Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Институт прикладной математики и информационных технологий.

Численные методы газовой динамики

Квитко Геннадий Васильевич,
к.ф.-м.н., доцент
кафедры прикладной математики ИПМИТ БФУ

Лекция 3.

Уравнения газовой динамиики. Случай одномерного течения. Интегральная и дифференциальная форма .

В предыдущей лекции было показано, что в случае одномерного течения газа, в эйлеровых переменных, в предположении, что все газодинамические параметры это - ограниченные и непрерывные либо кусочно-непрерывные функции, для любого замкнутого контура $G \subset V$ с границей $\Gamma \subset \Omega$ из области определения решений имеет место следующая система уравнений, выражающих соответственно законы сохранения массы, импульса и энергии:

Уравнения газовой динамики. Эйлеровы переменные.

$$\oint_{\Gamma} r^{\nu}\{\rho dr - (\rho u)dt\} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\oint_{\Gamma} r^{\nu}\{(\rho u)dr - (p + \rho u^2)dt\} = -\iint_G \nu r^{\nu-1} p\, dr\, dt \qquad (1.2)$$

$$\oint_{\Gamma} r^{\nu}\{\rho(\varepsilon + \rho u^2/2)dr - \rho u(\varepsilon + p/\rho + u^2/2)dt\} = 0 \qquad (1.3)$$

или в векторной форме:

$$\oint_{\Gamma} r^{\nu}[\vec{a}dr - \vec{b}dt] = \iint_G r^{\nu-1} f\, dr\, dt \qquad (\mathrm{I})$$

Эти уравнения единым образом описывают в зависимости от значения целого параметра ν течение газа сразу для трех случаев: при $\nu = 0$ имеем случай плоской, при $\nu = 1$ - цилиндрической, а при $\nu = 2$ - сферической симметрии течения газа. Переменная r - единая координата, вдоль которой движется газ.

Уравнения газовой динамики. Эйлеровы переменные.

Для компактной записи в уравнении (I) были введены следующие векторы (столбцы):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(\varepsilon + \rho u^2/2) \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u(\varepsilon + p/\rho + u^2/2) \end{pmatrix}, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Напомним, что в газодинамических уравнениях (1.1) – (1.3) и (I) в качестве газодинамических функций выступают следующие четыре функции: $\rho(r,t)$ - плотность газа, $u(r,t)$ - его средняя скорость, $p(r,t)$ - давление газа и $\varepsilon(r,t)$ - его внутренняя энергия. Система (1.1) – (1.3) состоит из трех уравнений, а неизвестных функции – четыре. Систему уравнений газовой динамики удается замкнуть с помощью четвертого - уравнения состояния газа. Это уравнение может быть представлено в различной форме, в зависимости от рассматриваемой задачи. Особенность состоит в том, что оно достаточно просто связывают между собой три переменных: ρ, p и ε.

Уравнения газовой динамики. Эйлеровы переменные.

В самом простейшем варианте идеального газа *уравнение состояния* газа имеет, например, следующий вид:

$$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \qquad (1.4)$$

Величина γ называется показателем адиабаты. Обычно это константа: $\gamma = const > 1$. Пока ограничимся рассмотрением этого простейшего случая. Все описанные выше уравнения записаны в переменных Эйлера.

Если воспользоваться известной в математическом анализе формулой Остроградского-Грина, то все контурные интегралы можно преобразовать в интегралы по области G. Для векторной записи (I) имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma} r^{\nu}[\vec{a}dr - \vec{b}dt] = \iint\limits_{G} [\,\partial(r^{\nu}\vec{a})/\partial t + \partial(r^{\nu}\vec{b})/\partial r]drdt \qquad \text{(II)}$$

Уравнения газовой динамики. Эйлеровы переменные.

В системе (II) подинтегральные выражения будут содержать первые производные по времени t от газодинамических функций: ρ, p , u, и ε.

Ввиду произвольности области G эти подинтегральные выражения должны обращаться в нуль. Поэтому для гладких течений $(\rho, u, p, \varepsilon \in C_1)$ из выполнения интегральных законов сохранения (1.1) – (1.3) или (I) следует выполнение дифференциальных законов, т.е. справедлива система УГД в дифференциальном виде. В компактной векторной форме имеем:

$$\frac{\partial(r^{\nu}\vec{a})}{\partial t}+\frac{\partial\left(r^{\nu}\vec{b}\right)}{\partial r}=\nu r^{\nu-1}\vec{f} \qquad \text{(III)}$$

В (II) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{f}$ имеют тот же вид, что и в случае интегральной системы (I). Несложно записать это уравнение в виде системы трех одномерных уравнений для каждого из законов сохранения.

Уравнения газовой динамики. Эйлеровы переменные.

Если газ обладает конечной вязкостью и теплопроводностью, то уравнения (III) заменяются на такое же по формальному виду уравнение

$$\frac{\partial\left(r^{v}\vec{A}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(r^{v}\vec{B}\right)}{\partial r}=\vec{F}, \qquad \text{(IV)}$$

где

$$\vec{A}=\vec{a}, \quad \vec{B}=\vec{b}-\begin{pmatrix} 0 \\ \mu\cdot\partial u/\partial r \\ \mu/\rho u\cdot\partial u/\partial r \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}=vr^{v-1}\vec{f}+\begin{pmatrix} 0 \\ -vr^{v-1}\mu\,\partial u/\partial r \\ \partial/\partial r\cdot r^{v}\cdot\kappa\cdot\partial T/\partial r \end{pmatrix},$$

где T - температура газа, а $\mu>0$, $\kappa>0$ соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.

равнения газовой динамики. Массовые лагранжевы переменные.

Перейдем теперь к описанию газовой динамики в массовых лагранжевых переменных $(q\,,t)$:

$$q(r) = \int_0^r \rho_0(r) r^{\nu} dr\,, \qquad (1.5)$$

$$u(q\,,t) = \partial r(q\,,t)/\partial t \qquad (1.6)$$

Система уравнений (III) для простейшего идеального газа в массовых переменных в дивергентной форме с учетом (1.6) [дополнительное уравнение системы УГД в массовых переменных] имеет вид:

$$\frac{\partial\left(\vec{X}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(r^{\nu}\vec{Y}\right)}{\partial q} = \vec{R}\,, \qquad (V)$$

где $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1/\rho \\ u \\ \varepsilon + \rho u^2/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} u \\ p \\ up \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu p/(r\rho) \\ 0 \end{pmatrix}$

Если газ обладает конечной вязкостью и теплопроводностью, то уравнения (V) заменяются на дивергентное уравнение

$$\frac{\partial(\vec{X})}{\partial t} + \frac{\partial(r^{v}\vec{Z})}{\partial q} = \vec{\Phi}, \qquad \text{(VI)}$$

где,

$$\vec{Z} = \vec{Y} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\,\rho\,r^{v}\partial u/\partial q \\ u\,\mu\,\rho\,r^{v}\,\partial u/\partial q \end{pmatrix},$$

$$\vec{\Phi} = \vec{R} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v\,r^{v-1}\mu\cdot\partial u/\partial q \\ \partial/\partial q\cdot r^{2v}\cdot\rho\kappa\cdot\partial T/\partial q \end{pmatrix},$$

где T - температура газа, а $\mu > 0$, $\kappa > 0$ сответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.

Уравнения газовой динамики. Массовые лагранжевы переменные.

Если газ лишен конечной вязкости и теплопроводности, то его движение не будет гладким и непрерывным. В нем могут образовываться области, где градиенты $\partial u/\partial q$, $\partial T/\partial q$ не ограничены. По этой причине, если рассматривать течение невязкого, нетеплопроводного газ как предельное при $\mu \to 0$, $\kappa \to 0$, то сохранение энтропии S для каждой частицы газа имеет место лишь до тех пор, пока траектория частицы находится в области гладкости течения.

Благодарю за внимание !