





**Разностные методы решения  
уравнений газовой динамики.  
Схема Неймана-Рихтмайера - «крест».**



Теория разностных методов имеет два аспекта:

- 1) методы построения разностных схем;
- 2) обоснование выбранной разностной схемы.

Большинство задач являются **нелинейными**, а теория разностных методов развита в основном для **линейных** задач

В газовой динамике мы имеем дело, вообще говоря, с **разрывными решениями интегро-дифференциальных уравнений.**

Понятие сходимости разностной схемы существенно зависит от класса решений законов сохранения.

*Норма близости двух обобщенных (разрывных) решений является **слабой** (норма пространства  $L_1$ )*



## Способы описания газодинамических течений и построение разностных схем.

**1-й способ.** Область  $G$  плоскости  $(x, t)$ , в которой рассматривается движение, разбивается сильными и слабыми разрывами на отдельные  $G_i$  области **гладкого течения**, в которых удовлетворяются уравнения газовой динамики.

На самих разрывах удовлетворяются условия совместности.

Обобщенное решение есть совокупность гладких решений, определяемых в областях  $G_i$  и примыкающих друг к другу через **линии разрывов** с соблюдением **условий совместности**.

Наиболее известным разностным методом, соответствующим этому способу описания, является **метод характеристик**.



**2-й способ.**      **Обобщенное решение** определяется **интегральными законами сохранения** в эйлеровых или лагранжевых координатах.

Описание является **единообразным**, поскольку уравнения газовой динамики и условия совместности - следствия законов сохранения.

Разностные схемы, получаются на основе **единообразной аппроксимации** законов сохранения независимо от характера течения и поэтому носят название **однородных схем** или **схем сквозного счета**.



**3-й способ.** *Обобщенное решение* определяется как **предел** классического решения некоторой системы **квазилинейных параболических** уравнений с *малыми параметрами* при старших производных.

Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

– исходная система уравнений газовой динамики, записанная в виде законов сохранения. Тогда соответствующая ей **параболическая система** имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot B(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] \quad (3.2)$$



Здесь  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  вектор-функция, описывающая течение,  
 $f(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{u})$  векторные функции от векторного аргумента  $\mathbf{u}$ ,  
 $B(\mathbf{u})$  - квадратная матрица,  $\mu$  - малый параметр.

Матрица  $B(\mathbf{u})$  подбирается таким образом, чтобы решение  
 $\mathbf{u}(x, t)$  системы (3.2) обладало достаточной гладкостью и при  
 $\mu \rightarrow 0$  приближалось к решению системы (3.1).



## Способы единообразного описания газодинамических течений.

Выполняются **интегральные законы сохранения**.

Запишем их для случая одномерного течения с различного рода симметрией, т.е. для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат ( $n = 0, 1, 2$ ).

В **эйлеровых** координатах они имеют вид:

$$\oint_C \rho x^n dx - \rho u x^n dt = 0 \quad (3.3)$$

$$\oint_C \rho u x^n dx - (p + \rho u^2) x^n dt = - \iint_{G_C} n p x^{n-1} dx dt \quad (3.4)$$

$$\oint_C \rho \left( \varepsilon + u^2 / 2 \right) x^n dx - \rho u \left( \varepsilon + p / 2 + u^2 / 2 \right) x^n dt = 0 \quad (3.5)$$



В **лагранжевых (массовых)** координатах законы сохранения имеют вид:

$$\oint_C v ds + u x^n dt = 0 \quad (3.6)$$

$$\oint_C u ds - p x^n dt = - \iint_{G_C} (n p v / x) ds dt \quad (3.7)$$

$$\oint_C \left( \varepsilon + u^2 / 2 \right) ds - u p x^n dt = 0 \quad (3.8)$$

$$v = \rho^{-1} \quad x = x(s, t) \quad \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = u(s, t)$$



Устойчивыми схемами, аппроксимирующими интегральные законы сохранения без явного введения в них псевдовязкости являются схемы Лакса, Лакса-Вендроффа, С.К. Годунова.

Характерной чертой прямой аппроксимации интегральных законов сохранения является **свойство консервативности** или **дивергентности** получающихся разностных схем.

**Оно** означает, что уравнения разностной схемы могут быть интерпретированы как интегральные законы сохранения (3.3)-(3.5) или (3.6)-(3.8) записанные для ячейки сетки, образованной пересечением прямых  $t = m \cdot \tau$ ,  $t = (m + 1) \cdot \tau$  с прямыми  $x = x_i$ ,  $x = x_{i+1}$  ( $s = s_i$ ,  $s = s_{i+1}$ ) при некоторой аппроксимации (или интерполяции) величин, входящих в законы сохранения на границах ячейки.



Для консервативной разностной схемы можно применить произвольные аппроксимации (интерполяции) величин на границах ячейки.

Если при этом разностная схема сходится, т.е. семейство разностных решений имеет предел:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) \rightarrow 0$$

и этот предел удовлетворяет именно нужным законам сохранения (3.3)-(3.5), а не каким-либо другим.



Указанное свойство консервативных разностных схем схоже со свойством системы дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u}_\mu, x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ B(\mathbf{u}_\mu, x, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\mu}{\partial x} \right] \quad (3.10)$$

в которой «вязкость» - см. правую часть (3.10) - входит консервативным или дивергентным образом, как производная от выражения  $B \cdot [\partial \mathbf{u}_\mu / \partial x]$



Для системы уравнений (3.10) также имеем похожее свойство.

Если при  $\tau \rightarrow 0$  решение  $\mathbf{u}_\mu(x, t)$  имеет предел  $\mathbf{u}(x, t)$ , то этот предел удовлетворяет законам сохранения:

$$\oint_C \mathbf{u} dx - \varphi(\mathbf{u}, x, t) dt = 0 \quad (3.11)$$

То есть, является обобщенным решением системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u}, x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$



Введение вязкости в законы газовой динамики достигается заменой давления  $p$  в уравнениях (3.3)-(3.5) или (3.6)-(3.8) величиной  $\bar{p}$  :

$$\bar{p} = p + \omega \quad \omega = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial s} = -\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial s} \quad (3.13)$$

На внутренних (контактных) границах это условие вытекает из требования непрерывности векторов потока импульса и энергии:

$$[\omega] = \omega(x+0, t) - \omega(x-0, t) = -\left[ \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.14)$$



В случае постоянного коэффициента вязкости  $\mu$  и политропного газа для эффективной ширины  $l$  ударного перехода в лагранжевых переменных получается выражение:

$$l = \Delta s = \frac{8\mu}{(\gamma + 1)|\Delta u|} \quad (3.15)$$

где  $\Delta u$  - скачок скорости на ударной волне.

Для реальных газов коэффициент вязкости довольно мал, порядка длины свободного пробега  $h$  молекулы газа, поэтому обычно полагают вязкость **линейной**:

$$\mu = \mu_0 h \quad (3.16)$$



Исходя из этих соображений, **Дж. Фон Нейман и Р. Рихтмайер** предложили **нелинейную вязкость**:

$$\mu = \mu_0 h^2 \rho \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| \quad (3.17)$$

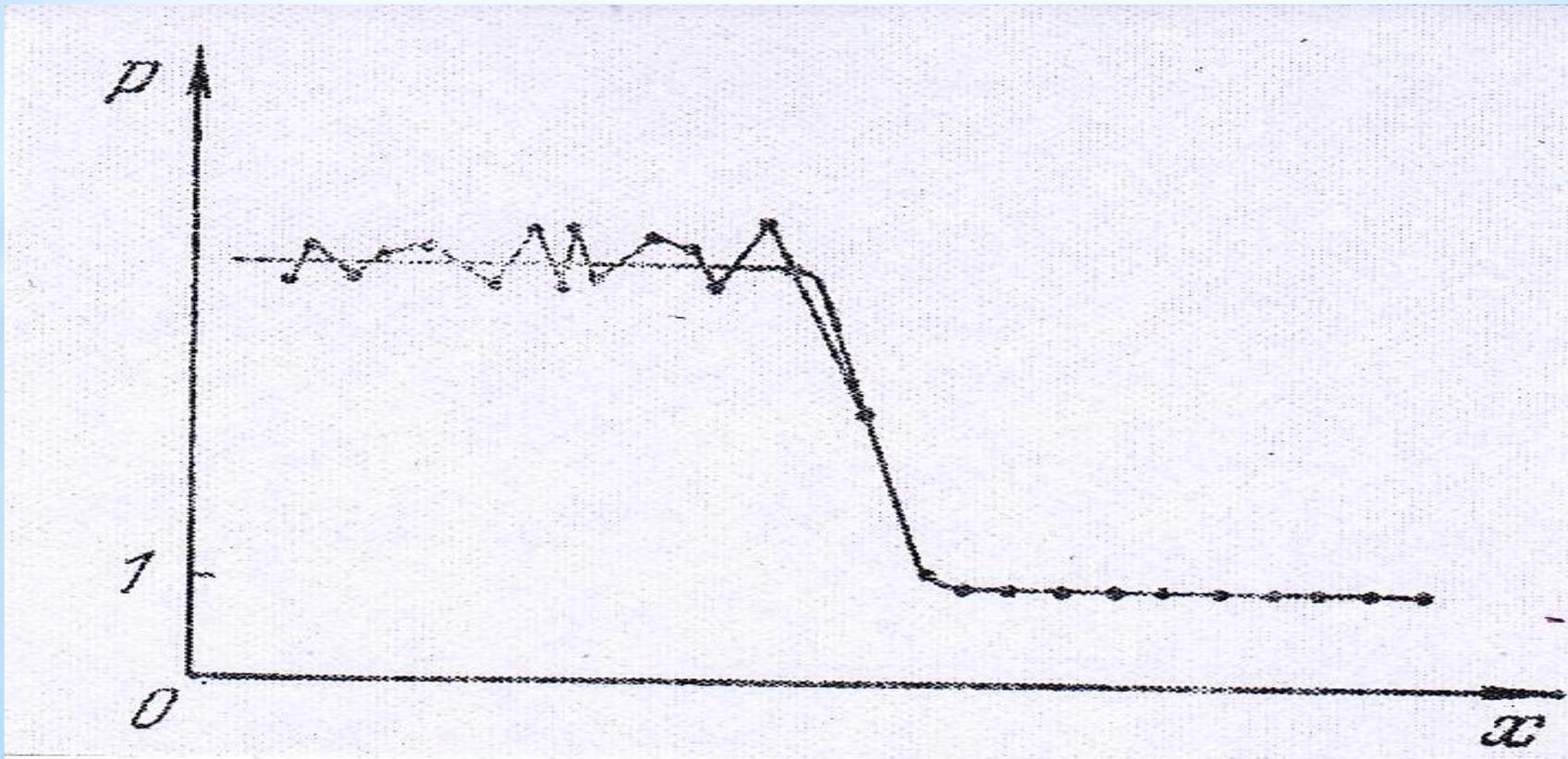
Исследования показали, что ширина ударного перехода для вязкости (3.17) равна:  $l = \pi h \sqrt{2\mu_0 / (\gamma + 1)}$  .

Она имеет порядок  $O(h)$  и не зависит от силы ударной волны.

Вязкий член  $\omega$  имеет в гладкой части течения порядок  $O(h^2)$  и, следовательно, не влияет сильно на точность расчета.



Особенность нелинейной вязкости такова, что терпит разрыв вторая производная. Так как в области ударной волны градиенты всегда велики, то разрыв производных приводит к постоянному источнику возмущений, вызывающих сильные осцилляции гидродинамических величин в окрестности фронта ударной волны. Ее примерный вид следующий:





## Разностная схема Неймана-Рихтмайера - «крест» для системы уравнений газовой динамики с вязкостью.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \varepsilon + u^2 / 2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} (p u) = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = u$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad p = p(\rho, T)$$



Если ввести **вязкость**  $\mu$ , новую переменную  $V = \rho^{-1}$  и заменить  $\tau \rightarrow t$ , то эту систему можно представить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + u^2 / 2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} (\bar{p} u) = 0 \quad (3.20)$$

$$\bar{p} = p + \omega \quad \omega = -\mu \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial s} \quad (3.21)$$



При построении своей разностной схемы **«крест»** Нейман и Рихтмайер, для достижения точности **второго порядка** и во избежание **нежелательной интерполяции**, все рассчитываемые термодинамические величины:  $\rho$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $v = \rho^{-1}$  и скорость  $u$  разнесли по **разным точкам сетки** – **полуцелым** и **целым** соответственно.

Третье уравнение системы (для энергии) они использовали в **недивергентном** виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3.20A)$$

**Разностная схема «крест» имеет вид:**



$$\frac{u_i^{m+1/2} - u_i^{m-1/2}}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+1/2}^m - \bar{p}_{i-1/2}^m}{h} = 0 \quad (3.22)$$

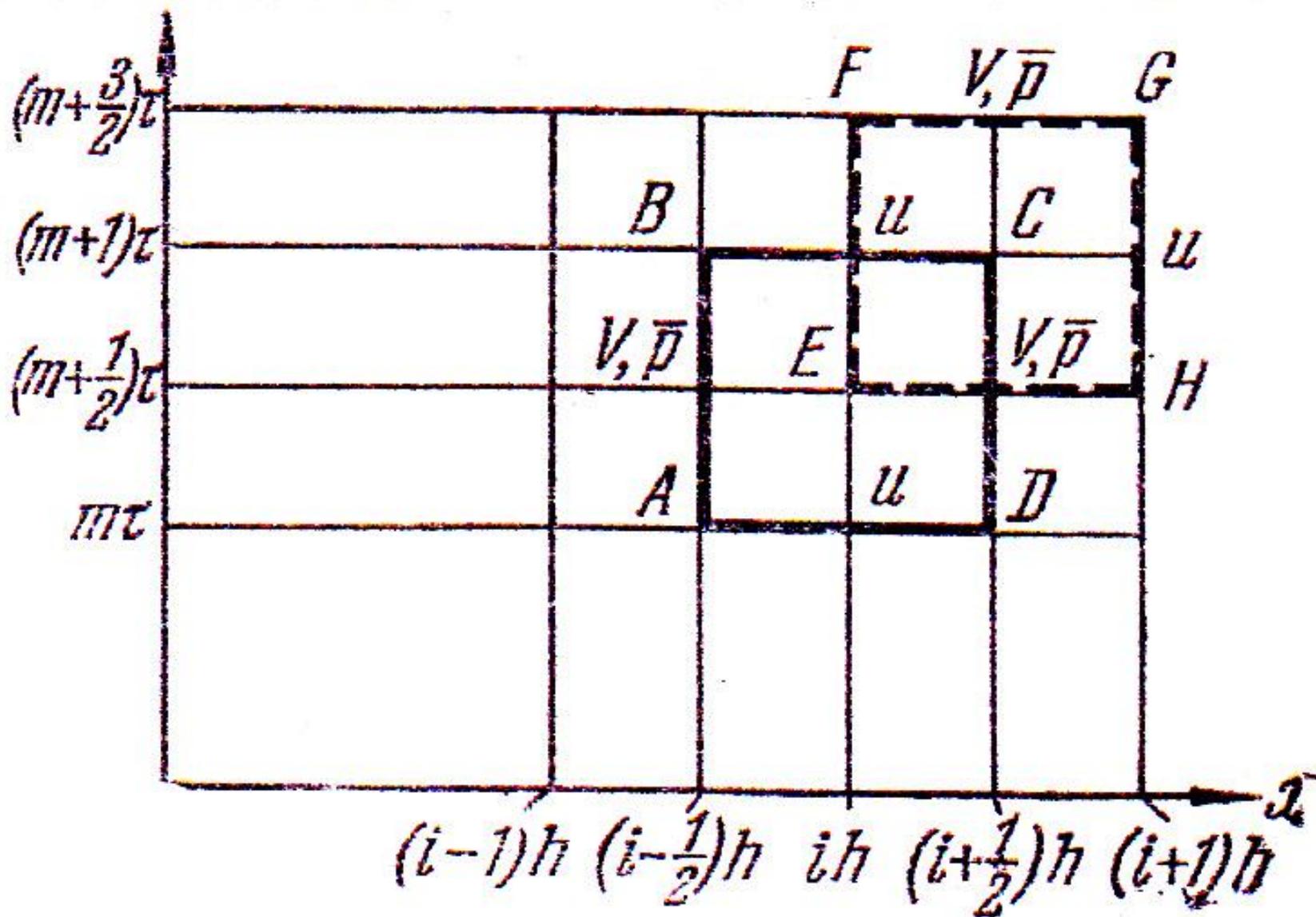
$$\frac{V_{i+1/2}^{m+1} - V_{i+1/2}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+1/2} - u_{i-1}^{m+1/2}}{h} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{m+1} - \varepsilon_{i+1/2}^m}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+1/2}^{m+1} + \bar{p}_{i+1/2}^m}{2} \cdot \frac{V_{i+1/2}^{m+1} - V_{i+1/2}^m}{h} = 0 \quad (3.24)$$

$$\bar{p}_{i+1/2}^m = p_{i+1/2}^m + \omega_{i+1/2}^m \quad (3.25)$$

$$\omega_{i+1/2}^m = -\mu_0 h^2 \rho_{i+1/2}^m \cdot \frac{|u_{i+1}^{m-1/2} - u_i^{m-1/2}|}{h} \cdot \frac{u_{i+1}^{m-1/2} - u_i^{m-1/2}}{h} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{i+1/2}^m = \varepsilon \left( p_{i+1/2}^m, V_{i+1/2}^m \right) \quad (3.27)$$





Если применить сдвиг по временному индексу:

$$u_i^{m+1/2} \rightarrow u_i^{m+1} \quad (3.28)$$

То тогда формулы (3.22), (3.23) и (3.26) принимают вид:

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+1/2}^m - \bar{p}_{i-1/2}^m}{h} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{V_{i+1/2}^{m+1} - V_{i+1/2}^m}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{h} = 0 \quad (3.30)$$

$$\omega_{i+1/2}^m = -\mu_0 h^2 \rho_{i+1/2}^m \cdot \frac{|u_{i+1}^m - u_i^m|}{h} \cdot \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h} \quad (3.31)$$



При произвольном уравнении состояния (3.27)

$$\varepsilon_{i+1/2}^m = \varepsilon \left( p_{i+1/2}^m, v_{i+1/2}^m \right)$$

формула (3.24) 
$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{m+1} - \varepsilon_{i+1/2}^m}{\tau} + \frac{\bar{p}_{i+1/2}^{m+1} + \bar{p}_{i+1/2}^m}{2} \cdot \frac{v_{i+1/2}^{m+1} - v_{i+1/2}^m}{h} = 0$$

требует итераций для определения  $p_{i+1/2}^{m+1}$ . В случае идеального газа формула (3.24) допускает явное разрешение относительно  $p_{i+1/2}^{m+1}$ . Если аппроксимировать не уравнение: (3.20 A)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

а закон сохранения энергии в интегральном виде (3.8), т.е.

$$\oint \left( \varepsilon + u^2 / 2 \right) ds - (\bar{p} u) dt = 0$$

то в расчетах потребуется интерполировать скорость (**плохо!**).



Поскольку в плоском случае в волнах сжатия и ударных волнах выполняется неравенство:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} < 0$$

в то время как для волн разрежения выполняется прямо противоположное условие:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} \geq 0$$

то связи с этим Лэттер предложил следующее выражение для вязкого члена:

$$\omega = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0 \\ -\mu_0 \cdot h^2 \rho \cdot \left| \frac{\Delta u}{\Delta s} \right| \cdot \frac{\Delta u}{\Delta s} = \mu_0 \cdot \rho \cdot (\Delta u)^2, & \Delta u < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$



Указанный прием становится особенно эффективным, если применять в разностном расчете линейную вязкость  $\mu = \mu_0 h$

$$\omega = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0 \\ \mu_0 \cdot h, & \Delta u < 0 \end{cases}$$

Схемы (3.29) - (3.30) с условием для вязкости следующего вида:

$$\omega = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0 \\ -\mu_0 a h \frac{\partial u}{\partial s}, & \Delta u < 0 \end{cases}$$

где  $a$  - скорость звука исследовались А.А. Самарским и В.Я. Арсениным.



## Ю.П. Попов и А.А. Самарский рассмотрели неявную разностную схему с весами.

В случае лагранжевых переменных она имеет вид:

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} + \frac{1}{h} \left[ \left( \alpha_1 \cdot \bar{p}_{i+1/2}^{m+1} + (1 - \alpha_1) \bar{p}_{i+1/2}^m \right) - \left( \alpha_1 \cdot \bar{p}_{i-1/2}^m + (1 - \alpha_1) \bar{p}_{i-1/2}^m \right) \right] = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{x_i^{m+1} - x_i^m}{\tau} = \alpha_2 \cdot u_i^{m+1} + (1 - \alpha_2) u_i^m = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{v_{i+1/2}^{m+1} - v_{i+1/2}^m}{\tau} - \frac{1}{h} \left[ \left( \alpha_3 \cdot u_{i+1}^{m+1} + (1 - \alpha_3) u_{i+1}^m \right) - \left( \alpha_3 \cdot u_i^{m+1} + (1 - \alpha_3) u_i^m \right) \right] = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{i+1/2}^{m+1} - \varepsilon_{i+1/2}^m}{\tau} + \frac{1}{h} \left[ \alpha_5 \cdot \bar{p}_{i+1/2}^{m+1} + (1 - \alpha_5) \bar{p}_{i+1/2}^m \right] \times \\ \times \left[ \alpha_4 \cdot (u_{i+1}^{m+1} - u_i^{m+1}) + (1 - \alpha_4) (u_{i+1}^m - u_i^m) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$



Чтобы уравнение (3.36) в сочетании с (3.33) – (3.35) было эквивалентно аппроксимации на ячейке разностной схемы интегрального закона сохранения энергии необходимо, чтобы

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha, \quad \alpha_5 = 0.5 \quad (3.37)$$

При выполнении этих условий

$$(\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha ; \quad \alpha_3 = \alpha_5 = 0.5)$$

Попов и Самарский назвали схему (3.33) - (3.36)

**полностью консервативной.**



При  $\alpha_i = 0.5$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) схема (3.33) – (3.36) имеет порядок аппроксимации

$$O(\tau^2) + O(h^2)$$

Все остальные схемы этого класса имеют порядок аппроксимации

$$O(\tau) + O(h^2)$$



\*THE END