Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

Математика

Лекция 8. Исследование функций при помощи производных. Общая схема исследования функции и построения графика

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
5. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Исследование функций при помощи производных. Возрастание и убывание функции

§2. Максимум и минимум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

§3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

§4. Асимптоты графика функции

§5. Общая схема исследования функции и построения графика

§1. Исследование функций при помощи производных. Возрастание и убывание функции

Одним из важных приложений производной является ее применение к исследованию функций.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

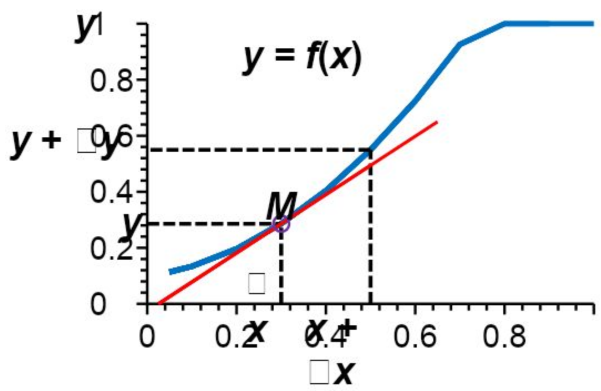
Т е о р е м а 1 (**необходимые условия**, $\Rightarrow$). Если дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ возрастает, то ее первая производная $f'(x) \geq 0$; напротив, если функция $f(x)$ убывает, то ее производная $f'(x) \leq 0$ всюду на интервале $(a; b)$.

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Выберем в этом интервале две произвольные точки x и $x + \Delta x$. Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

§1. … Возрастание и убывание функции (продолжение)

* Функция $y = f(x)$ возрастает, поэтому $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ при $\Delta x > 0$ и, наоборот, $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ при $\Delta x < 0$. В обоих этих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, поэтому и в пределе $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Аналогично рассматривается случай функции, убывающей на промежутке $(a; b)$, ч.т.д.



Геометрически доказанная теорема означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox (см. рис.).

§1. … Возрастание и убывание функции (продолжение)

Т е о р е м а 2 (**достаточные условия**, $\Leftarrow$). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает; если $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает всюду на интервале $(a; b)$.

<u>Доказательство</u>: Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки $x_1, x_2 \in (a; b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1; x_2)$. По условию теоремы $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, разность $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Случай $f'(x) < 0$ на интервале $(a; b)$ рассматривается аналогично, <u>ч.т.д</u>.

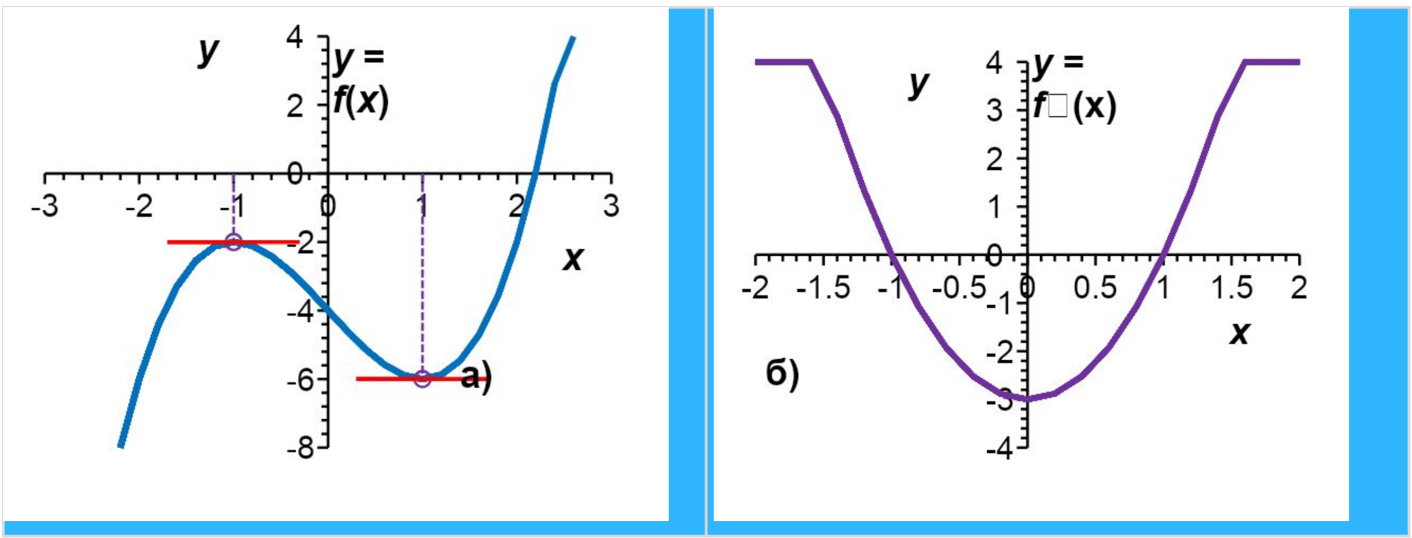
Правило исследования функции $y = f(x)$ на *монотонность* (*монотонное поведение*), т.е. на *возрастание* или *убывание*.

Для того, чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на монотонность необходимо: 1) вычислить производную этой функции $y' = f'(x)$ и 2) установить интервалы в которых $f'(x) > 0$ и (или) $f'(x) < 0$.

§1. … Возрастание и убывание функции (продолжение)

П р и м е р 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонность, т.е. на возрастание и убывание.

<u>Решение</u>: Функция (рис., а) определена всюду на числовой оси $\boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$. Ее первая производная равна $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$. Исследуем знак производной методом интервалов (рис., б).



<u>Ответ</u>: Функция возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, здесь $f'(x) > 0$; и убывает при $x \in (-1; 1)$, здесь $f'(x) < 0$.

§2. Максимум и минимум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

***Df*:** Точка x_o называется **точкой (локального) максимума** функции $y = f(x)$ (см. рис. из примера 1), если существует такая δ - окрестность точки x_o, то есть интервал $(x_o - \delta; x_o + \delta)$, что при всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

***Df*:** Точка x_o называется **точкой (локального) минимума** функции $y = f(x)$ (см. рис), если существует такая δ - окрестность точки x_o, что $\forall x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

***Df*:** Значение функции $f(x_o)$ в точке x_o максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции $y = f(x)$. Максимумы и минимумы функции обобщенно называются **экстремумами** функции.

§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

Т е о р е м а 3 (П. Ферма, **необходимое условие экстремума**). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Пусть, для определенности, в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает максимума. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x > 0;$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

По условию теоремы существует производная $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, причем в пределе $f'(x_0) \le 0$ при $\Delta x > 0$ и $f'(x_0) \ge 0$ при $\Delta x < 0$. Поэтому в самой точке x_0 имеем $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

З а м е ч а н и я: 1. Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке x_0 экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox (см. рис. к примеру 1).

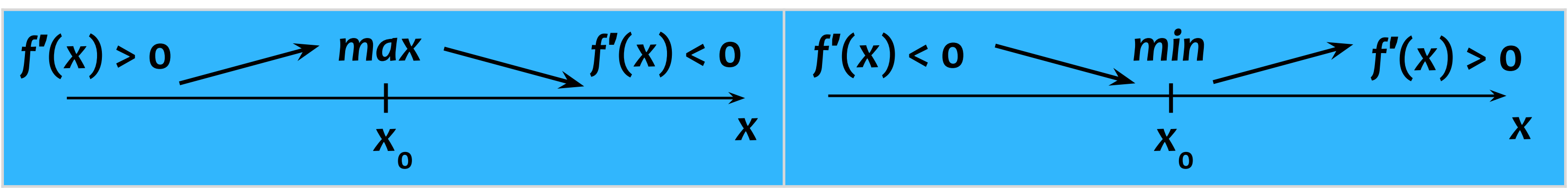
2. Утверждение, обратное к утверждению теоремы Ферма, в общем случае неверно: из того, что $f'(x_0) = 0$ не следует, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает своего экстремума (экстремальна). Например, для функции $y = x^3$ производная функции равна $y' = 3x^2 = 0$ в точке $x_0 = 0$, однако, эта точка не является точкой экстремума (СРС).

3. Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но точка x_0 – точка минимума (СРС).

§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

Т е о р е м а 4 (**достаточное условие экстремума**). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0 и при переходе через нее в положительном направлении, т.е. слева направо, ее производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 есть точка максимума; если же производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 есть точка минимума.

Мнемоническая схема:



Доказательство: Рассмотрим δ-окрестность точки x_0. Пусть выполняются условия $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$.

§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

Отсюда следует, что значение $f(x = x_o)$ в точке x_o является наибольшим на интервале $(x_o - \delta, x_o + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_o)$ для всех $x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$. Это и означает, что точка x_o – точка максимума функции $y = f(x)$. Случай, когда производная функции $f'(x)$ меняет в точке x_o знак с «–» на «+», рассматривается аналогично, ч.т.д.

Правила исследования функции на экстремум:

1) Найти критические точки функции $y = f(x)$.

2) Выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции D.

3) Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек.

4) В соответствии с теоремой о достаточном условии экстремума выписать точки экстремума, если они есть, и вычислить значения функции в каждой из них.

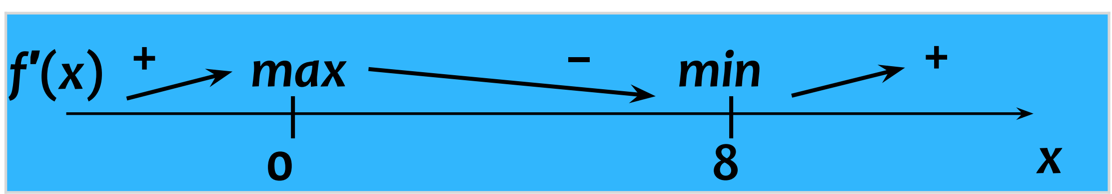
§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

П р и м е р 2. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Областью определения функции является все множество действительных чисел $D = \mathbf{R}$. Находим

$$y' = \left(\frac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна 0 при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; +\infty)$. Отметим на рис. знаки производной, полученные, например, методом пробных точек, слева и справа от критических точек x_1 и x_2:



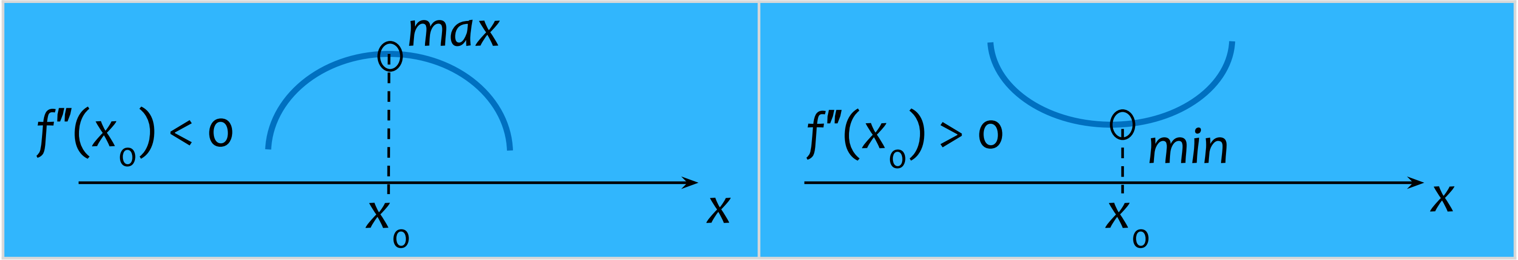
Ответ: В т. $x_1 = 0$ – $max\ f(0) = 0$; в т. $x_2 = 8$ – $min\ f(8) = -4/3$.

§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума функции $y = f(x)$, основанный на анализе знака второй производной $f''(x)$.

Т е о р е м а 5. Если в точке x_0 первая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а 2-ая производная отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ – минимум.

Мнемоническая схема:



§2. Максимум и минимум функции … (продолжение)

Доказательство: Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Поскольку

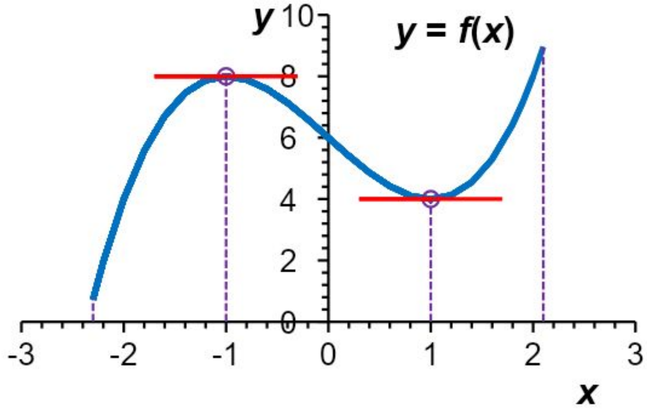
$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то $\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Значит, по теореме 4, в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает своего минимума.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум, ч.т.д.

§2. … Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (продолжение)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Как известно (теорема Вейерштрасса), такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т.е. в точках a или b. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.



§2. … Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (продолжение)

Правила исследования функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$ на наибольшее и наименьшее значения:

1) Найти критические точки функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$.

2) Вычислить значения функции в найденных критических точках.

3) Вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. в точках $x = a$ и $x = b$.

4) Среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

З а м е ч а н и е. Если функция не имеет критических точек на промежутке $(a; b)$, то такая функция монотонно возрастает или убывает, достигая своих наибольшего и наименьшего значений на концах отрезка $[a; b]$.

§2. … Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (продолжение)

П р и м е р 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение: Приравняв нулю производную функции $y = f(x)$, найдем критические точки данной функции:

$$y' = (3x^4 + 4x^3 + 1)' = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2 \cdot (x + 1) = 0.$$

Вычислим значения функции на границах отрезка $[-2; 1]$, а также в критических точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$ (см. табл.):

x	**−2**	**−1**	**0**	**1**
$f(x)$	17	0	1	8

Ответ: Наименьшее значение функции $f_{наим} = f(-1) = 0$; наибольшее значение функции $f_{наиб} = f(-2) = 17$.

§2. … Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (продолжение)

П р и м е р 4. Из шара объемом V_0 необходимо выточить цилиндр наибольшего объема V. Чему он равен?

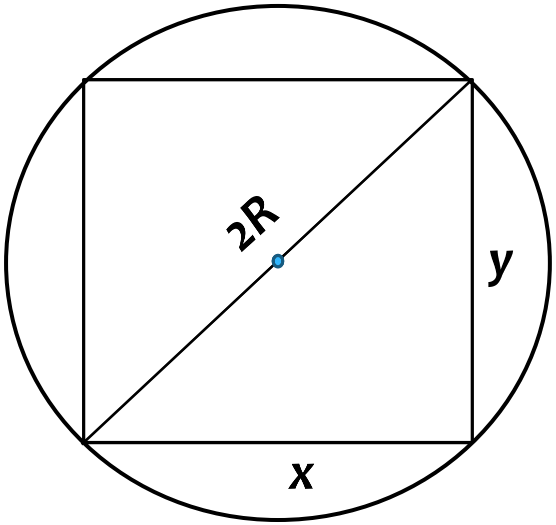
Решение: Объем шара равен $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$, так что его радиус равен $R = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}$. Установим размеры вписанного в шар цилиндра наибольшего объема, т.е. диаметр x его основания и высоту y (см. рис.).

Объем вписанного цилиндра равен

$$V = \frac{1}{4}\pi x^2 y,$$

а размеры x и y цилиндра связаны с радиусом R теоремой Пифагора:

$$x^2 + y^2 = 4R^2.$$



§2. … Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (продолжение)

Исключая переменную x, получим выражение для целевой функции – объема цилиндра V – в виде функции одной переменной: $V = \frac{1}{4}\pi\cdot(4R^2 - y^2)\cdot y$, где $0 \le y \le 2R$.

Найдем максимум данной функции по переменной y: $V' = \frac{1}{4}\pi\cdot(4R^2 - 3y^2) = 0$ при $y^2 = \frac{4}{3}R^2$ или $y = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

Соответствующее значение диаметра x дается выражением: $x^2 = 4R^2 - y^2 = 4R^2 - \frac{4}{3}R^2 = \frac{8}{3}R^2$. Объем цилиндра равен: $V = \frac{1}{4}\pi x^2 y = \frac{1}{4}\pi\cdot \frac{8}{3}R^2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}R = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi\cdot R^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}V_0$.

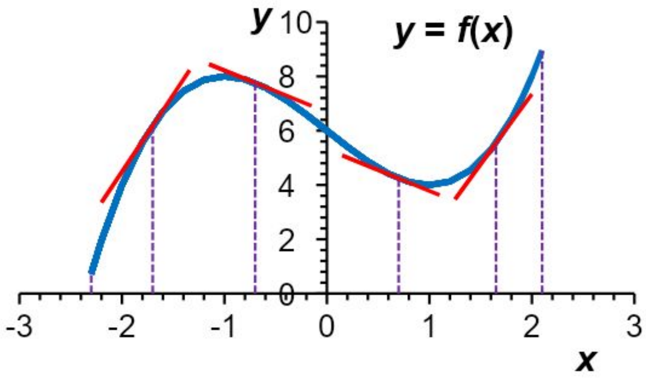
Вторая производная $V'' = -\frac{3}{2}\pi\cdot y < 0$ – отрицательна при $y > 0$, т.е. найден именно максимум целевой функции.

<u>Ответ</u>: Вписанный в шар наибольший цилиндр имеет объем, равный $V = \frac{1}{\sqrt{3}}V_0$.

§3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

***Df*:** График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вниз (выпуклым книзу)** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале (см. рис.). Наоборот, график функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вверх (выпуклым кверху)** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

***Df*:** Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется **точкой перегиба** (графика) функции.



§3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

Т е о р е м а 6. Если дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x_0) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x_0) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ – график выпуклый вниз.

Доказательство: СРС.

§3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба (продолжение)

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Т е о р е м а 7 (**достаточное условие существования точек перегиба**). Если у дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ 2-ая производная $f''(x_0)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Доказательство: Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от точки $x = x_0$ график выпуклый вверх, а справа – выпуклый вниз. Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика является точкой перегиба, ч.т.д.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба.

§3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба (продолжение)

П р и м е р 7. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^3 - 3x + 6$.

Решение: Найдем первую и вторую производные функции и приравняем последнюю нулю:

$y' = (x^3 - 3x + 6)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

$y'' = 6x = 0$ при $x_0 = 0$.

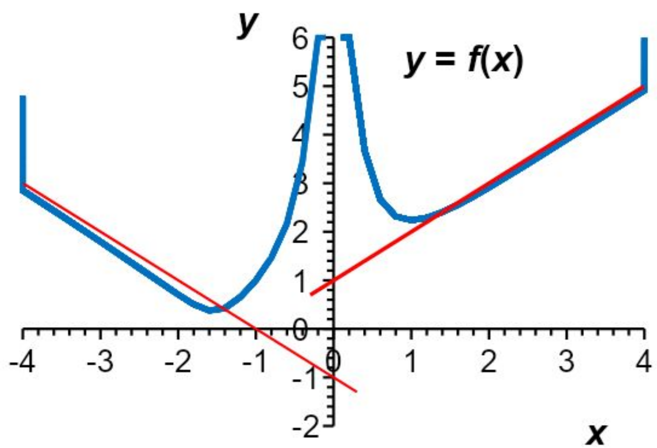
Ясно, что $y'' < 0$ при $x < 0$, здесь график функции $y(x)$ выпуклый вверх, и $y'' > 0$ при $x > 0$, здесь график функции $y(x)$ выпуклый вниз. Точка $x_0 = 0$ – точка перегиба.

Ответ: Точка $x_0 = 0$ – точка перегиба (см. график на первом слайде §3).

§4. Асимптоты графика функции

Построение графика функции облегчается, если знать его асимптоты.

***Df*: Асимптотой** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой графика функции $y = f(x)$, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат это точки по кривой.



Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными (см. рис. с графиком функции $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2/x^2}$), а также горизонтальными.

§4. Асимптоты графика функции (продолжение)

* ***Df:*** Говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

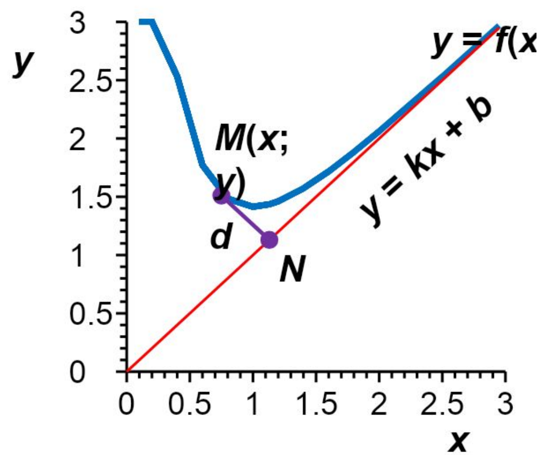
Правило отыскания вертикальных асимптот:

Для отыскания вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ следует найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ по модулю неограниченно возрастает. Обычно такие точки являются точками разрывов второго рода.

Так, кривая функции $y = \frac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, ибо $\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{2}{x+1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{2}{x+1} = +\infty$.

§4. Асимптоты графика функции (продолжение)

Df: Если уравнение асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где k **– конечное число,** то говорят, что эта прямая является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ (см. рис.); в частности, если $k = 0$, то говорят о **горизонтальной асимптоте** к графику функции $y = f(x)$.



Итак, будем искать уравнение наклонной асимптоты к графику функции $y = f(x)$ в виде $y = kx + b$. Найдем k и b.

§4. Асимптоты графика функции (продолжение)

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка кривой $y = f(x)$. Из аналитической геометрии на плоскости известно, что расстояние от точки $M(x; y)$ до прямой $y = kx + b$ дается выражением: $d = \left|\frac{y - kx - b}{\sqrt{k^2+1}}\right|$.

Для наклонной асимптоты параметр k является конечным числом, поэтому условие $d \to 0$ при $x \to \infty$ выполняется, если к нулю стремится числитель дроби: $\lim_{x\to\infty}|y - kx - b| = 0$. Отсюда следует, что разность под знаком модуля может быть представлена в виде $kx - y + b = \alpha$, где $\alpha = \alpha(x)$ – б.м.ф., т.е. $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Разделив обе части равенства $kx - y + b = \alpha$ на x и переходя к пределу при $x \to \infty$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} - \frac{\alpha}{x}\right) = k.$$

§4. Асимптоты графика функции (продолжение)

Выразив угловой коэффициент асимптоты *k*:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x},$$

получим затем выражение для свободного члена *b*:

$$b = \lim\nolimits_{x\to\infty}(y(x) - kx).$$

Правило отыскания наклонных асимптот:

Для отыскания наклонных асимптот $y = kx + b$ графика функции $y = f(x)$ необходимо последовательно вычислить коэффициенты асимптоты по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx).$$

З а м е ч а н и е: Асимптоты функции $y(x)$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ могут быть, вообще говоря, различными. Поэтому необходимо рассматривать оба случая $x \to \pm\infty$.

§4. Асимптоты графика функции (продолжение)

П р и м е р 8. Найти асимптоты функции $y = x(e^x - 1)$.

Решение: Действуя по указанному выше правилу отыскания наклонных асимптот, найдем k и b:

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(e^x - 1) = \infty,$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1 + \lim_{x\to-\infty} e^x = -1.$$

Т.о., при $x \to +\infty$ асимптоты нет, а при $x \to -\infty$ угловой коэффициент $k_- = -1$. Для этого случая найдем свободный член:

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - x + x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

У графика функции $y = x(e^x - 1)$ при $x \to -\infty$ имеется наклонная асимптота $y = -x$.

Ответ: У графика функции $y = x(e^x - 1)$ при $x \to -\infty$ имеется наклонная асимптота $y = -x$; при $x \to +\infty$ асимптоты нет.

§5. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности (см. далее).

З а м е ч а н и я:

1. Приведенная схема исследования является общей и, в зависимости от конкретного вида исследуемой функции, в простых случаях некоторые пункты могут быть опущены.

2. Если построение графика функции остается затруднительным даже проведения полного исследования функции, следует вычислить и построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности поведения функции.

3. Иногда целесообразно исследование функции сопровождать постепенным построением эскиза графика функции $y = f(x)$.

§5. Общая схема исследования функции … (продолжение)

Правила (схема) исследования функции $y = f(x)$ и построения ее графика:

1) Найти область определения функции.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат

3) Найт

интерв

4) Уста

5) Найт

6) Найт

7) Найти экстремумы функции.

8) Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции.

9) На основании проведенного исследования построить график функции $y = f(x)$.

§5. Общая схема исследования функции … (продолжение)

П р и м е р 9. Построить график функции $y = \frac{x}{1-x^2}$.

<u>Решение</u>: Выполним все пункты схемы.

1. Функция не определена при $x_1 = -1$ и при $x_2 = 1$. Область определения функции $D = (-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; +\infty)$; график состоит из 3-х ветвей.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. график функции $y(x)$ пересекает координатные оси в точке $O(0; 0)$.

3. Установим интервалы знакопостоянства функции. Функция $y(x)$ знакоположительна при условиях:

$$y(x) = \frac{x}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow \quad (\mathrm{I})\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^2 > 0; \end{cases} \cup \ (\mathrm{II})\begin{cases} x < 0, \\ 1 - x^2 < 0 \end{cases}.$$

Решение неравенства $y(x) > 0$ есть объединение двух решений: решения системы (I) $(0; +\infty)\cap(-1; 1) = (0; 1)$ и решения системы (II): $(-\infty; 0)\cap((-\infty; 1)\cup(1; +\infty)) = (-\infty; 0)$. Т.о., $y(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)\cup(0; 1)$.

Аналогично, $y(x) < 0$ при $x \in (-1; 0)\cup(1; +\infty)$.

§5. Общая схема исследования функции … (продолжение)

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график функции $y(x)$ симметричен относительно оси Ох.

5. Прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами функции. Действительно,

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty.$$

Выясним наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Т.о., у графика $y(x)$ есть горизонтальная асимптота $y = 0$.

§5. Общая схема исследования функции … (продолжение)

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции по знаку первой производной:

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Очевидно, $y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0\ \forall x \in D$, т.е. функция $y(x)$ всюду возрастает.

7. Исследуем функцию $y(x)$ на наличие экстремумов. В силу п.6 $y' > 0\ \forall x \in D$, т.е. локальных экстремумов у функции нет. Производная данной функции $y'(x)$ не существует в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, однако эти точки не входят в область D определения функции.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Найдем y'':

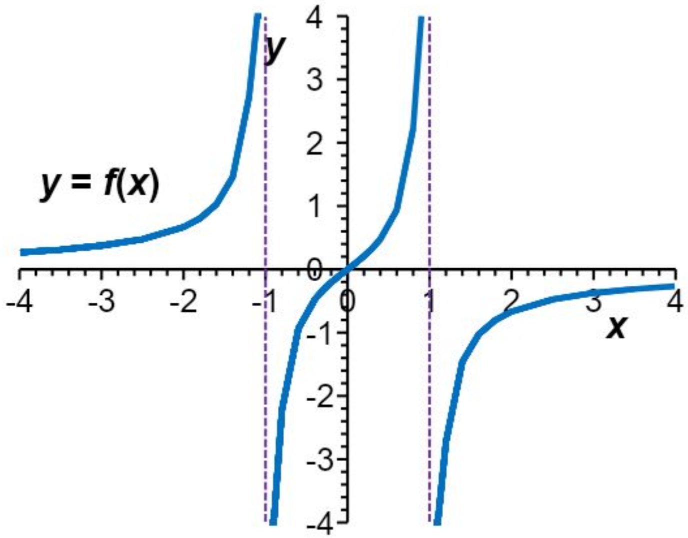
$$y'' = \left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x\cdot(1-x^2)^2-(1+x^2)\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

§5. Общая схема исследования функции … (продолжение)

Вторая производная $y''(x)$ равна нулю или не существует в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. В последней точке $y''(x_3 = 0) = 0$. Исследуем знак второй производной методом интервалов, решая неравенства: $y'' = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} > 0$ и $y'' = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} < 0$.

Получим: $y''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ – здесь функция выпукла вниз; $y''(x) < 0$ при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – здесь $y(x)$ выпукла вверх.

9. На основании исследования строим график функции $y(x) = \frac{x}{1-x^2}$ (см. рис.).



* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …