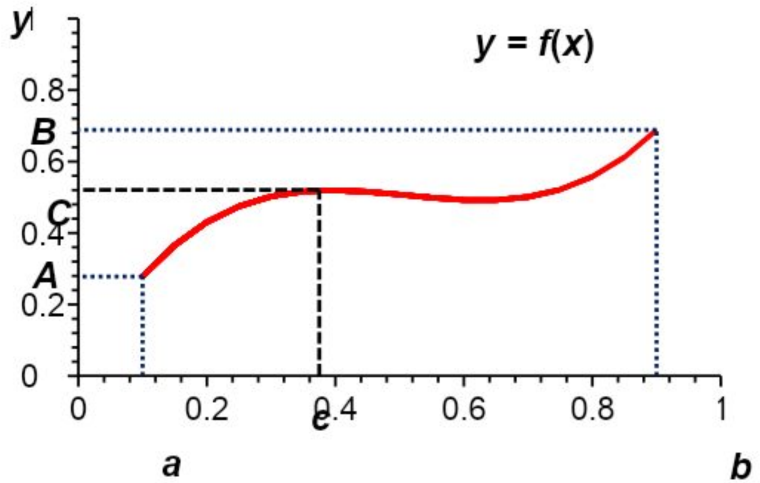


Рис. 6

Изображенная на рис. 6 функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на нем все промежуточные значения между $A = f(a)$ и $B = f(b)$ значения, т.е. для всякого $A \le C \le B$ найдется точка $c \in [a; b]$: $f(c) = C$.

2.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

С л е д с т в и е из теоремы 6. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах $f(a) = A$ и $f(b) = B$ *разных знаков*, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Данный результат используется при нахождении корней алгебраических и трансцендентных уравнений, например, методом деления отрезка пополам или другим аналогичным методом.

П р и м е р 4. Найти с точностью $\varepsilon < 10^{-4}$ (с точностью до 4-х знаков после запятой) все корни уравнения:

$$x^3 = x + 1.$$

2.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке (продолжение)

П р и м е р 4. Найти с точностью $\varepsilon < 10^{-4}$ (с точностью до 4-х знаков после запятой) все корни уравнения:

$$x^3 = x + 1.$$

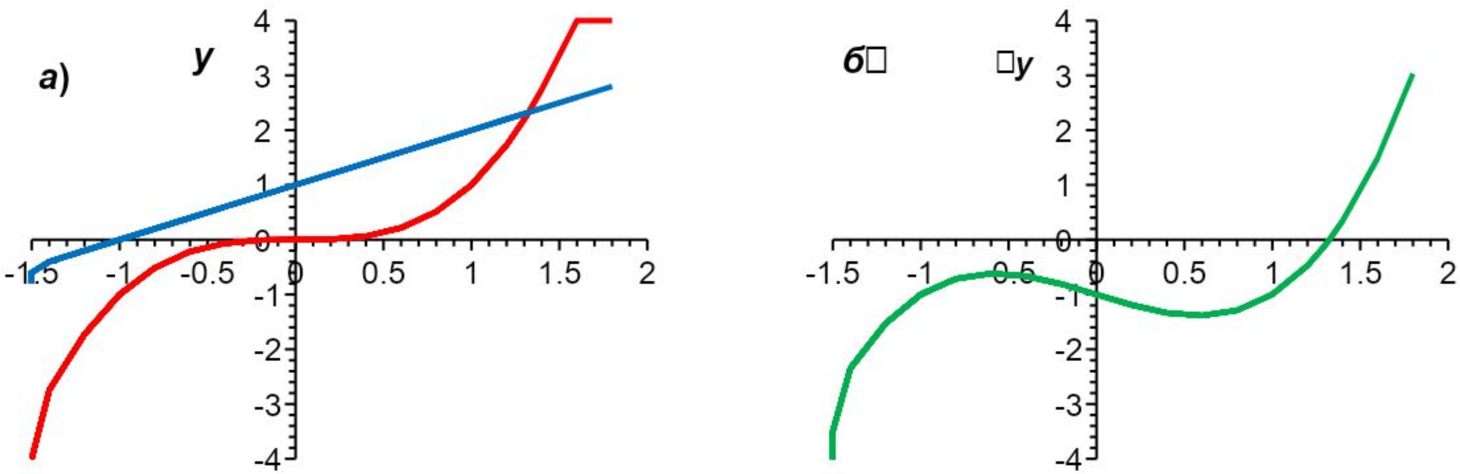


Рис. 7 Графики: (а) $y_1(x) = x^3$ и $y_2(x) = x + 1$; (б) $\Delta y(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

Корень уравнения $x^3 = x + 1$ есть $x_0 = 1{,}32472$.

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …