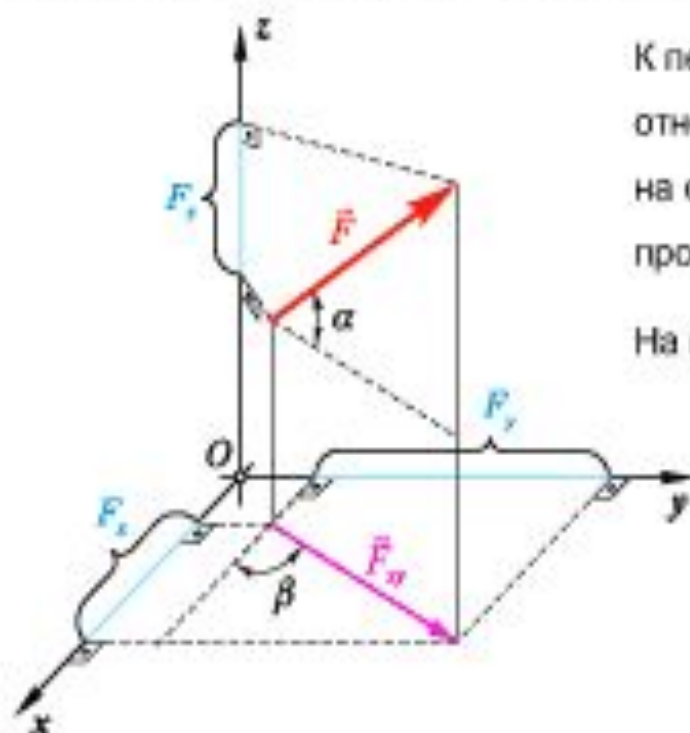


СТАТИКА. Понятие силы

Статика — наука о равновесии материальных объектов относительно каких-то других, изначально считающихся неподвижными (звезды, Солнце, Земля).



К первоначальным, неопределяемым через другие, относится понятие **силы**. Сила — вектор, ее действие на объект характеризуется тремя величинами — проекциями на оси координат.

На практике применяют двойное проецирование:

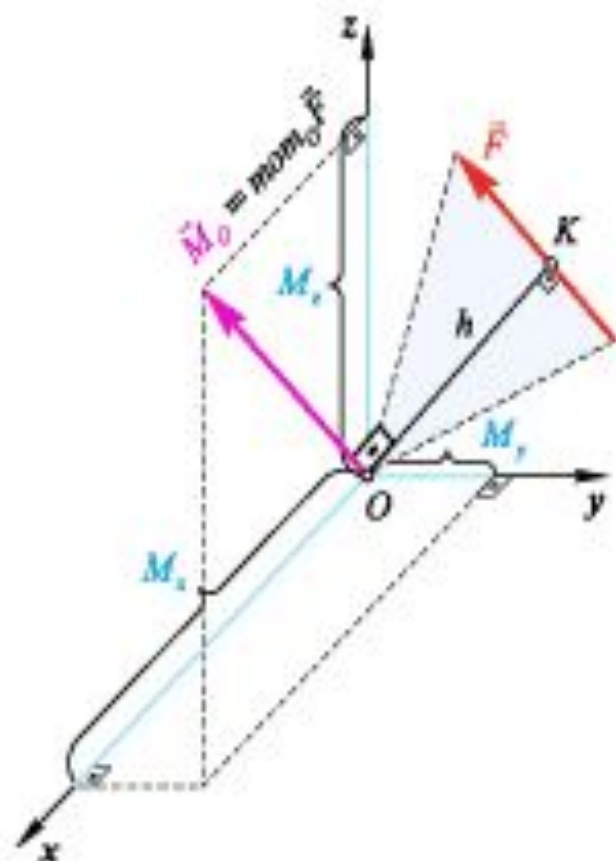
$$F_y = F \cos \alpha, \quad F_x = F_y \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

Размерность силы $[H] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right]$.

Угол β может быть тупым, тогда проекция будет отрицательной величиной



СТАТИКА. Понятие момента силы



Момент силы относительно центра — вектор, перпендикулярный плоскости, образованной силой и центром.

Направлен в сторону, с которой мыслимый поворот плоскости под действием силы видится происходящим против часовой стрелки.

$$|\text{mom}_O \vec{F}| = M_O = h \cdot F.$$

h — плечо силы — длина перпендикуляра OK .

Проекция момента силы относительно центра на ось, содержащую этот центр, называется моментом силы относительно оси:

$$M_x = (\vec{M}_O)_x; \quad M_y = (\vec{M}_O)_y; \quad M_z = (\vec{M}_O)_z.$$

СТАТИКА. Понятие пары сил

Приводится в условиях задач как отдельное понятие.

Пару сил представляют в виде двух сил, приложенных к твердому телу, равных по величине, и противоположно направленных. Расстояние между линиями действия сил пары — ее плечо.

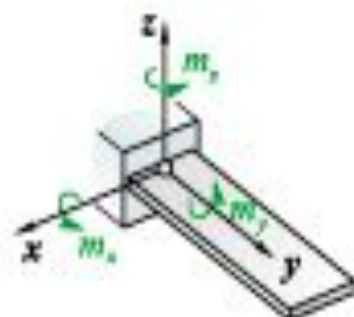
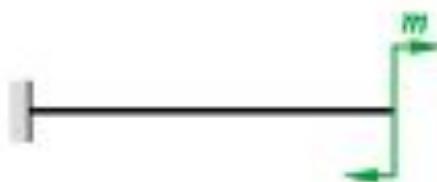


Суммарный момент сил, составляющих пару, **одинаков** относительно любого центра.

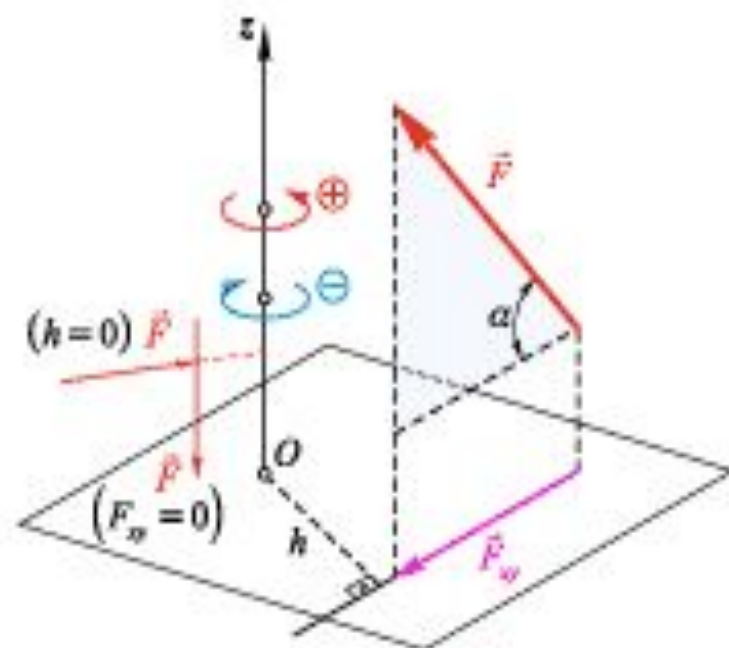
Сумма проекций сил пары на любую ось равна **нулю**.

Поэтому действие пары сил на тело характеризуется только ее моментом, модуль которого $M = F \cdot h$.

Условные обозначения



СТАТИКА. Вычисление момента силы относительно оси



Осуществляется проецированием **силы** на плоскость, перпендикулярную этой оси и умножением величины полученного таким образом направленного отрезка на длину перпендикуляра, опущенного из точки пересечения оси и плоскости на линию действия отрезка:

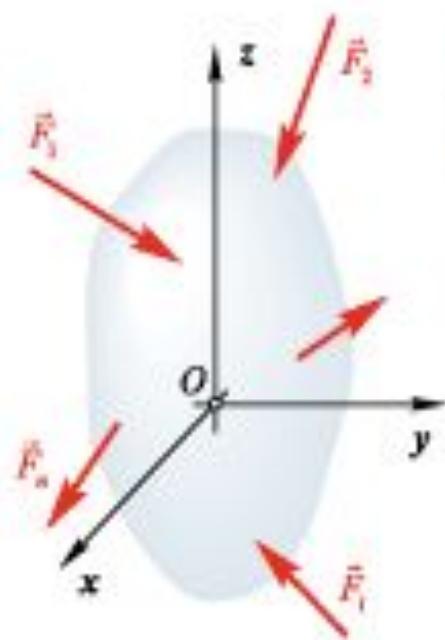
$$M_z = \pm F_{\perp} \cdot h; \quad h — \text{плечо силы.}$$

Правило знаков усматривается из рисунка.

Если ось и сила составляют одну плоскость, то момент силы относительно оси равен нулю. В этом случае либо $h = 0$, либо $F_{\perp} = 0$.

$$M_z(\vec{F}) = 0.$$

СТАТИКА. Уравнения равновесия



Уравнения равновесия отражают сущность самого равновесия, покоя абсолютно твердого тела (АТТ).

АТТ — совокупность точек, расстояния между которыми неизменны.

Находится в покое произвольная точка O :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1)$$

Тело не поворачивается вокруг этой точки:

$$\sum \text{мом}_O \vec{F}_i = 0. \quad (2)$$

Уравнения равновесия — проекции равенств (1) и (2) на оси:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \\ \sum \text{мом}_x \vec{F}_i = 0; \quad \sum \text{мом}_y \vec{F}_i = 0; \quad \sum \text{мом}_z \vec{F}_i = 0. \end{aligned}$$

Для равновесия абсолютно твердого тела необходимо и достаточно равенства нулю суммы проекций на какие-либо оси всех сил, на него действующих, а также равенства нулю суммы моментов этих сил относительно таких же осей.

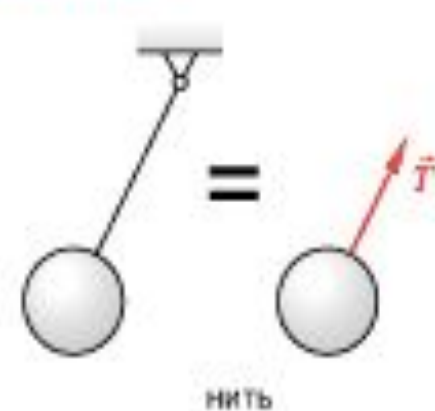
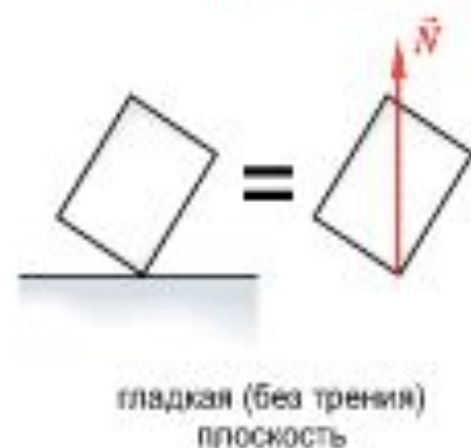
СТАТИКА. Аксиома освобождения от связей

Какие либо устройства, ограничивающие движение тел и материальных точек называются **связями**.

Равновесие механической системы не изменится, если действие на нее связей заменить силами — реакциями связей.

Связи классифицируют по числу ограничений, накладываемых на движение материальных точек и твердых тел. Каждому из таких ограничений соответствует составляющая реакции связи.

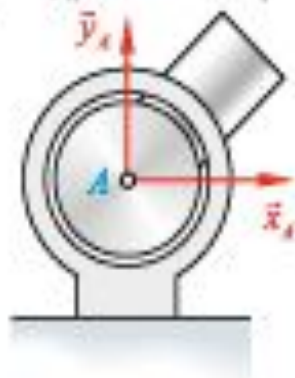
Связи I-го рода — направление реакции заранее известно



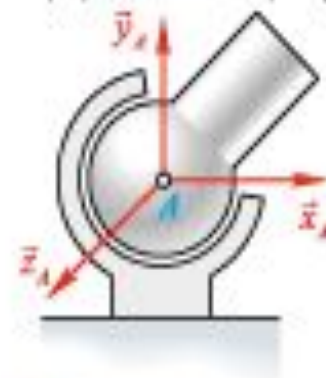
СТАТИКА. Аксиома освобождаемости от связей (продолжение)

Связи II-го рода — шарниры

цилиндрический шарнир



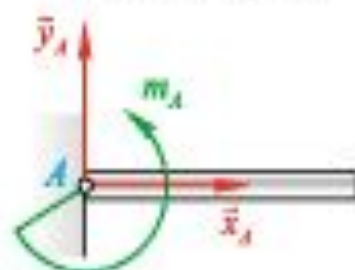
сферический шарнир



Запрещают перемещение точки твердого тела

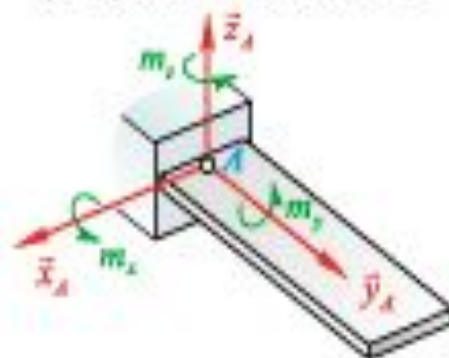
Связь III-го рода — заделка

плоская заделка



Силы по условию задачи можно расположить в одной плоскости

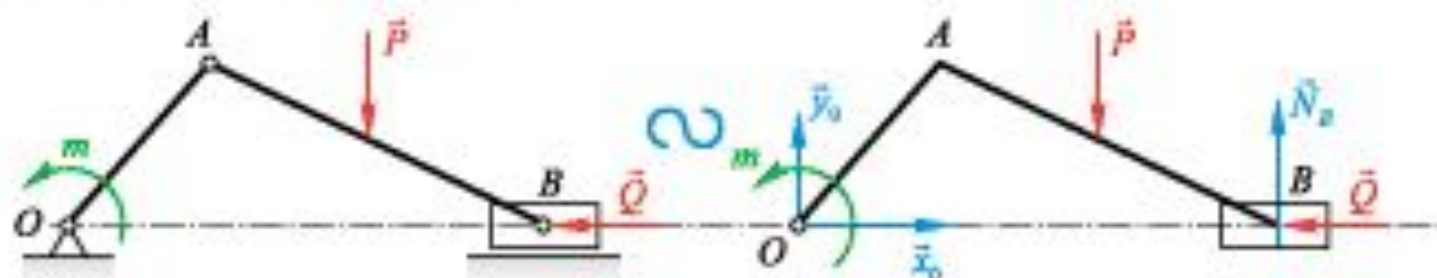
пространственная заделка



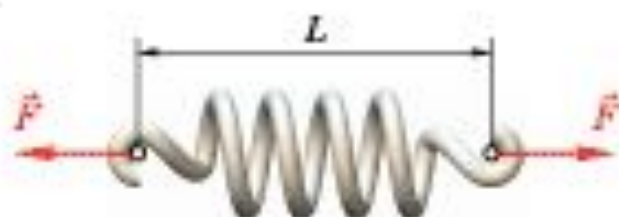
Решение задачи производится при произвольном расположении сил в пространстве

СТАТИКА. Аксиома затвердевания

Равновесие геометрически изменяемой механической системы не изменится, если представить ее затвердевшей.



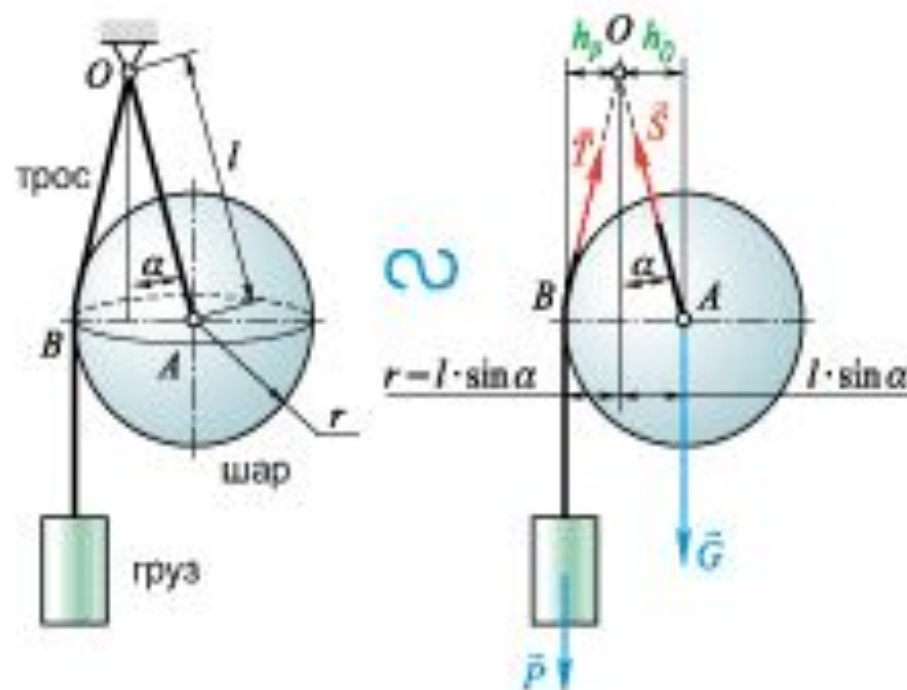
Уравнения равновесия А.Т.Т. остаются необходимыми для любой системы, но уже не являются достаточными.



Пружина находится в равновесии при единственном соотношении длины L и величины сил F . Во всех остальных случаях точки пружины перемещаются в пространстве. А.Т.Т. под действием двух сил, направленных вдоль одной прямой, равных по величине, но противоположных по направлению находится в равновесии **всегда**.

СТАТИКА. Равновесие механической системы

Аксиомы «затвердевания» и «действия – противодействия» позволяют рассматривать равновесие механической системы как единого целого.



Определить угол α при заданных весах шара G и груза P .

Решение.

Рассмотрим равновесие шара, прилегающего к нему троса и груза.

Заданные силы: \vec{P} и \vec{G} .

Связи: трос OA — реакция \vec{S} ;
трос OB — реакция \vec{T} .

$$(\vec{P}; \vec{G}; \vec{T}; \vec{S}) \llcorner 0.$$

$$\sum \text{мом}_O \vec{F} = 0 = P(r - l \cdot \sin \alpha) - G \cdot l \cdot \sin \alpha;$$

$$P \cdot r = l \cdot \sin \alpha (G + P); \quad \sin \alpha = \frac{P}{P + G} \cdot \frac{r}{l}.$$

СТАТИКА. Аксиома действия и противодействия

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными по прямой, соединяющей эти точки.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Силы взаимодействия между телами и точками, образующими механическую систему, называются внутренними.

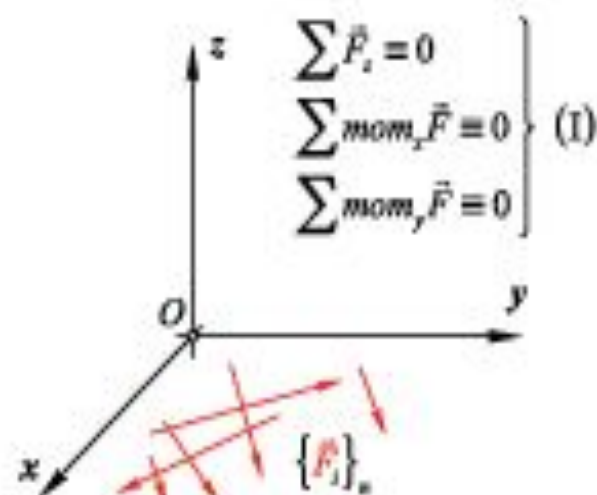
Сумма проекций внутренних сил на любую ось равна нулю.

Сумма моментов внутренних сил равна нулю относительно любого центра.

Для любой внутренней силы найдется другая, парная, такая что:

$$-F_{BA} \cos \alpha = F_{AB} \cos \alpha; \quad -F_{BA} \cdot h_{BA} = F_{AB} \cdot h_{AB};$$

СТАТИКА. Плоская система сил



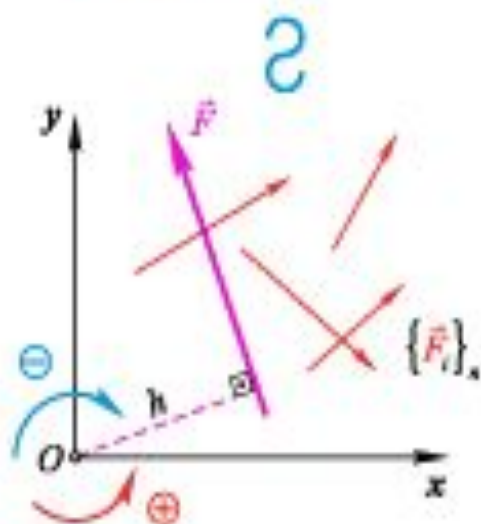
Пусть система сил располагается в плоскости xOy .

Тогда уравнения равновесия (I) выполняются

тождественно, то есть в виде $0 \equiv 0$.

Независимых уравнений остается только три:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum \text{mom}_z \vec{F}^i = 0.$$



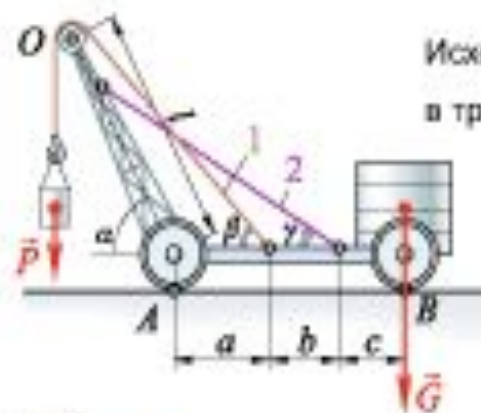
Вводится понятие алгебраического момента силы относительно центра.

Момент силы относительно центра есть произведение модуля силы на ее плечо — длину перпендикуляра, опущенного из центра на линию действия силы.

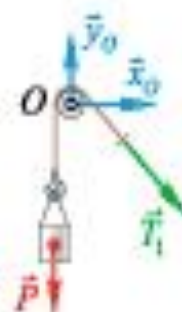
$$M_O = \pm F \cdot h.$$

Правило знаков усматривается из рисунка.

СТАТИКА. Плоская система сил. Силы внешние и внутренние. Пример



Исходя из схемы передвижного подъемного крана определить усилия в тросах 1 и 2 ($T_1; T_2$) и реакции опор A и B при весах груза \vec{P} и противовеса \vec{G} .



I. Рассмотрим равновесие груза, блока O и соединяющего их троса:

$$(\vec{P}, \vec{T}_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0) \in 0;$$

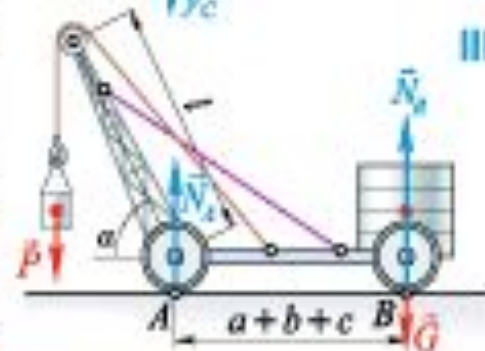
$$\sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 \Rightarrow P \cdot r - T_1 \cdot r = 0 \Rightarrow T_1 = P.$$



II. Рассмотрим равновесие стрелы крана CO , груза, блока и прилегающих частей тросов:

$$(\vec{P}, \vec{x}_C; \vec{y}_C; \vec{T}_1; \vec{T}_2) \in 0; \text{ Считаем, что } l \gg r; \sum \text{mom}_C \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P l \cos \alpha - T_1 a \sin \beta - T_2 (a+b) \sin \gamma = 0; \quad T_2 = P \frac{l \cos \alpha - a \sin \beta}{(a+b) \sin \beta}.$$



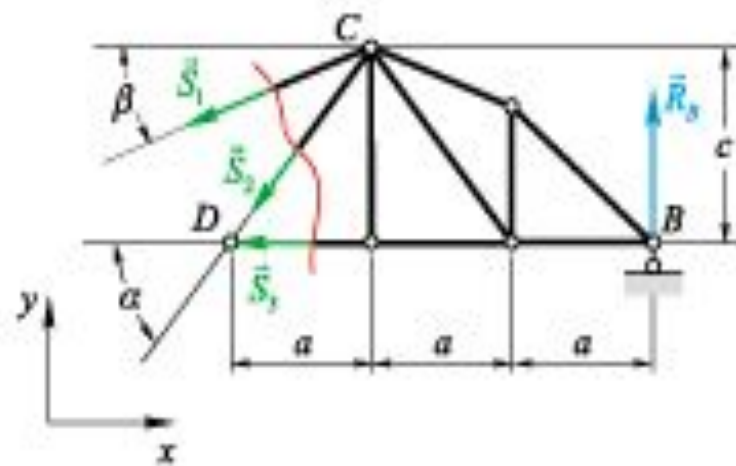
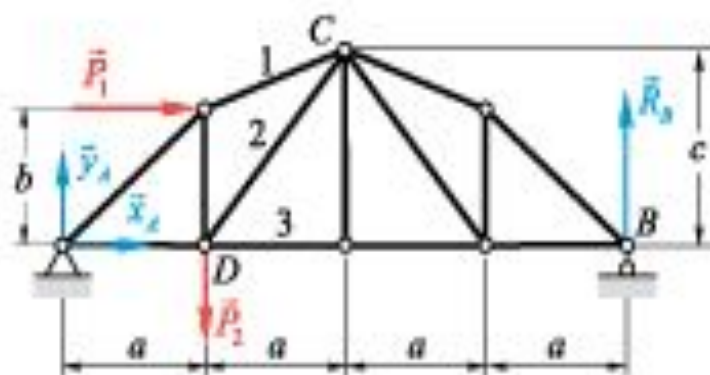
III. Рассмотрим равновесие крана с грузом: $(\vec{P}; \vec{G}; \vec{N}_A; \vec{N}_B) \in 0.$

$$\begin{cases} \sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 \Rightarrow P(a+b+c+l \cos \alpha) - N_A(a+b+c) = 0; \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_B - P - G = 0. \end{cases}$$

$$N_A = P \frac{a+b+c+l \cos \alpha}{a+b+c}; \quad N_B = G - P \frac{l \cos \alpha}{a+b+c}, \text{ требуется, чтобы } N_B > 0.$$

СТАТИКА. Метод Риттера

Метод Риттера позволяет определить усилия в невесомых стержнях, образующих ферму — конструкцию, нагрузки на которую состоят из сосредоточенных сил, действующих в шарнирах крепления стержней друг к другу.



В статически определимых фермах всегда есть поперечные сечения стержней, в которых усилия найдутся из уравнений равновесия.

Из равновесия всей фермы:

$$(\bar{P}_1; \bar{P}_2; \bar{x}_A; \bar{y}_A; \bar{R}_y) \infty 0;$$

$$\sum \text{mom}_x \bar{F} = 0 = P_2 a + P_1 b - R_y \cdot 4a; \quad R_y = \frac{P_1 a + P_2 b}{4a}.$$

Из равновесия отсеченной части:

$$(\bar{S}_1; \bar{S}_2; \bar{S}_3; \bar{R}_y) \infty 0;$$

$$\sum \text{mom}_C \bar{F} = R_y \cdot 2a - S_2 c = 0;$$

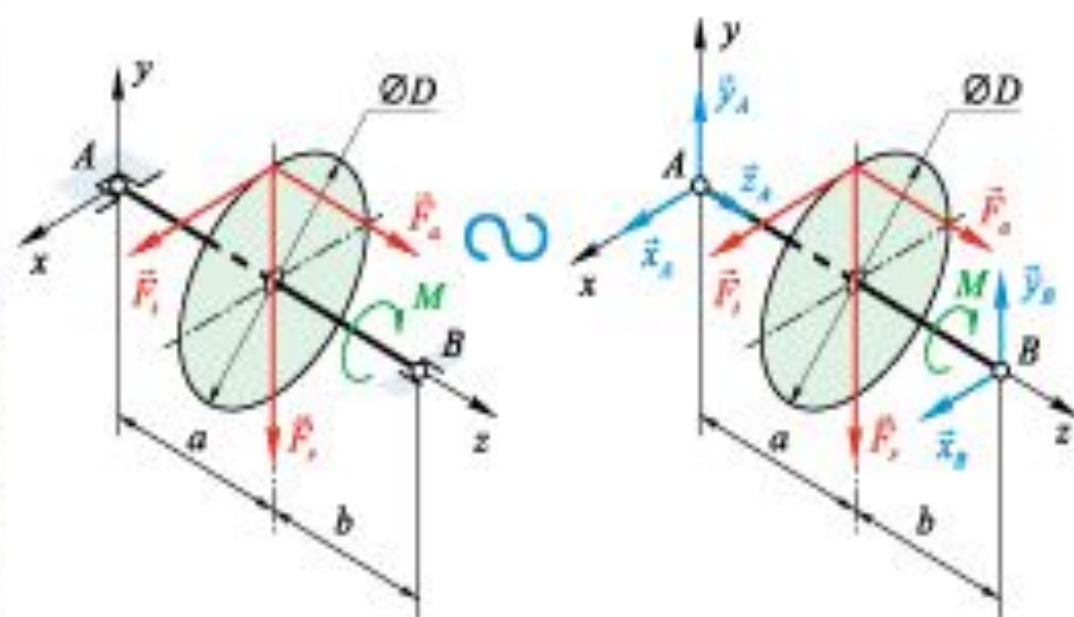
$$\sum \text{mom}_D \bar{F} = R_y \cdot 3a + S_2 c \cdot \cos \beta = 0;$$

$$\sum F_y = S_1 \cos \beta + S_2 \cos \alpha = 0.$$

Система уравнений замкнутая.

$$\alpha = \arctg \frac{c}{a}; \quad \beta = \arctg \frac{c-b}{a}.$$

СТАТИКА. Пространственная система сил. Пример



Зубчатое колесо насажено на вал, на который действует пара сил с моментом M .

Определить реакции на вал подпятника A и подшипника B .

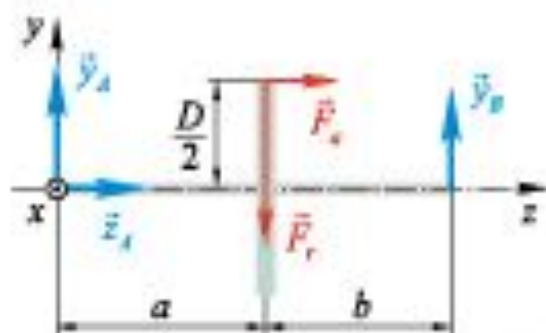
$\vec{F}_1 \parallel x$; $\vec{F}_2 \parallel y$; $\vec{F}_3 \parallel z$.

F_4, F_5 определяются через F_1 ,
(будет рассмотрено в разделе
"Детали машин".)

1. Рассмотрим равновесие вала с колесом.
2. Заданные силы: $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; M$.
3. Связи: подпятник A (реакции $\vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A$); подшипник B ($\vec{x}_B; \vec{y}_B$).
4. $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; M; \vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A; \vec{x}_B; \vec{y}_B) \approx 0$.

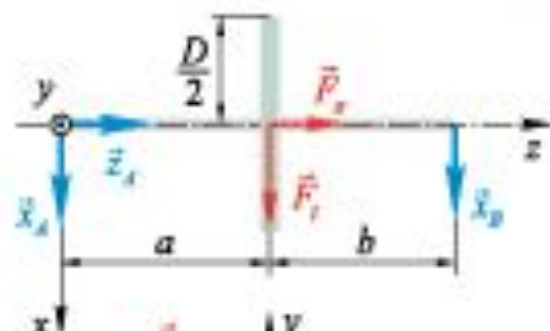
СТАТИКА. Пространственная система сил. Продолжение примера

5. Уравнения равновесия:



$$\sum F_y = 0 = -F_r + y_A + y_B; \quad y_A = F_r - y_B$$

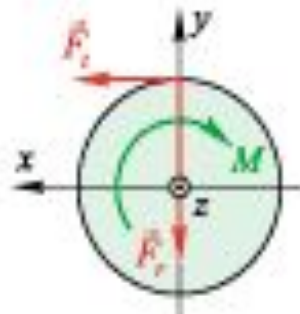
$$\sum \text{mom}_z \vec{F} = 0 = -\bar{F}_r \frac{D}{2} - F_r \cdot a + y_B (a+b); \quad y_B = \frac{F_r \frac{D}{2} + F_r \cdot a}{a+b}$$



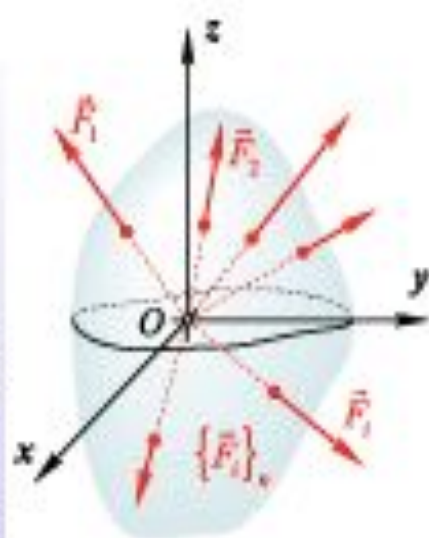
$$\sum F_x = 0 = F_r + x_A + x_B; \quad x_A = F_r - x_B$$

$$\sum \text{mom}_z \vec{F} = 0 = -F_r \cdot a - x_B (a+b); \quad x_B = -F_r \frac{a}{a+b}$$

$$\sum F_z = F_s + z_A; \quad z_A = F_s$$



$$\sum \text{mom}_z \vec{F} = 0 = -M + F_r \cdot \frac{D}{2}; \quad F_r = \frac{2M}{D}$$



СТАТИКА. Сходящаяся система сил

В такой системе линии действия сил пересекаются в одной точке.

Тождественно выполняются (типа $0=0$) уравнения равновесия:

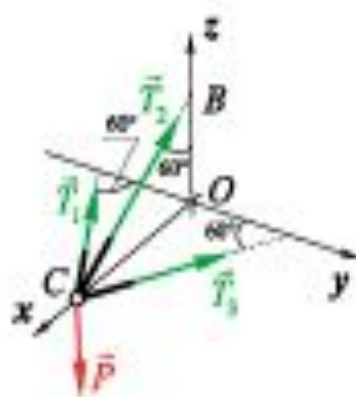
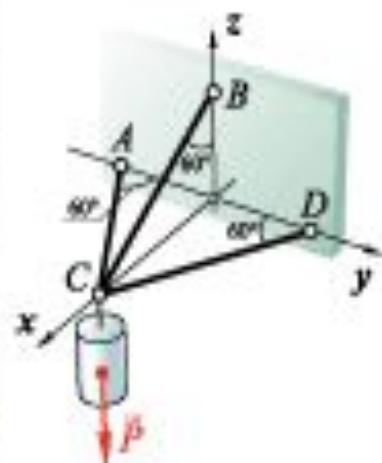
$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_O \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_y \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_i = 0.$$

Для определения реакций связей остаются только три уравнения:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0.$$

Пример. Определить усилия в стержнях, удерживающих груз весом \vec{P} .

Рассмотрим равновесие болта шарнира C: $(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{T}_2; \vec{T}_3) \Leftrightarrow 0$.



$$\sum F_z = 0 = -T_1 \sin 60^\circ - T_2 \sin 60^\circ - T_3 \sin 60^\circ;$$

$$\sum F_y = 0 = -T_1 \cos 60^\circ + T_3 \cos 60^\circ;$$

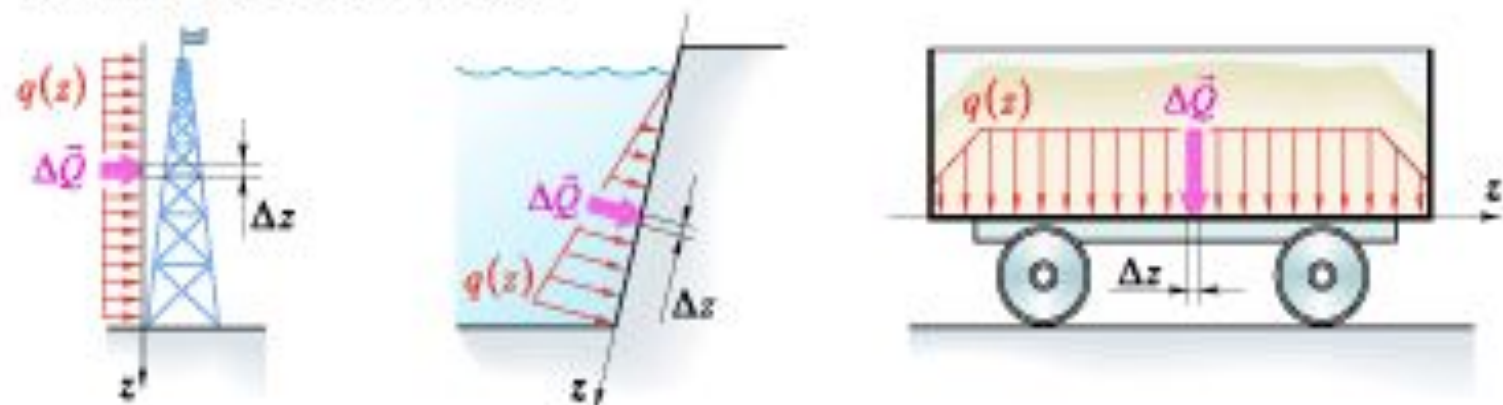
$$\sum F_x = 0 = -P + T_2 \cos 60^\circ.$$

$$T_2 = 2P; \quad T_1 = T_3 = \frac{1}{2} T_2 = -P.$$

T_i — силы, с которыми стержни растягиваются (+) или сжимаются (-).

СТАТИКА. Распределенные нагрузки

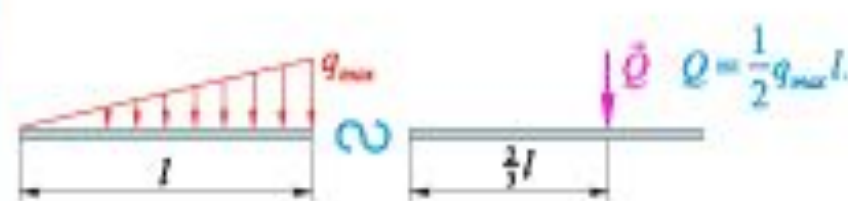
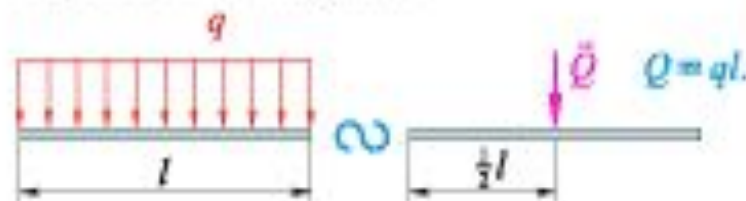
Распределенные нагрузки возникают, если площадь контакта взаимодействующих тел соизмерима с площадью их поверхности (ветровая нагрузка, давление воды на плотину, насыпной груз в вагоне и т. д.).



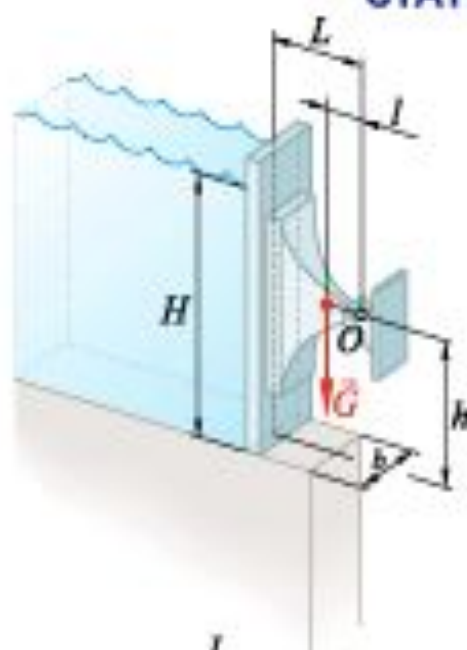
Распределенные нагрузки задаются интенсивностью. При плоской нагрузке:

$$q(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta z} = \frac{dQ}{dz}; \quad \Delta Q \text{ — нагрузка, приходящаяся на участок } \Delta z \text{ с координатой } z.$$

В простейших случаях:



СТАТИКА. Распределенные нагрузки. Пример



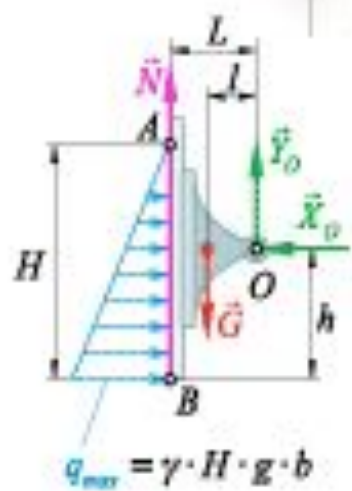
Определить усилие в шарнире O затвора плотины весом G .

Давление p в жидкости определяется глубиной и одинаково по всем направлениям. Давление равно весу столба жидкости единичной площади в основании, и высотой равной глубине:

$$p_A = 0; \quad p_B = \gamma \cdot H \cdot g; \quad \gamma \text{ — удельная масса воды.}$$

Рассмотрим равновесие затвора:

$$(\vec{G}; \vec{Q}; \vec{X}_O; \vec{Y}_O; \vec{N}) \approx 0.$$

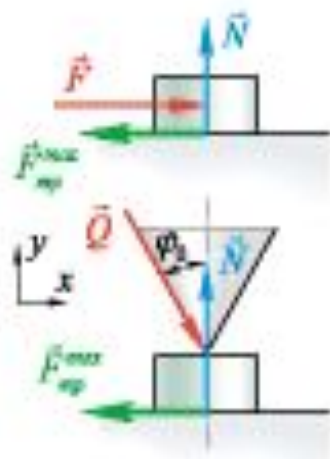


$$(*) \begin{cases} \sum F_x = 0 = Q - X_O; \\ \sum F_y = 0 = -G + N + Y_O; \\ \sum \text{мом}_O \vec{F} = 0 = N \cdot L - G \cdot l - Q \left(h - \frac{1}{3} H \right). \end{cases}$$

Система уравнений (*) — замкнутая, состоит из трех уравнений с тремя неизвестными: N ; X_O ; Y_O .

СТАТИКА. Трение

Трение скольжения возникает при попытке «сдвинуть» одно тело относительно другого; появляется сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{сп}}$.



Тело передвинется, если только $F \geq F_{\text{сп}}^{\text{max}}$; $F_{\text{сп}}^{\text{max}} = f \cdot N$;

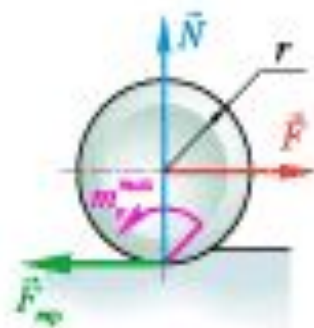
f — коэффициент трения скольжения.

Из равновесия тела $(\vec{Q}; \vec{N}; \vec{F}_{\text{сп}}^{\text{max}}) \Leftrightarrow 0$.

$$\sum F_y = 0 = -Q \cos \varphi_0 + N; \quad \sum F_x = 0 = Q \sin \varphi_0 - F_{\text{сп}}^{\text{max}} = 0.$$

Тело может сдвинуться, если $\operatorname{tg} \varphi_0 \geq f$. φ — угол трения; $\varphi = \operatorname{arctg} f$.

Трение качения возникает при попытке «перекатить» друг относительно друга тела с криволинейной поверхностью; появляется пара трения качения с моментом m_x .

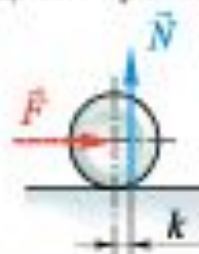


Колесо покатится, если только

$F \cdot r \geq m_x^{\text{max}}$; $m_x^{\text{max}} = k \cdot N$; k — коэффициент трения качения.

Минимальная сила $F = \frac{k \cdot N}{r}$.

Чем больше радиус r —
— тем меньше сила F .



k — размерная величина [м]

СТАТИКА. Центр тяжести

Центр тяжести — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в **любом** положении.

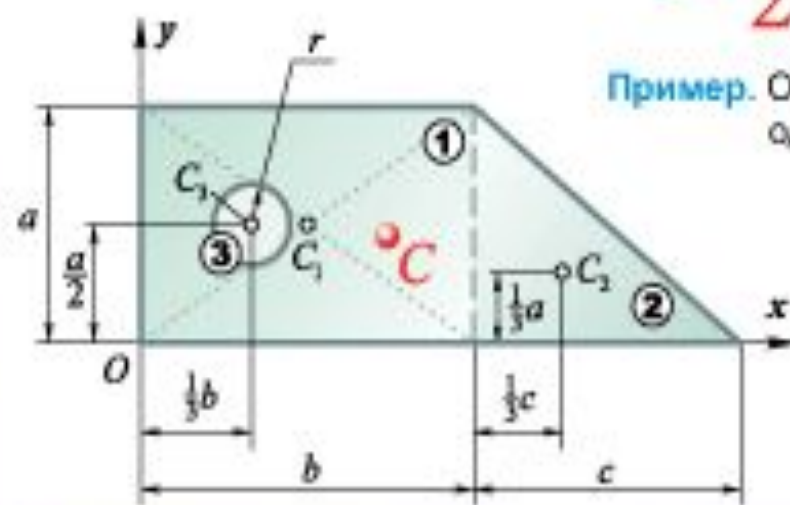
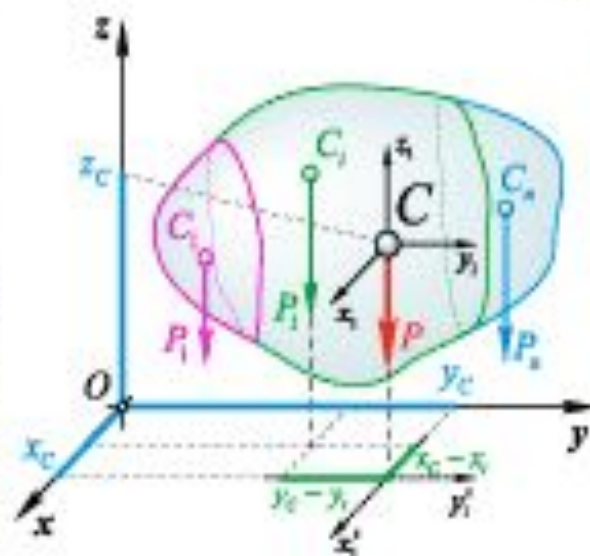
Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в **любом** положении тела:

$$\sum_i \text{мом}_{x_i} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (x_c - x_i) = 0$$

$$\sum_i \text{мом}_{y_i} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (y_c - y_i) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии} \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



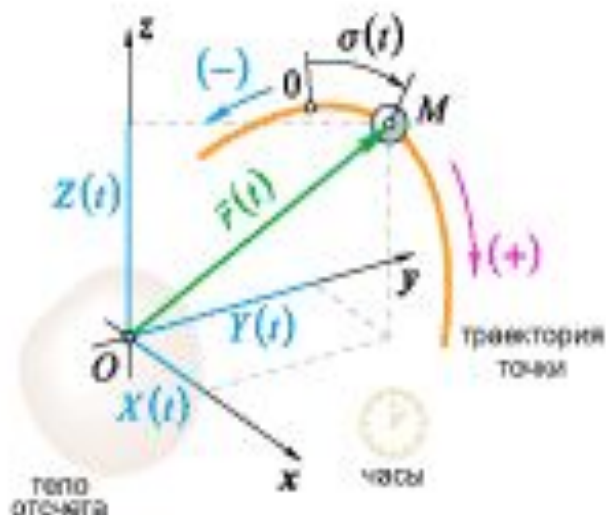
Пример. Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса r .

$$x_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} a c \left(b + \frac{c}{3} \right) - \pi r^2 \cdot \frac{b}{3}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2};$$

$$y_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \frac{a}{3} - \pi r^2 \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2}.$$

Площадь круга как отверстия взята со знаком «-».

Кинематика. Система отсчета. Кинематика точки

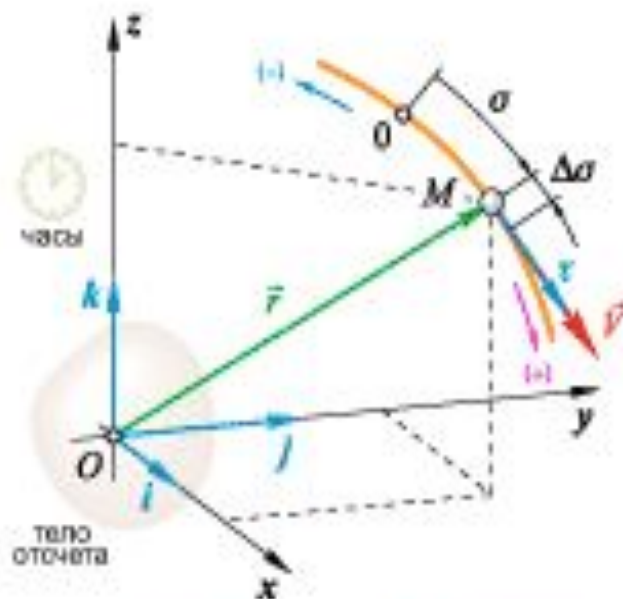


Движение представимо только в какой-то **системе отсчета** — совокупности твердого тела, системы координат и часов.

Движение точки — изменение с течением времени ее координат. Способы задания движения точки:

1. $\vec{r} = \vec{R}(t)$ — закон движения точки при **векторном** способе задания ее движения.
2. $x = X(t), y = Y(t), z = Z(t)$ — закон движения точки при **координатном** способе задания движения.
3. **Естественный** способ задания движения точки. **Траектория** — геометрическое место точек пространства, в которых во время движения пребывает материальная точка.
Дуговая координата — отсчитываемое в соответствии с правилом знаков расстояние по траектории между точкой, принятой за начальную, и материальной точкой;
 $\sigma = \sigma(t)$ — закон движения точки по траектории.

Кинематика. Скорость точки



По определению: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

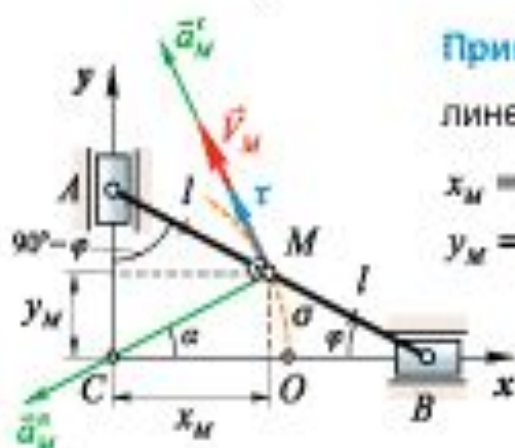
В проекциях на координатные оси:

$$\vec{v} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}.$$

При естественном способе задания движения точки проекция скорости на касательную к траектории τ определяется

$$V_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma(t)}{dt}; \quad \vec{v} = V_\tau \cdot \tau.$$

τ направлен в сторону возрастания дуговых координат.



Пример. Определить траекторию и скорость т. M , лежащей по середине линейки AB .

$\left. \begin{aligned} x_M &= l \cos \varphi \\ y_M &= l \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = l^2$; траектория — дуга окружности с центром в т. C , радиусом l .

$$CM = \text{const} = l; \quad \alpha = \varphi. \quad \vec{OM} = \sigma(t) = l\varphi(t). \quad V_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = l\dot{\varphi}.$$

Кинематика. Ускорение точки



По определению: $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

В проекциях на оси: $\vec{a} = i \frac{d^2 x}{dt^2} + j \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{d^2 z}{dt^2} = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\ddot{z}$.

Ускорение точки находится в соприкасающейся к траектории плоскости. Соприкасающаяся плоскость проводится через три точки траектории, стремящихся слиться в одну, совпадающую по положению с материальной точкой. Орт n направлен в сторону вогнутости траектории. $\tau \perp n \perp b$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n;$$

$$a_t = \frac{dV_t}{dt} \quad \text{— проекция ускорения на орт } \tau \text{ (касательное ускорение);}$$

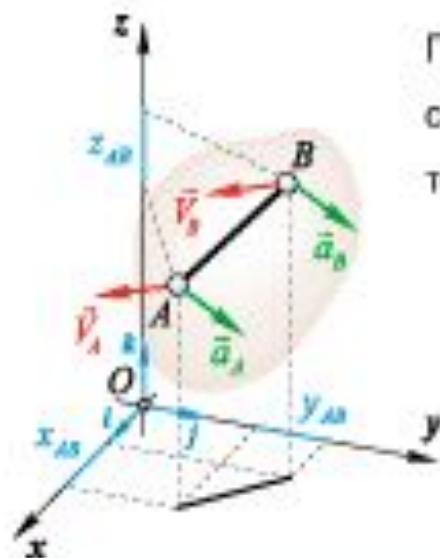
$$a_n = \frac{dV^2}{\rho} \quad \text{— проекция ускорения на орт } n \text{ (нормальное ускорение);}$$

$$a_b = 0.$$

ρ — радиус кривизны траектории в точке M .

В ранее представленной задаче: $a'_M = \frac{dV_t}{dt} = \frac{d}{dt}(l\dot{\varphi}) = l\ddot{\varphi}$; $a''_M = \frac{(l\dot{\varphi})^2}{l} = l\dot{\varphi}^2$.

Кинематика. Поступательное движение твердого тела



Поступательное движение твердого тела — движение в какой-либо системе отсчета, при котором любая прямая, состоящая из точек тела, остается **параллельной** самой себе.

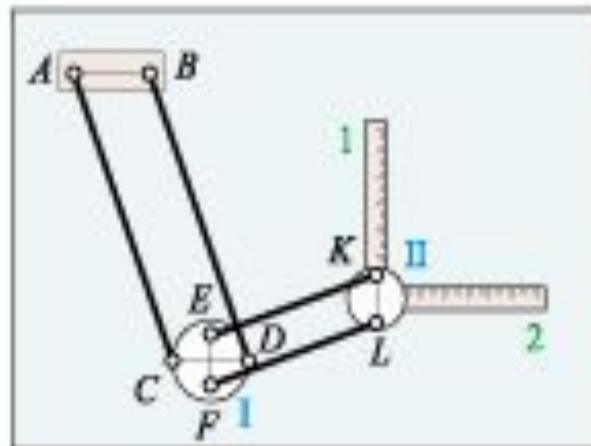
Пусть AB — произвольная прямая.

Тогда величины x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} — постоянны.

$$\dot{x}_{AB} = \dot{x}_A - \dot{x}_B = 0 \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{x}_B$$

То есть: $\vec{V}_A = i\dot{x}_A + j\dot{y}_A + k\dot{z}_A = \vec{V}_B = i\dot{x}_B + j\dot{y}_B + k\dot{z}_B$.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B \text{ всегда, поэтому } \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$



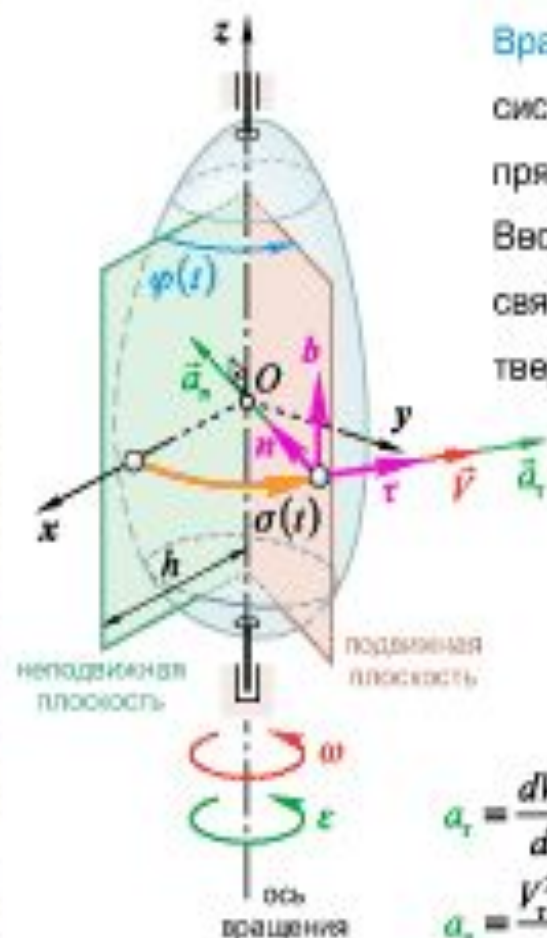
Пример. Механизм чертежного прибора («кульмана»).

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \Rightarrow CD \parallel AB \text{ — всегда!} \\ EF \perp CD, \quad KL \parallel EF \text{ — всегда!} \end{array} \right\} KL \perp AB.$$

Кронштейны I и II, линейки 1, 2 движутся **поступательно**.

Траектории точек линеек — любые плоские кривые.

Кинематика. Вращательное движение твердого тела



Вращательное движение твердого тела — движение в какой-либо системе отсчета, при котором существует проведенная в теле прямая, точки которой остаются неподвижными (ось вращения). Вводятся пересекающиеся по оси плоскости: неподвижная, жестко связанная с системой отсчета и подвижная, фиксированная в твердом теле.

φ — угол поворота тела; $\varphi(t)$ — закон вращения.

Траектории точек — окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения.

$$\sigma(t) = h \cdot \varphi(t).$$

$V_t = \dot{\sigma} = h \cdot \dot{\varphi}(t)$; $\omega = \dot{\varphi}(t)$ — угловая скорость, $V = h \cdot \omega$.

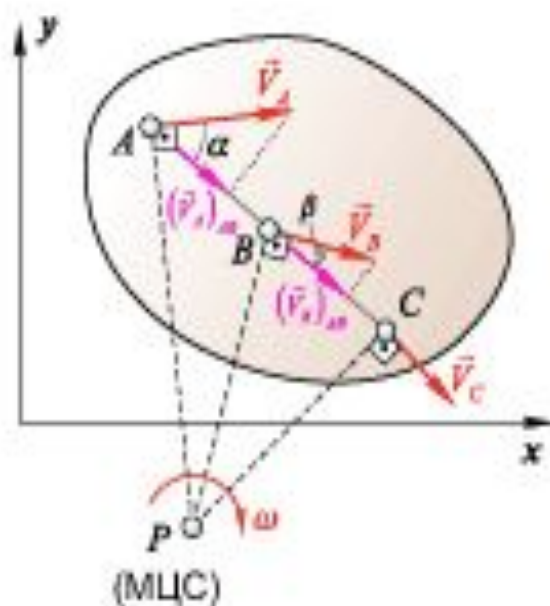
h — расстояние от точки до оси вращения.

$a_t = \frac{dV_t}{dt} = \dot{\varphi} \cdot h$ — касательное ускорение; $\varepsilon = \dot{\varphi}$ — угловое ускорение.

$a_n = \frac{V_t^2}{\rho} = \frac{(h \cdot \dot{\varphi})^2}{h} = h \cdot \dot{\varphi}^2$ — нормальное ускорение, направлено к оси вращения, по перпендикуляру к ней.

$$a_t = \varepsilon \cdot h \quad a_n = \omega^2 h$$

Кинематика. Плоское движение твердого тела



Плоское движение твердого тела представляется движением плоского сечения этого тела по неподвижной плоскости.

По определению твердого тела длина отрезка AB — неизменна. Поэтому $(\vec{v}_A)_{AB} = (\vec{v}_B)_{AB}$

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta.$$

Пусть перпендикуляры к скоростям пересеклись в данный момент времени в точке P .

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}_P)_{AP} &= V_A \cos 90^\circ = 0 \\ (\vec{v}_P)_{BP} &= V_B \cos 90^\circ = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_P = 0 \Rightarrow P \text{ — мгновенный центр скоростей.}$$

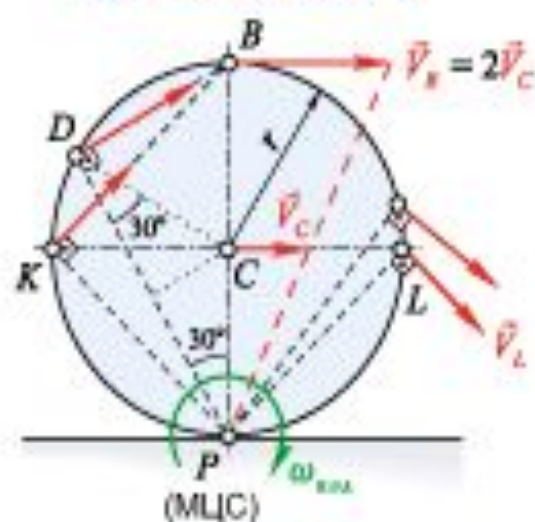
Поле («картинка») скоростей аналогичны вращательному движению. ω — угловая скорость тела.

$$\omega = \frac{V_A}{AP}; \quad V_C = \omega \cdot PC.$$

Если перпендикуляры не пересекаются, то поле скоростей аналогично поступательному движению: $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ поэтому $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (в данный момент времени).

Кинематика. Плоское движение твердого тела. Примеры

Движения колеса без проскальзывания



$V_P = 0$; P — мгновенный центр скоростей колеса.

$$\omega_{\text{кол}} = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{r}$$

$$V_D = \omega_{\text{кол}} \cdot PD = \frac{V_C}{r} \cdot 2r \cdot \cos 30^\circ = \frac{V_C}{r} \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$V_D = V_C \sqrt{3}.$$

$$V_L = V_K = \frac{V_C}{r} \cdot r\sqrt{2} = V_C \sqrt{2}.$$

Кривошипно-шатунный механизм

Положение I

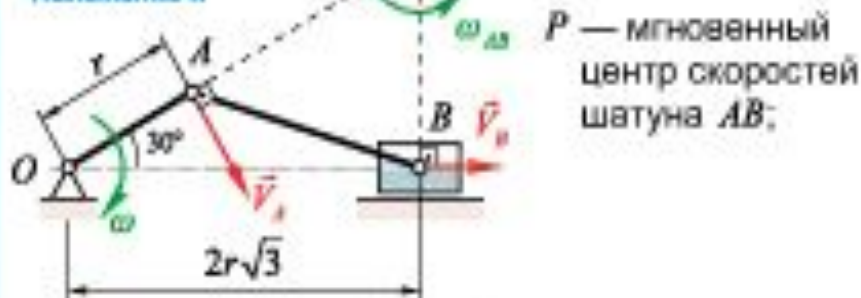


Точка P находится в бесконечности. В данном положении механизма скорости всех точек шатуна одинаковы.

$$\omega_{AB} = 0;$$

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \alpha; \quad V_A = V_B = V_C.$$

Положение II



P — мгновенный центр скоростей шатуна AB ;

$$OP = \frac{2r\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{2r\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 = 4r.$$

$$AP = 3r; \quad \omega_{AB} = \frac{\omega \cdot r}{AP} = \frac{\omega \cdot r}{3r} = \frac{1}{3}\omega$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB = \frac{1}{3}\omega \cdot 4r \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{3}\omega \cdot r,$$

Кинематика. Сложное движение точки

Сложное движение точки — представление движения точки совокупностью движений вместе с каким-либо подвижным пространством (телом) и относительно него.

Подвижное пространство переносит точку со скоростью \vec{V}_e (**переносной**). Сама точка движется в подвижном пространстве со скоростью \vec{V}_r (**относительной**). Скорость точки в неподвижном пространстве (**абсолютная**):

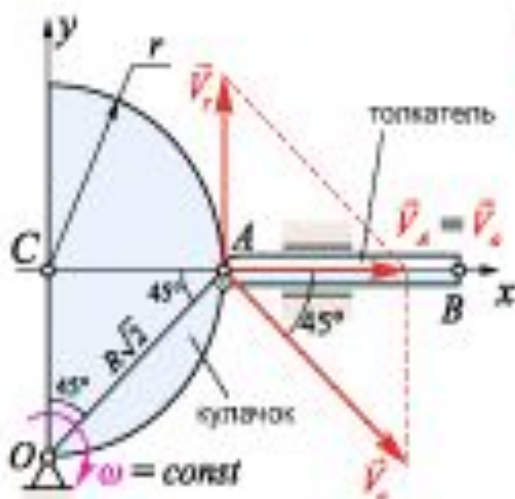
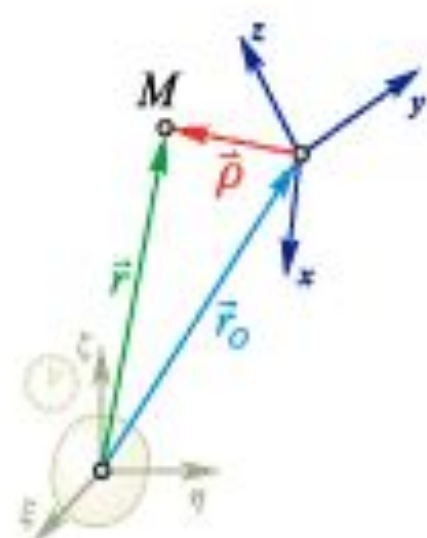
$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (+)$$

При решении задачи вектора скоростей описываются полностью или частично ее условиями.

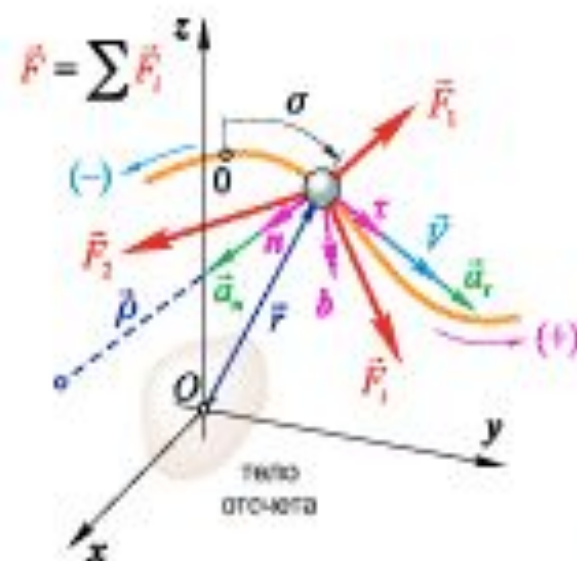
Пример. Кулачок, вращаясь, переносит точку A со скоростью $V_e = \omega r \sqrt{2}$. Относительно основания механизма точка A движется вдоль направляющих. \vec{V}_r направлена по касательной к профилю кулачка — окружности с центром в точке C .

В проекции на ось x равенство (+) запишется

$$V_A = V_e = V_r \cos 45^\circ = \omega r; \quad V_{Ax} = \omega r.$$



Динамика. Динамика точки



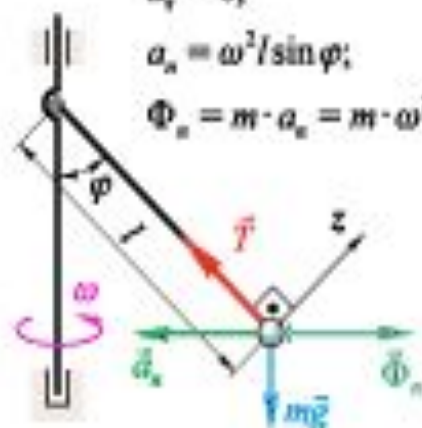
В основе динамики лежит аксиома Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$.

При решении многих задач используется в виде принципа д'Аламбера: $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$; $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ — сила инерции материальной точки.

Ускорение \vec{a} записывается в проекциях на орты τ, n, b траектории точки:

$$\sum_i F_{i\tau} + (-m\dot{a}_\tau) = 0; \quad \sum_i F_{in} + (-m\dot{a}_n) = 0; \quad \sum_i F_{ib} = 0.$$

Пример. Найти угол φ при равномерном движении «тяжелой» точки, прикрепленной с помощью стержня к валу, вращающемуся с угловой скоростью ω .



$$a_\tau = 0;$$

$$a_n = \omega^2 l \sin \varphi;$$

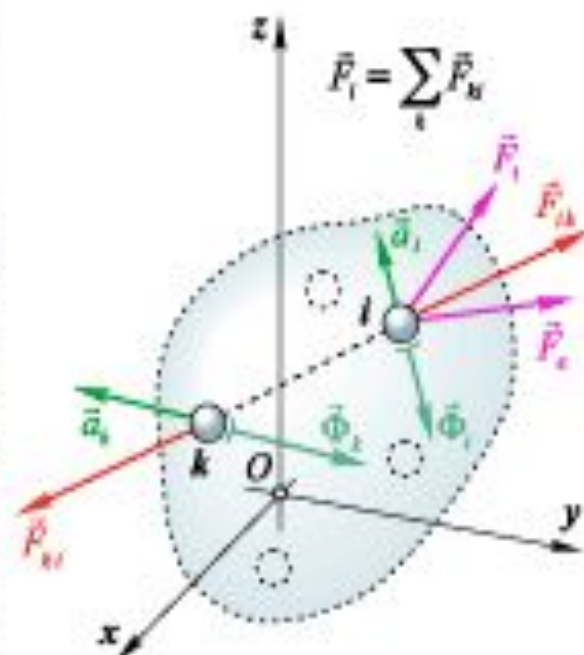
$$\Phi_n = m \cdot a_n = m \cdot \omega^2 l \sin \varphi.$$

$$(m\vec{g}; \vec{T}; \vec{\Phi}) \approx 0; \quad m\vec{g} + \vec{T} + \vec{\Phi} = 0.$$

$$\sum F_z = 0 = -mg \cdot \sin \varphi + \Phi_n \cos \varphi = 0.$$

Ненулевое решение: $\cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 l}$; существует, если $\omega^2 l > g$.

Динамика. Принцип д'Аламбера для механической системы



$$\vec{F}_i = \sum_k \vec{F}_{ki}$$

Для каждой точки механической системы с номером i :

$$\vec{F}_i + \vec{F}_e + \vec{\Phi}_i = 0; (*)$$

i — индекс внутренних сил;

e — индекс внешних сил.

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i.$$

Суммы проекций внутренних сил на какие-либо оси и суммы моментов этих сил относительно осей равны нулю.

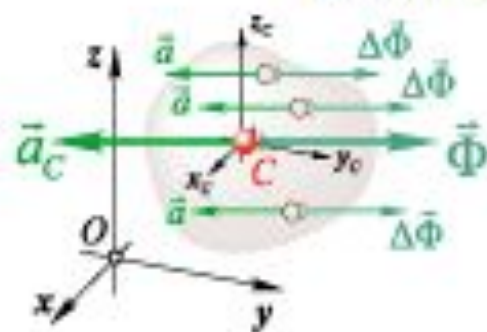
Поэтому по аналогии с равновесием: при движении механической системы порознь равны нулю суммы проекций на какие-либо оси внешних сил и сил инерции материальных точек, а также суммы моментов этих же сил относительно таких же осей.

$$\sum_i (\vec{F}_e)_x + \sum_i (\vec{\Phi}_i)_x = 0; \quad \sum_i \text{mom}_x \vec{F}_e + \sum_i \text{mom}_x \vec{\Phi}_i = 0;$$

$$\sum_i (\vec{F}_e)_y + \sum_i (\vec{\Phi}_i)_y = 0; \quad \sum_i \text{mom}_y \vec{F}_e + \sum_i \text{mom}_y \vec{\Phi}_i = 0;$$

$$\sum_i (\vec{F}_e)_z + \sum_i (\vec{\Phi}_i)_z = 0; \quad \sum_i \text{mom}_z \vec{F}_e + \sum_i \text{mom}_z \vec{\Phi}_i = 0.$$

Динамика. Силы инерции Абсолютно Твердого Тела

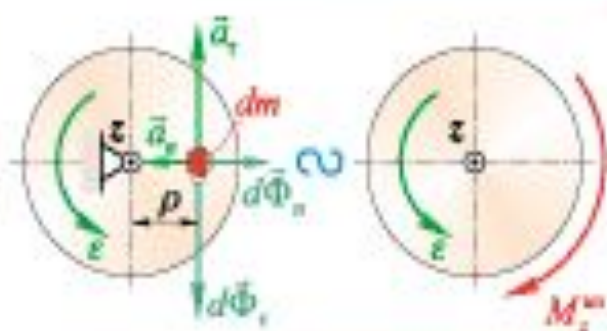


Поступательное движение

Ускорение всех точек одинаково — одинакова и сила инерции точек элементарной массы. Поле сил инерции аналогично полю сил тяжести.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c$$

Сумма моментов сил инерции относительно осей, проходящих через точку C (центр тяжести) равна нулю.



Вращательное движение

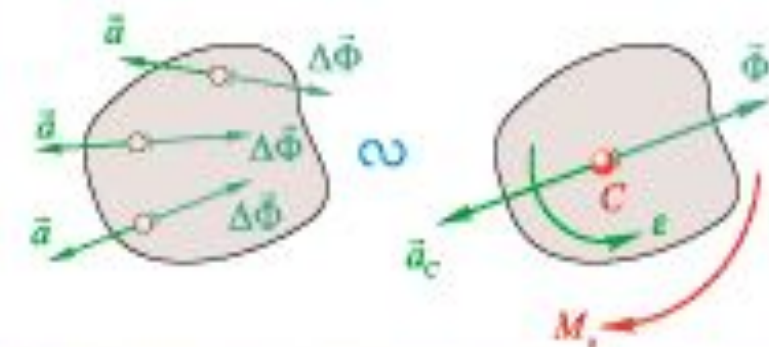
Момент сил $d\vec{\Phi}_n$ относительно оси вращения z равен нулю.

Момент сил $d\vec{\Phi}_t$, $\Delta M_z = -\epsilon \cdot \rho \cdot \rho \cdot dm$.

При интегрировании (суммировании):

$$M_z^m = -\epsilon \cdot \int \rho^2 dm = -\epsilon \cdot I_z$$

I_z — момент инерции твердого тела относительно оси его вращения z .



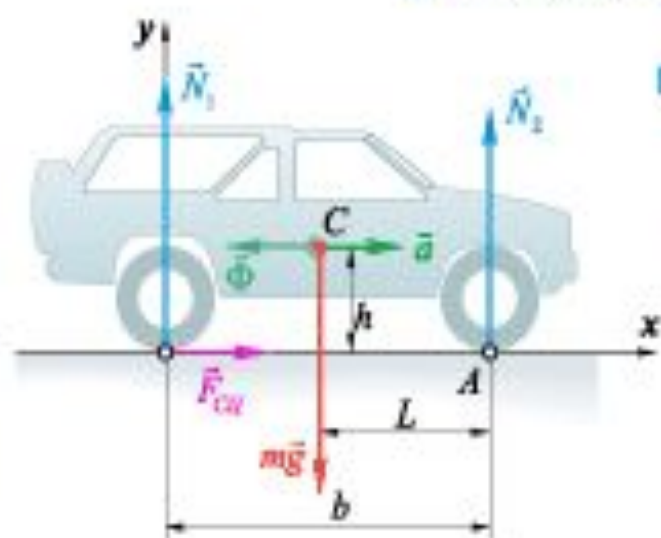
Плоское движение

Представляется совокупностью поступательного и вращательного движений.

$$\{d\vec{\Phi}\} \sim (\vec{\Phi}_C; M_C)$$

$$\vec{\Phi}_C = -m\vec{a}; \quad M_C = -\epsilon \cdot I_m$$

Динамика. Принцип д'Аламбера. Пример 1



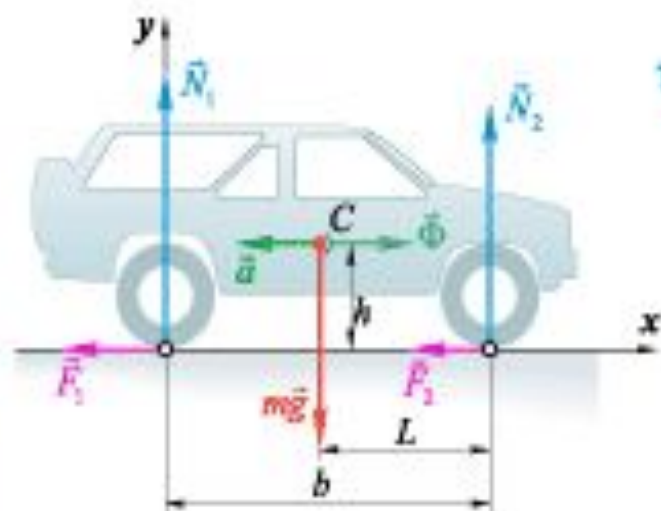
Разгон автомобиля с одним ведущим колесом:

$$(\vec{N}_1; \vec{N}_2; m\vec{g}; \vec{F}_{cw}; \vec{\Phi}) \approx 0;$$

$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ — сила инерции автомобиля.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 = -\Phi + F_{cw}, & F_{cw} = \psi \cdot N_1; \\ \sum \text{мом}_x \vec{F} = 0 = mgL + \Phi \cdot h - N_1 b. \end{cases}$$

После преобразований: $a = g \frac{\psi L}{b - \psi h}$. (всегда $b > \psi h$)



Торможение автомобиля:

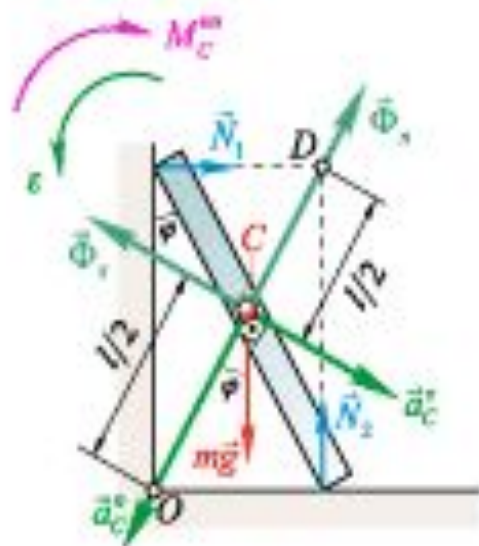
$$(m\vec{g}; \vec{N}_1; \vec{N}_2; \vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{\Phi}) \approx 0.$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 = \Phi - F_1 - F_2, & F = f \cdot N_i; \\ \sum F_y = 0 = N_1 + N_2 - mg. \end{cases}$$

$$F_1 + F_2 = f(N_1 + N_2) = f \cdot mg. \quad ma = f \cdot mg, \quad a = f \cdot g.$$

Обычно $f < \psi$. Существуют специальные устройства, обеспечивающие $f = \psi$ (антиблокировочные устройства).

Динамика. Принцип д'Аламбера. Пример 2



Определить зависимость углового ускорения линейки длиной l от угла φ .

Линейка движется плоско-параллельно:

$$\{d\Phi\} \approx \Phi_n; \Phi_t; M_C^m.$$

$$\Phi_n = -m\ddot{a}_C^* \cdot \vec{n}; \quad \Phi_t = -m\ddot{a}_C^* \cdot \vec{t}.$$

По доказанному в кинематике траектория центра тяжести линейки — окружность с центром в точке O и радиусом $l/2$.

Поэтому $\Phi_n = m\dot{\varphi}^2 \frac{l}{2}$; $\Phi_t = m\ddot{\varphi} \frac{l}{2} = m\epsilon \frac{l}{2}$; $\epsilon = \ddot{\varphi}$.

$$M_C^m = I_n^C \cdot \epsilon \quad (\text{направление учтено на рисунке}).$$

$$\text{Для стержня: } I_n^C = \frac{1}{12} ml^2; \quad M_C^m = \frac{1}{12} ml^2 \epsilon.$$

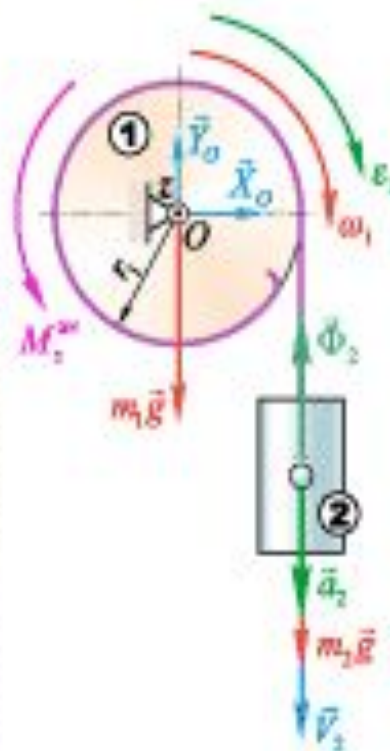
$$(m\vec{g}; \Phi_n; \Phi_t; M_C^m; \vec{N}_1; \vec{N}_2) \approx 0;$$

$$\sum \text{mom}_O F = 0 = mg \frac{l}{2} \sin \varphi - \Phi_t \frac{l}{2} - M_C^m; \quad mg \frac{l}{2} \sin \varphi - m\epsilon \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{12} ml^2 \epsilon = 0;$$

$$\frac{1}{2} g \sin \varphi = \frac{1}{3} l \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{3g}{2l} \sin \varphi, \quad \ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi \quad \text{— дифференциальное уравнение движения линейки.}$$

Динамика. Принцип д'Аламбера. Пример 3

Найти ускорение груза при заданных его массе — m_2 и моменте инерции блока 1 относительно оси z : $I_z = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$, m_1 — масса блока.



Силы инерции блока 1: $\{d\bar{\Phi}_1\} \propto M_z^{in}$.

Направление указано на рисунке. $M_z^{in} = I_z \epsilon_1$.

Силы инерции груза 2: $\{d\bar{\Phi}_2\} \propto \bar{\Phi}_2$; $\bar{\Phi}_2 = m_2 a_2$.

$$(m_1 \bar{g}; m_1 \bar{g}; \bar{X}_O; \bar{Y}_O; \bar{\Phi}_2; M_z^{in}) \propto 0.$$

$$\sum \text{мом}_O \bar{F} = 0 = -m_2 g \cdot r_1 + \Phi_2 \cdot r_1 + M_z^{in}.$$

По кинематике: $\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$ — всегда. Поэтому $\frac{d\omega_1}{dt} = \epsilon_1 = \frac{a_2}{r_1}$.

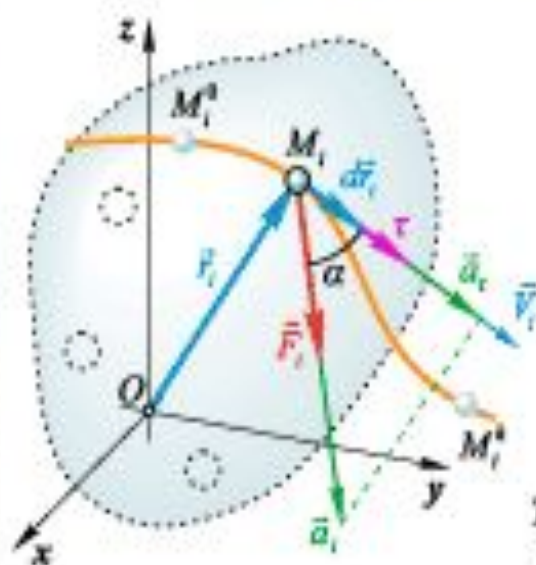
После подстановки всех соотношений: $m_2 g r_1 = m_2 a_2 r_1 + \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \frac{a_2}{r_1}$.

$$a_2 = g \frac{m_2}{m_2 + \frac{1}{2} m_1}; \quad a_2 = \frac{P_2}{m_{\text{эф}}}; \quad P_2 \text{ — вес груза 2;}$$

$m_{\text{эф}} = m_2 + 0,5 m_1$ — масса механической системы,

приведенная к грузу 2.

Динамика. Теоремы о кинетической энергии. Теорема мощностей



В проекции на орт τ можно записать:

$$m_i a_t \cos \alpha = F_i \cos \alpha,$$

Умножим на V_i :

$$m_i V_i a_t \cos \alpha = F_i V_i \cos \alpha.$$

По определению:

$$a_t = a \cdot \cos \alpha = \frac{dV}{dt}; \quad V \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} V^2 \right).$$

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2} \quad \text{— кинетическая энергия материальной точки } M_i;$$

$$W_i = F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha \quad \text{— мощность силы, приложенной к точке } M_i;$$

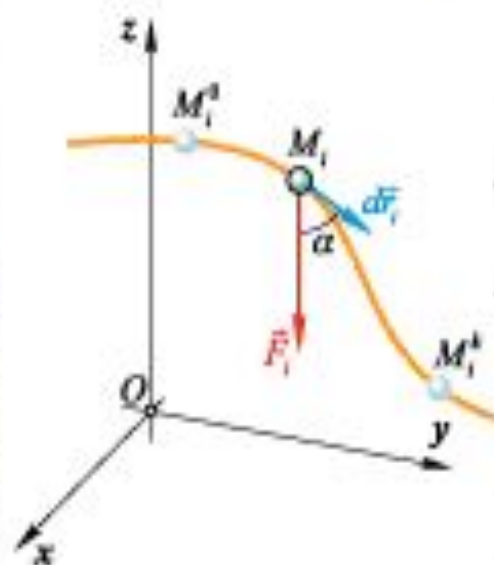
$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} \quad \text{— кинетическая энергия механической системы } \{M_i\}_n.$$

Теорема мощностей:

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_i. \quad (*)$$

Производная по времени кинетической энергии механической системы равна суммарной мощности сил, действующих на ее точки.

Динамика. Теоремы о кинетической энергии. Теорема работ



Теорему мощностей можно записать в виде:

$$dT = \sum_i W_i \cdot dt \Rightarrow T_k - T_0 = \sum_i \int_{M_i^0}^{M_i^k} F_i V_i \cdot dt \cdot \cos \alpha_i = \sum_i \int_{M_i^0}^{M_i^k} F_i \cdot dr_i \cdot \cos \alpha_i$$

$A_i = \int_{M_i^0}^{M_i^k} F_i \cdot dr_i \cdot \cos \alpha_i$ — работа силы, приложенной к точке M_i при ее перемещении из положения M_i^0 в M_i^k .

$$T_k - T_0 = \sum_i A_i.$$

Разность кинетических энергий механической системы в конечном и начальном ее положениях равна сумме работ сил, приложенных к точкам механической системы, при их перемещении из начального положения в конечное.

Существуют потенциальные силы; работа таких сил не зависит от формы траектории точки их приложения. В этом случае

$$A_i = \Pi_i^0 - \Pi_i^k.$$

Π_i — потенциальная энергия материальной точки;

$\sum_i \Pi_i = \Pi$ — потенциальная энергия механической системы.

Если все силы потенциальны, то $T_k - T_0 = \Pi_0 - \Pi_k$; $T + \Pi = const.$

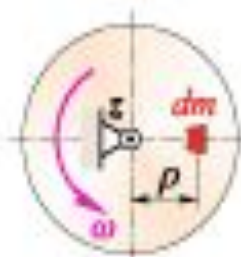
Динамика. Теоремы о кинетической энергии.
Кинетическая энергия твердого тела



Поступательное движение

Скорости всех точек одинаковы

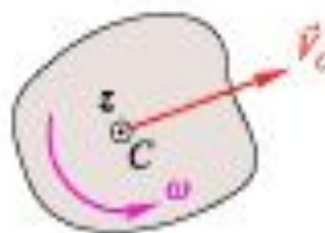
$$T = m \frac{V^2}{2}; \quad m \text{ — масса тела.}$$



Вращательное движение

$$dT = \frac{1}{2} dm (\omega \cdot \rho)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \cdot dm.$$

$$\text{Интегрируем: } T = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$



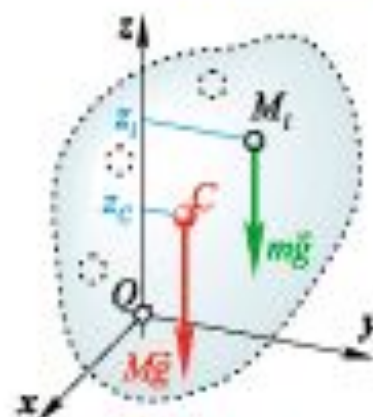
Плоское движение

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_z^C \omega^2.$$

I_z^C — момент инерции относительно оси z
содержащей центр тяжести тела.

Динамика. Теоремы о кинетической энергии.

Потенциальная энергия механической системы в поле сил тяжести

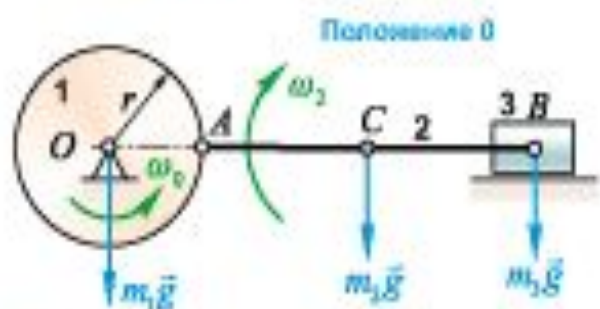


$$\Pi = \sum \Pi_i = \sum m_i g z_i$$

По определению центра тяжести: $\sum m_i z_i = z_c \sum m_i = M \cdot z_c$.

$\Pi = M \cdot g \cdot z_c$. z_c — аппликата центра тяжести системы.

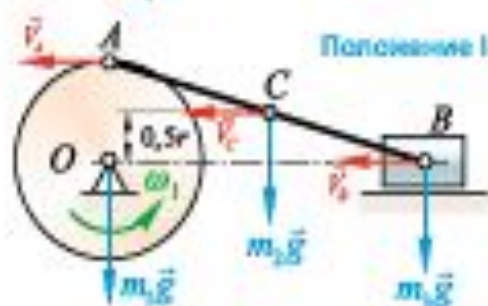
Пример. Определить угловую скорость маховика в положении I при известной угловой скорости ω_0 в начальном положении.



$$V_s = 0; \quad T_s = I_O \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{1}{2} I_B \omega_2^2$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{l} = \frac{\omega_0 r}{l}; \quad T_s = \frac{\omega_0^2}{2} \left(I_O + I_B \frac{r^2}{l^2} \right)$$

Моменты инерции
маховика $I_O = \frac{m_1 r^2}{2}$;
шатуна $I_B = \frac{m_2 l^2}{3}$.

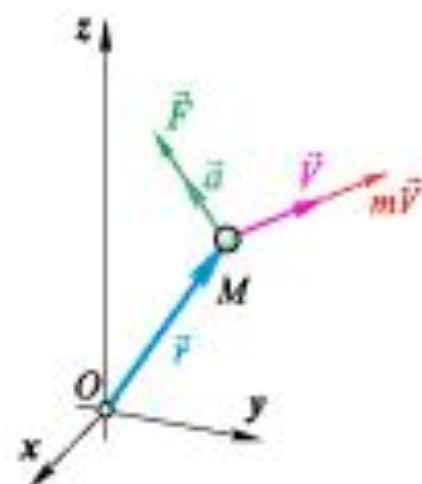


$$T_I = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_1^2 r^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega_1^2 r^2 = \frac{1}{2} \omega_1^2 (I_O + r^2 (m_2 + m_3))$$

Точки приложения сил веса звеньев 1 и 3 по вертикали не перемещаются.

$$A_p = m_2 g z_c^{\text{нач}} - m_2 g z_c^{\text{кон}} = 0 - m_2 g \frac{r}{2} \quad \omega_1^2 = \frac{-m_2 g + \omega_0^2 r \left(0,5 m_1 + \frac{1}{3} m_2 \right)}{r (0,5 m_1 + m_2 + m_3)}$$

Динамика. Теорема импульсов



$\vec{Q} = m\vec{V}$ — количество движения материальной точки.

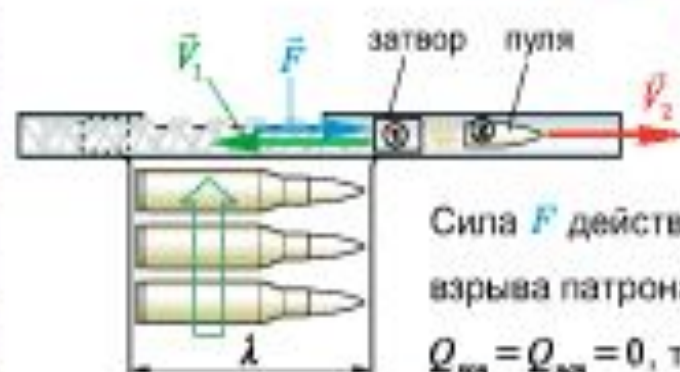
Аксиома Ньютона может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}, \text{ так как } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

$d(m\vec{V}) = \vec{F} \cdot dt$ — импульс силы за время dt .

Интегрируем $\vec{Q}_{\text{кон}} - \vec{Q}_{\text{кон}} = \int_{t_{\text{кон}}}^{t_{\text{кон}}} \vec{F} dt$ (*) — импульс силы за время от $t_{\text{кон}}$ до $t_{\text{кон}}$.

Равенство (*) позволяет решать задачи удара (взрыва) когда $t_{\text{кон}} - t_{\text{кон}} \approx 0$, а сила F ограничена по величине.



Пример. Найти скорость затвора в автоматическом оружии при скорости пули относительно неподвижного ствола V_2 .

Сила F действия пружины ограничена по величине, поэтому за время взрыва патрона можно считать, что $\int_{t_{\text{кон}}}^{t_{\text{кон}}} \vec{F} dt = 0$.

$Q_{\text{кон}} = Q_{\text{кон}} = 0$, так как до взрыва все скорости равны нулю.

$$Q_{\text{кон}} = m_2 V_2 - m_1 V_1 = 0; \quad V_1 = V_2 \frac{m_2}{m_1}$$

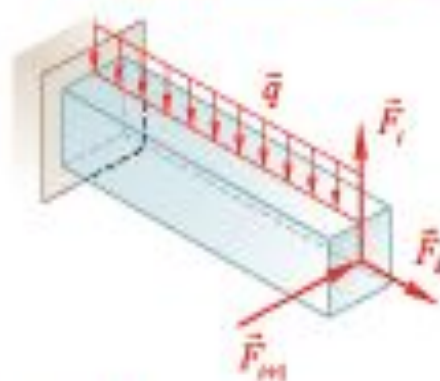
Кинетическая энергия затвора преобразуется в потенциальную энергию пружины: $\frac{1}{2} c \lambda^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$.

Сопротивление материалов. Модели и методы

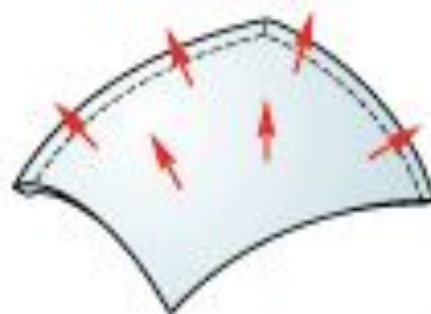
Деформируемое твердое тело — тело, изменения формы которого (деформации) под действием нагрузок малы и не изменяют характеристик самих нагрузок.

Изучаются соотношения нагрузок и деформаций для тел, **один из размеров которых существенно отличается от двух других**.

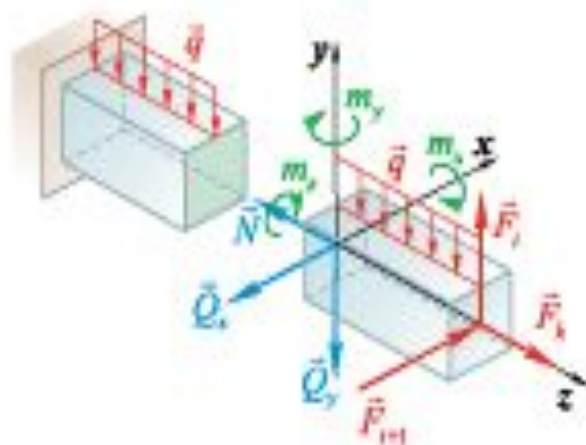
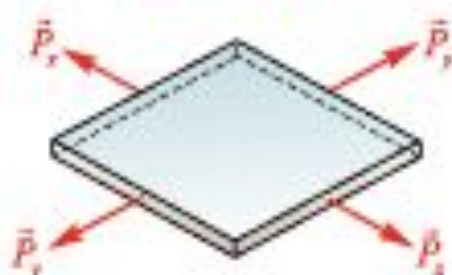
Брус, стержень, вал



Оболочка



Пластина



Основопологающим является **метод сечений**:

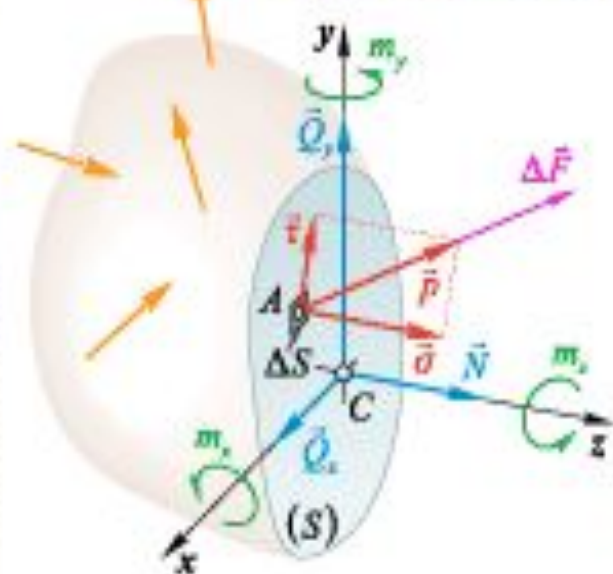
рассматривается равновесие части тела, отсеченной от другой его части плоским сечением. Силы взаимодействия между частями называются внутренними; при вычислении их характеристик используются уравнения равновесия какой-либо из частей тела:

$$\sum F_x - Q_x = 0; \quad \sum F_y - Q_y = 0; \quad \sum F_z - N = 0;$$

$$\sum \text{mom}_y \bar{F}_i - m_y = 0; \quad \sum \text{mom}_x \bar{F}_i - m_x = 0; \quad \sum \text{mom}_z \bar{F}_i - m_z = 0.$$

$\{\bar{F}_i\}_e$ — система сил, действующих на отсеченную часть.

Сопротивление материалов. Напряжения и деформации



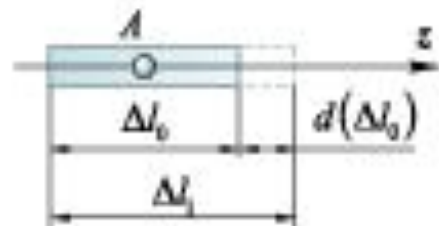
Совокупность внутренних сил состоит из бесконечного множества бесконечно малых сил $\Delta \vec{F}$.

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad \text{— напряжение в точке } A,$$

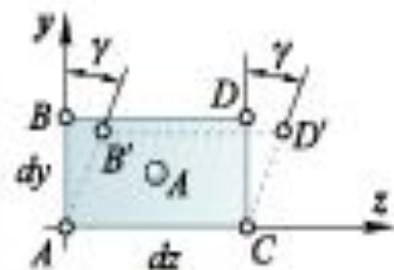
$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}.$$

σ — **нормальное напряжение** — составляющая напряжения, перпендикулярная плоскости сечения;

τ — **касательное напряжение**; располагается в плоскости сечения.



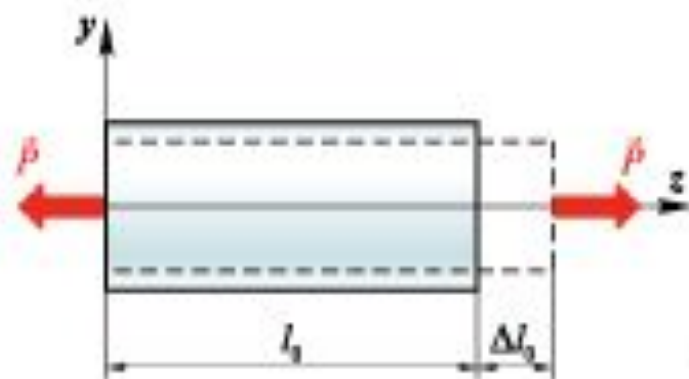
Линейная деформация в точке A по направлению z : $\varepsilon_z = \lim_{\Delta l_0 \rightarrow 0} \frac{d(\Delta l_0)}{\Delta l_0}$.



γ — угловая деформация в точке A в плоскости zOy : $\gamma = \lim_{DC \rightarrow 0} \angle DCD'$.

Соотношения между напряжениями и деформациями однозначны и характеризуют механические свойства материала.

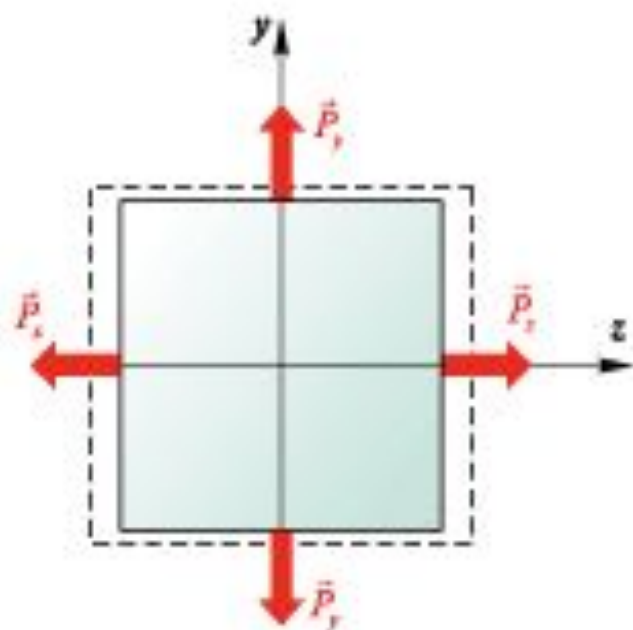
Сопротивление материалов. Закон Гука. Коэффициент Пуассона



На практике установлено, что для большинства материалов существует диапазон растягивающих–сжимающих нагрузок, таких, что

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

E — модуль упругости; модуль Юнга первого рода — одна из основных характеристик материала.



Продольные деформации (ε_z) сопровождаются поперечными (ε_y) и связаны коэффициентом Пуассона

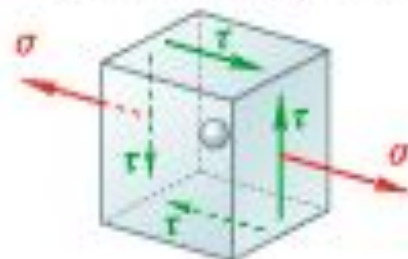
$$\varepsilon_y = \mu \cdot \varepsilon_z$$

При растяжении (сжатии) по двум осям:

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z). \end{cases}$$

Сопротивление материалов. Напряженное состояние в точке

Напряженное состояние в точке для бруса (вала, балки стержня)



Напряженное состояние в точке моделируется напряжениями на гранях параллелепипеда, проведенных бесконечно близко к самой точке.

Напряжения τ — парные, равны по величине и направлены либо к общему ребру, либо от него.

Всегда существуют **главные площадки** — площадки, касательные напряжения в которых равны нулю. Напряжения, действующие в этих площадках, называются **главными**. Найдем их:

$$S_x = S_a \cos \alpha; \quad S_y = S_a \sin \alpha.$$

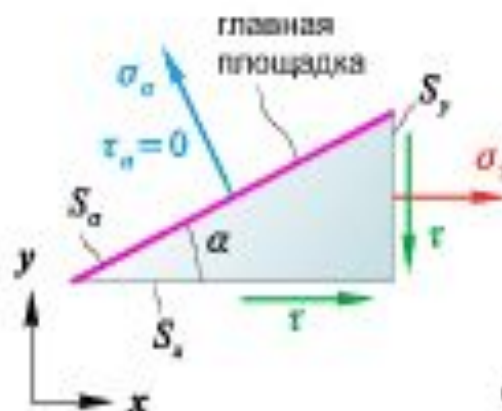
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\sigma_a S_a \sin \alpha + \sigma S_a \sin \alpha + \tau S_a \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_a S_a \cos \alpha - \tau S_a \sin \alpha = 0.$$

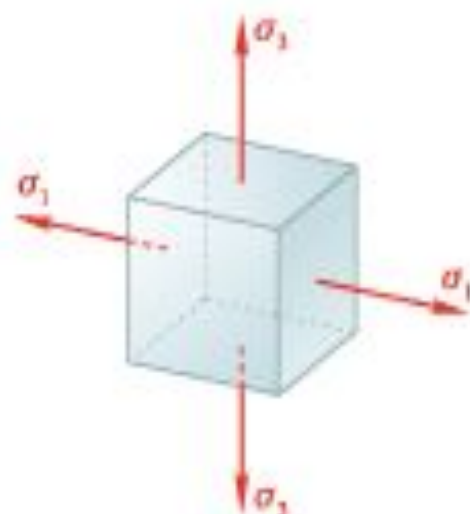
$$\left. \begin{aligned} (\sigma - \sigma_a) \sin \alpha + \tau \cos \alpha &= 0; \\ -\tau \sin \alpha + \sigma_a \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Система однородных (правые части} \\ \text{равны нулю) уравнений относительно} \\ \cos \alpha \text{ и } \sin \alpha \text{ совместно не равных нулю.} \end{array}$$

Для существования ненулевых решений определитель системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma - \sigma_a & \tau \\ -\tau & \sigma_a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_a^2 - \sigma \cdot \sigma_a - \tau^2 = 0 \Rightarrow \sigma_a = \frac{1}{2} \sigma \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_{1,2}$$



Сопротивление материалов. Максимальные касательные напряжения

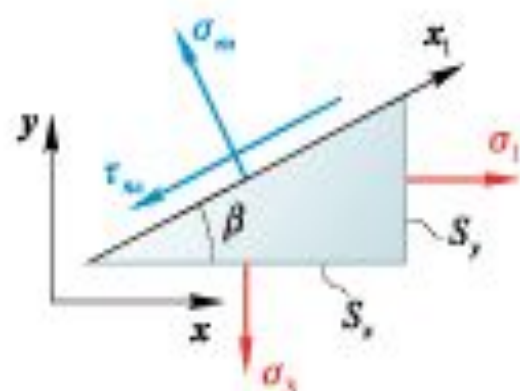


Установим порядок обозначения главных напряжений:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Для бруса (вала, балки, стержня):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_p - \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}).$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\tau_n \cdot S + \sigma_1 \cdot S_y \cos \beta + \sigma_3 \cdot S_y \sin \beta = 0;$$

$$-\tau_n \cdot S + \sigma_1 \cdot S \sin \beta \cos \beta + \sigma_3 \cdot S \cos \beta \sin \beta = 0;$$

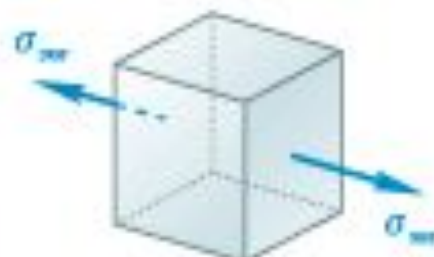
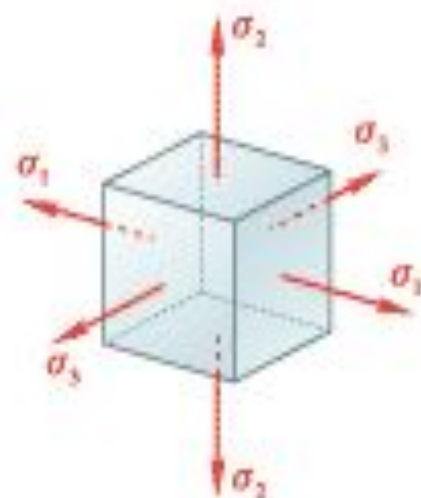
$$\tau_n = \frac{1}{2} \sin 2\beta (\sigma_1 - \sigma_3).$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}.$$

$\beta_{\max} = 45^\circ$ — угол наклона площадки с максимальным касательным напряжением к площадке 1 или 3.

При одноосном растяжении $\tau_p = 0$; $\tau_{\max} = \sigma_p$.

Сопротивление материалов. Гипотезы (теории) прочности



Гипотезы прочности устанавливают количественные критерии **предельного напряженного состояния**, считающегося опасным, неприемлимым. Появляется возможность сведения любых напряженных состояний к эквивалентному, соответствующему растяжению образца материала. Условие прочности всегда одно:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Универсальных теорий не существует. Наиболее часто применяется **теория наибольших касательных напряжений** — материал переходит в состояние текучести когда максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения, характерного для данного материала.

Для бруса (вала):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}.$$

Для растягиваемого образца:

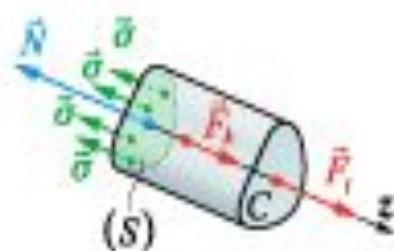
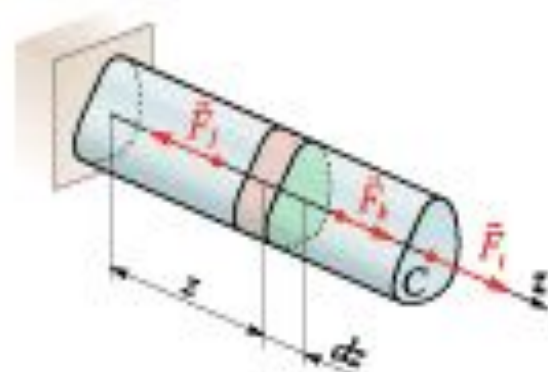
$$\tau_p = 0; \quad \tau_{\max} = \sigma_p = \sigma_{\max}.$$

Следовательно, $\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}$.

По **гипотезе энергии формоизменения** для бруса (вала):

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_p^2}.$$

Сопротивление материалов. Растяжение и сжатие



Растяжение и **сжатие** вызываются нагрузками, при которых поперечные сечения бруса перемещаются параллельно самим себе вдоль прямой, проходящей через центры тяжести этих сечений (оси бруса).

Продольные деформации волокон одинаковы; одинаковы и напряжения в них, образующие в поперечном сечении бруса систему нормальных напряжений одинаковых по величине.

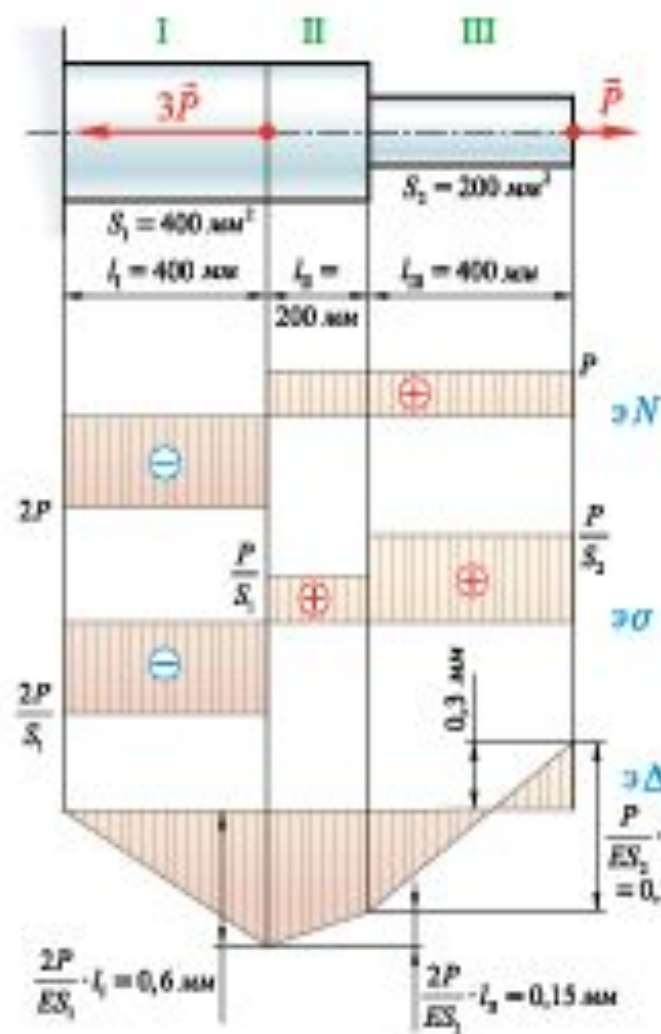
Уравнения равновесия отсеченной части сводятся к одному:

$$N = \sum F_{z_i}, \quad N \text{ — нормальная сила в поперечном сечении бруса.}$$

$$\sigma = \frac{N}{S}, \quad S \text{ — площадь поперечного сечения.}$$

Растяжение-сжатие моделируется системой сил $\{\bar{F}_i\}_z$, приложенных в центрах тяжести поперечных сечений бруса, образующих его продольную ось z .

Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие. Пример



Рассматриваем равновесие отсеченных частей.
Силу N полагаем положительной — растягивающей
выделенный объем. Реальные значения определятся
из уравнений равновесия:

для участков II, III



$N_{II,III} = P$ брус на
участках II, III
растягивается

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \Rightarrow \sigma_{II} = \frac{P}{S_2}; \quad \sigma_{III} = \frac{P}{S_2}; \quad \sigma_I = -\frac{2P}{S_2}$$

При $P = 60 \text{ кН} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}$: $\sigma_{II} = -300 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = -300 \text{ МПа}$;

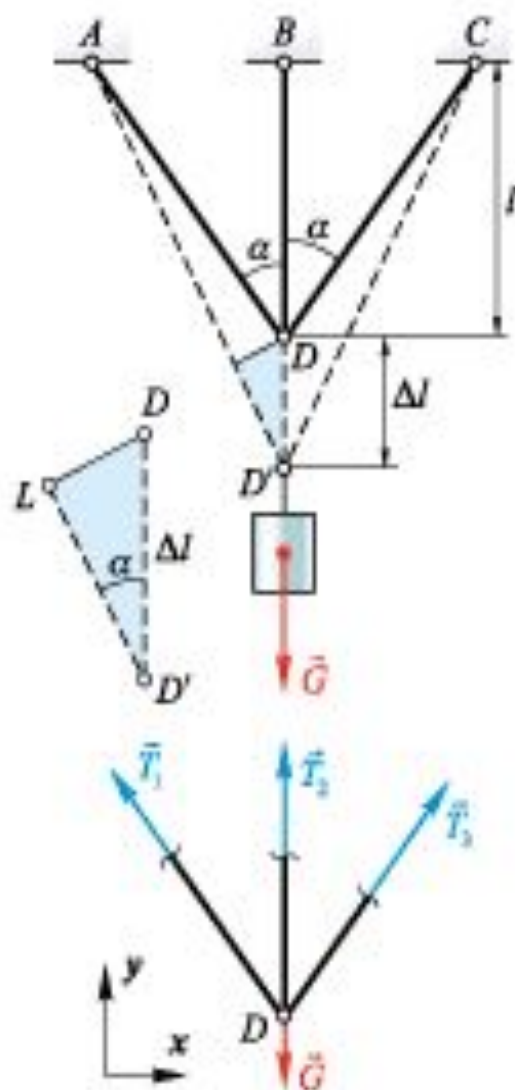
$\sigma_{III} = 150 \text{ МПа}$; $\sigma_I = 300 \text{ МПа}$.

Перемещения крайних сечений участков друг
относительно друга:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{\sigma_i}{E} \Rightarrow \Delta l_i = \frac{\sigma_i}{E} \cdot l_i; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа, (сталь)}$$

$$\Delta l_I = -0,6 \text{ мм} \quad \Delta l_{II} = 0,15 \text{ мм} \quad \Delta l_{III} = 0,75 \text{ мм} \quad \Delta l = \sum \Delta l_i = 0,75 + 0,15 - 0,6 = 0,3 \text{ мм.}$$

Сопротивление материалов. Понятие о статической неопределенности



Системы взаимосвязанных между собой тел, в которых число независимых уравнений равновесия меньше числа составляющих опорных реакций (неизвестных) называются **статически неопределеными**. Решение задач производится составлением дополнительных уравнений — **уравнений совместности деформаций**.

Пример. Найти усилия в стержнях кронштейна.

Из равновесия болта шарнира D : $(\vec{G}; \vec{T}_1; \vec{T}_2; \vec{T}_3) \in 0$;

$$\sum F_x = 0 = -T_1 \sin \alpha + T_3 \sin \alpha \Rightarrow T_1 = T_3 = T.$$

$$\sum F_y = 0 = 2T \cos \alpha + T_2 - G.$$

Стержень AD удлиняется на величину $LD' = \Delta l \cos \alpha$;

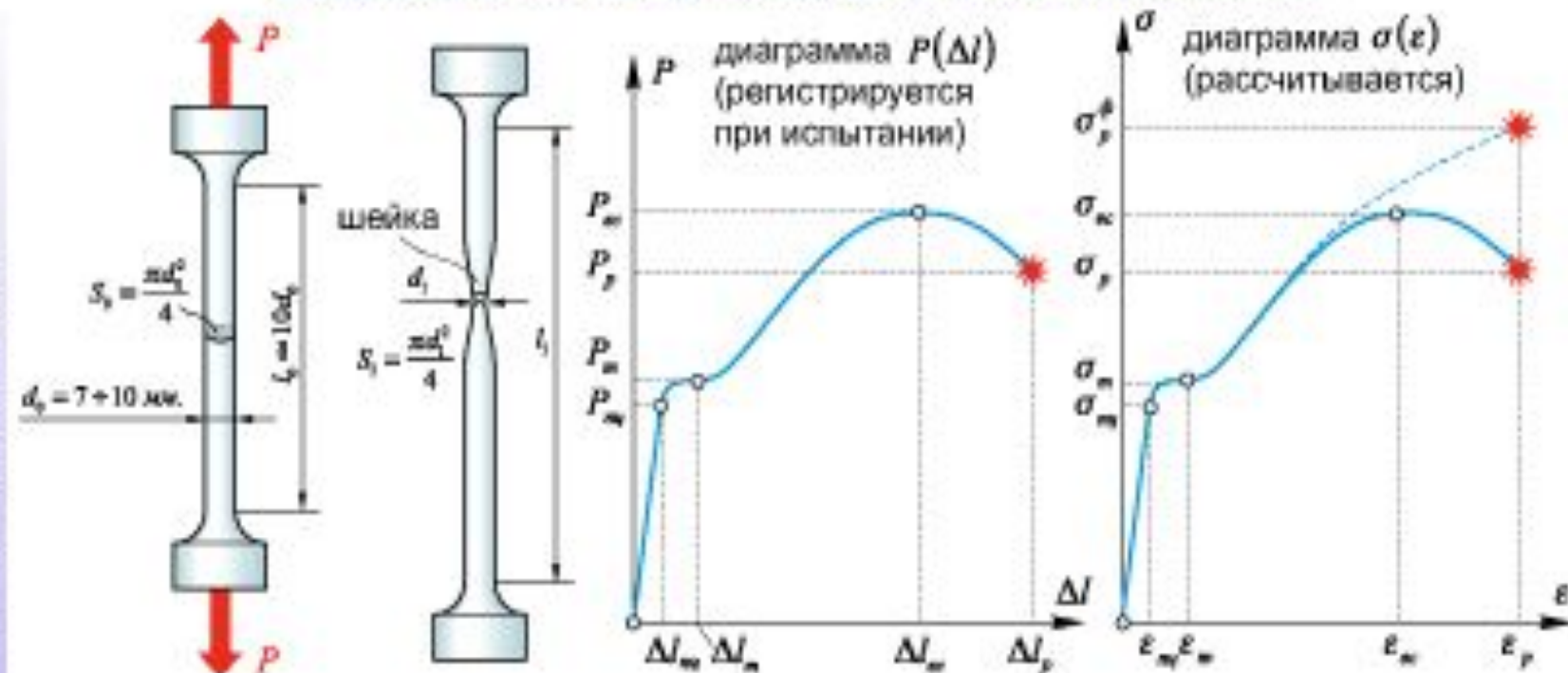
$$\epsilon_{AD} = \epsilon_{CD} = \frac{\Delta l \cos \alpha}{AD} = \frac{\Delta l \cos^2 \alpha}{l}; \quad \frac{\Delta l}{l} = \epsilon_{BD}$$

Уравнение совместности деформаций: $\epsilon_{AD} = \epsilon_{BD} \cos^2 \alpha$.

При одинаковых поперечных сечениях: $T = T_2 \cos^2 \alpha$.

$$2T_2 \cos^2 \alpha + T_2 = G; \quad T_2 = \frac{G}{1 + 2 \cos^2 \alpha}; \quad T = \frac{G \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Сопrotивление материалов. Испытание на растяжение



Свойства материала описываются величинами:

предел (напряжение) пропорциональности (упругости) $\sigma_m = \frac{P_m}{S_0}$;

предел текучести $\sigma_n = \frac{P_n}{S_0}$; предел временного сопротивления $\sigma_r = \frac{P_r}{S_0}$;

напряжение разрыва (условное) $\sigma_p = \frac{P_p}{S_0}$; фактическое: $\sigma_p^* = \frac{P_p}{S_1}$.

Деформации:

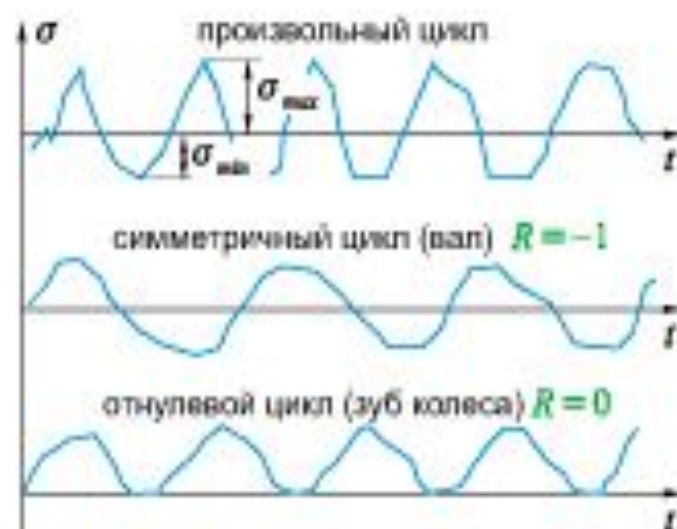
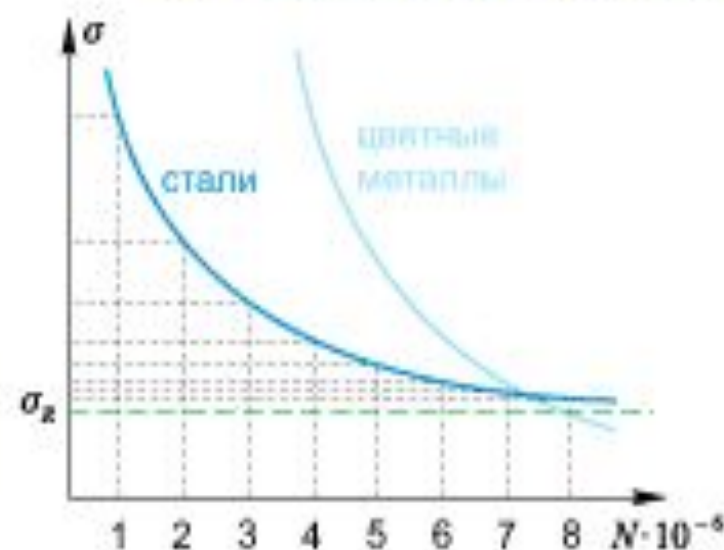
остаточная (необратимая):

$$\epsilon_m = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

пропорциональности (упругая):

$$\epsilon_m = \frac{\Delta l_m - (l_1 - l_0)}{l_0}$$

Сопротивление материалов. Прочность при переменных нагрузках



Прочность при переменных напряжениях определяется по кривой усталости материала, координатами точек которой являются число выдерживаемых образцом материала циклов (абсцисса) при уровне напряжений в соответствии с параметром цикла (ордината).

Наиболее простыми являются испытания при симметричном цикле, осуществляемые вращением образца относительно груза определенного веса.

Материалы на основе железа (стали) обычно имеют **асимптоту** кривой усталости, σ_s — предел выносливости.

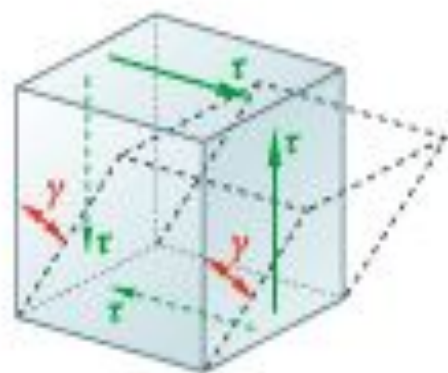
Достаточным числом испытаний (базой испытаний) считается $N_0 = 10^7$.

При отсутствии асимптоты кривой усталости назначают σ_s при $N_0 = 10^8$.

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \text{ — параметр цикла.}$$

Сопротивление материалов. Сдвиг

Сдвиг испытывает элементарный объем материала, по граням которого действуют **только касательные напряжения**.



$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{— закон Гука при сдвиге.}$$

G — модуль упругости второго рода. Линейные деформации неотделимы от угловых, поэтому между E и G существует зависимость:

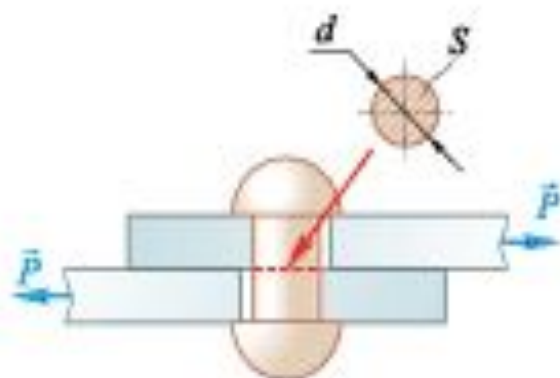
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Для стали $\mu = 0,3$, поэтому $G = 0,4E = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

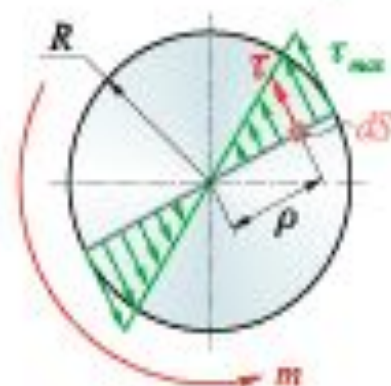
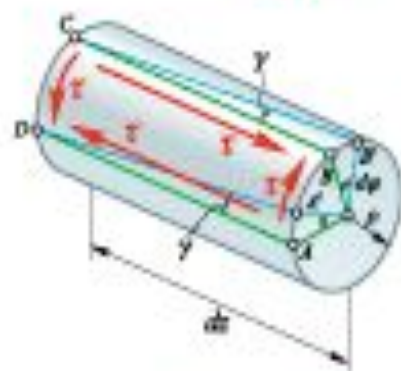
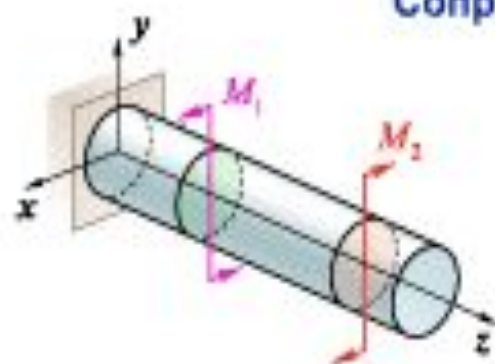
Предельным случаем сдвига считается **срез**.
Напряжения в плоскости среза — касательные.

$$\tau = \frac{P}{S}$$

S — площадь среза; для круглых заклепок $S = \frac{\pi d^2}{4}$.



Сопrotивление материалов. Кручение



Кручение вызывается парами сил, расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси вала (бруса). Поперечные сечения вала (круглого бруса) остаются плоскими и поворачиваются вокруг его оси.

Элемент $ABCD$ испытывает сдвиг.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BB'} &= \gamma \cdot dz \\ \widehat{BB'} &= \rho \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}; \quad \tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}; \quad G \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau}{\rho}$$

Крутящий момент в сечении:

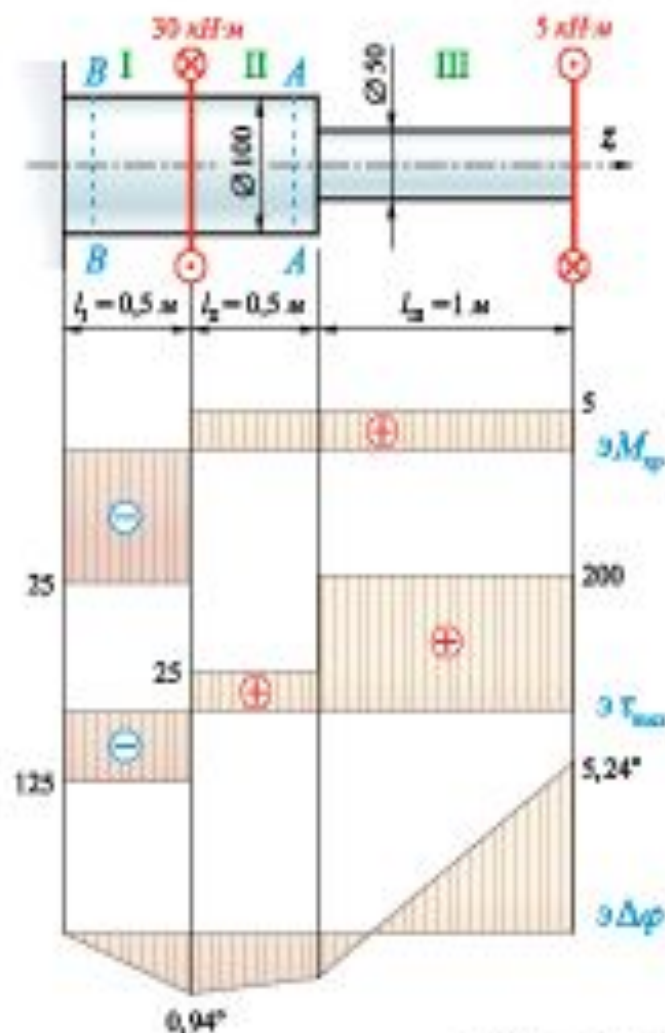
$$m = \int_{(S)} \tau \cdot \rho \cdot dS = G \frac{d\varphi}{dz} \int_{(S)} \rho^2 \cdot dS.$$

$$m = G \frac{d\varphi}{dz} I_p \Rightarrow d\varphi = \frac{m}{G \cdot I_p} \cdot dz.$$

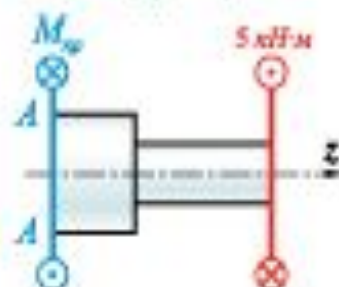
С другой стороны: $m = \frac{\tau}{\rho} I_p; \quad \tau_{\max} = \frac{mR}{I_p}$.

$$\tau_{\max} = \frac{m}{W_p}$$

Сопrotивление материалов. Кручение. Пример



Эпюра крутящих моментов (строится по методу сечений):



$$\sum_{поп. F} F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{кр1} = M_{кр2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

(правило знаков произвольное)



$$\sum_{поп. F} F = 0 = -5 + 30 + M_{кр1},$$

$$M_{кр1} = -25 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюра максимальных касательных напряжений: $\left(1 \frac{H}{мм^2} = 1 \text{ МПа}\right)$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр1}}{0,2 \cdot 100^3} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^9} = 125 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{max} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^9} = 25 \text{ МПа, } \tau_{max} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 50^3} = 200 \text{ МПа.}$$

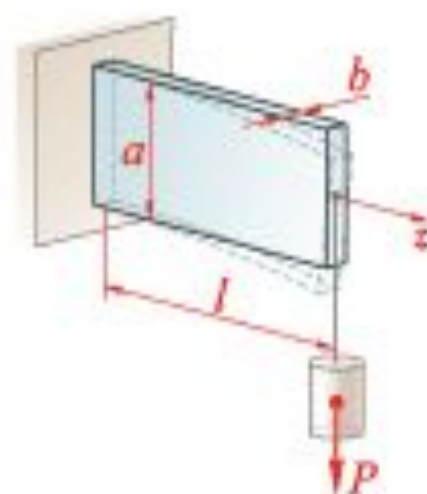
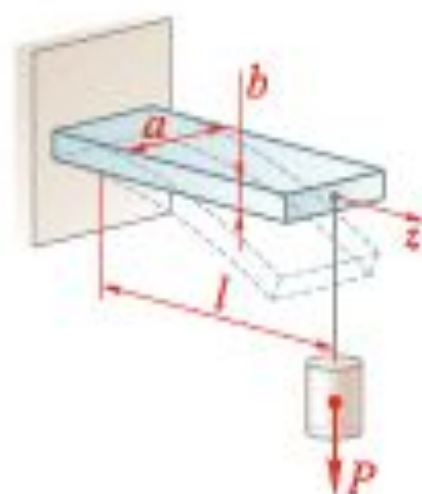
Эпюра относительных угловых перемещений поперечных сечений: $(G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа})$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G \cdot J_1} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 100^4} \cdot \frac{180}{\pi} \approx -0,94^\circ;$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 100^4} \cdot \frac{180}{\pi} \approx 0,18^\circ; \quad \Delta\varphi_3 = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 50^4} \cdot \frac{180}{\pi} \approx 6^\circ.$$

5,24° — угол поворота конечного сечения вала относительно заделанного.

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений



Деформации и напряжения зависят от взаимного расположения нагрузок и поперечных сечений бруса. Кроме площади и положения центра тяжести C геометрия сечения характеризуется:

$$I_x = \int_{(S)} y^2 dS \quad \text{— момент инерции сечения относительно оси } x;$$

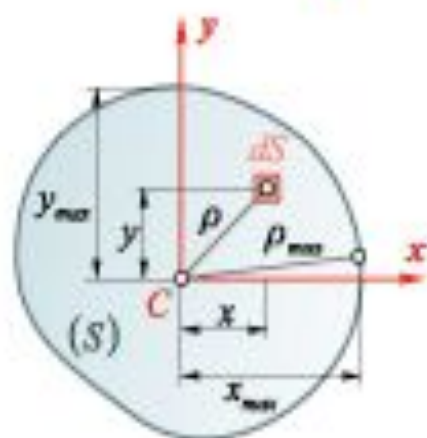
$$I_y = \int_{(S)} x^2 dS \quad \text{— момент инерции сечения относительно оси } y;$$

$$w_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad w_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad \text{— моменты сопротивления сечения изгибу};$$

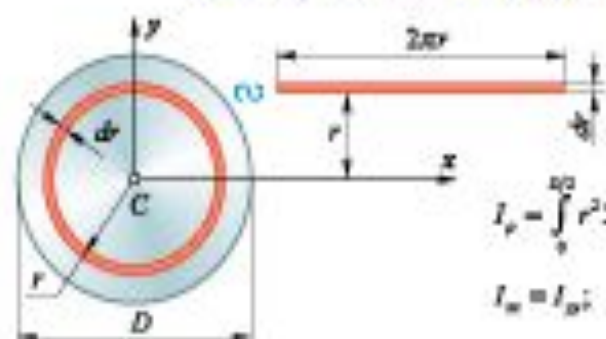
$$I_p = \int_{(S)} \rho^2 dS \quad \text{— полярный момент инерции сечения};$$

$$w_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad \text{— момент сопротивления сечения кручению}.$$

Оси x, y — главные, если центробежный момент инерции $I_{xy} = \int_{(S)} xy dS$ равен нулю.



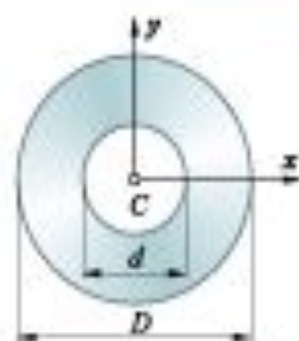
Сопротивление материалов. Геометрические характеристики простейших фигур



Сплошной круг

$$I_x = \int_0^{D/2} r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = 2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{4} \right)^4; \quad I_x = \frac{\pi}{32} D^4 = 0,1D^4; \quad w_x = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi}{16} D^3; \quad w_x = 0,2D^3.$$

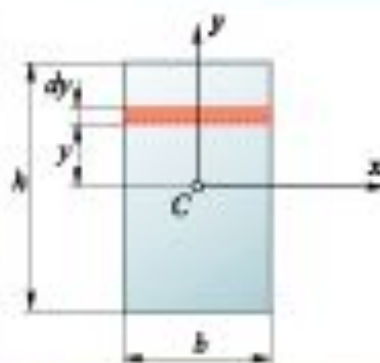
$$I_y = I_x; \quad I_x + I_y = I_z; \quad I_z = \frac{1}{2} I_x; \quad I_z = \frac{\pi}{64} D^4 = 0,05D^4; \quad w_z = w_y = 0,1D^3.$$



Круг с отверстием

$$I_x = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - c^4); \quad c = \frac{d}{D}.$$

$$I_y = I_x = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - c^4); \quad w_x = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - c^4); \quad w_y = w_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4).$$



Прямоугольник

$$I_x = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \frac{1}{3} \int_{(-h/2)^2}^{(+h/2)^2} dy = \frac{1}{3} b \cdot 2 \frac{h^3}{8};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad w_x = \frac{I_x}{h/2} \Rightarrow w_x = \frac{bh^2}{6}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad w_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики стандартных профилей



уголок



швеллер



двутавр



тавр



бульбугольник



z-овый профиль

Прочность, жесткость, устойчивость многих конструкций обеспечивается выбором **стандартизованных прокатных профилей**, удовлетворяющих этим требованиям при наименьших площадях поперечного сечения (а, следовательно, и массах).

Сопротивление материалов. Изгиб

Изгиб — поворот поперечных сечений бруса вокруг осей, лежащих в их плоскостях.

Из уравнения равновесия отсеченной части бруса определяются поперечные силы и изгибающие моменты, действующие в сечении, считаемся крайним.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = -P - q \cdot z; \quad \sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 \Rightarrow M = -P \cdot a - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + m.$$

Правила знаков

для перерезывающей силы

отсеченная часть — слева от «крайнего» сечения



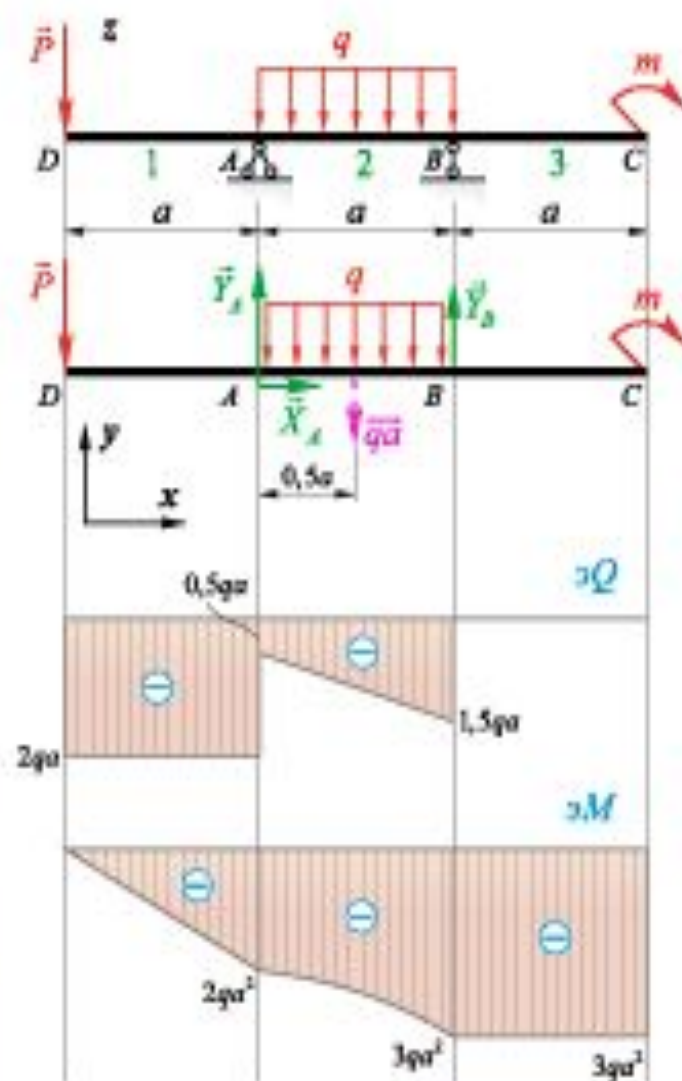
отсеченная часть — справа от «крайнего» сечения



для изгибающего момента



Сопrotивление материалов. Изгиб. Пример



$$P = 2qa; \quad m = 3qa^2.$$

Равновесие всей балки: $(\bar{P}; \bar{q}a; \bar{X}_A; \bar{Y}_A; \bar{Y}_B; m) \approx 0;$

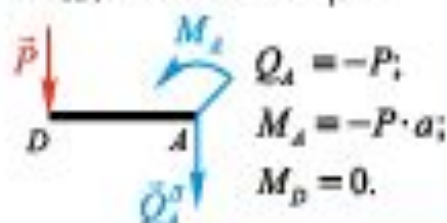
$$\sum F_x = 0 = X_A.$$

$$\sum \text{mom}_A \bar{P} = 0 = P \cdot a - qa \cdot 0,5a + Y_B \cdot a - m; \quad \Rightarrow Y_B = 1,5qa.$$

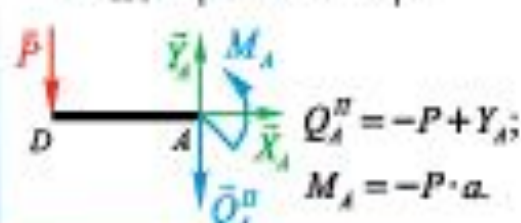
$$\sum \text{mom}_B \bar{P} = 0 = P \cdot 2a - Y_A \cdot a + qa \cdot 0,5a - m; \quad \Rightarrow Y_A = 1,5qa.$$

Равновесие отсеченных частей

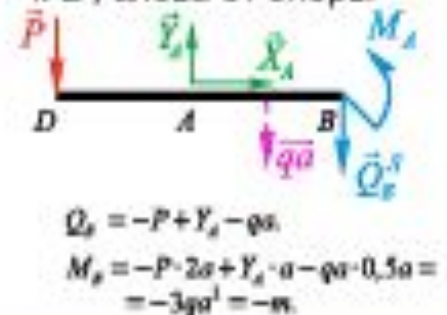
т. А, слева от опоры



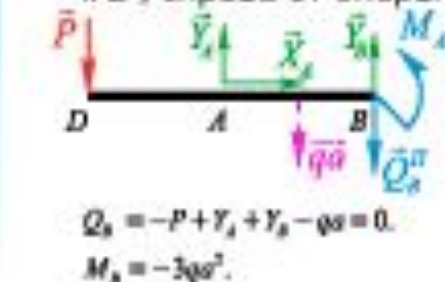
т. А, справа от опоры



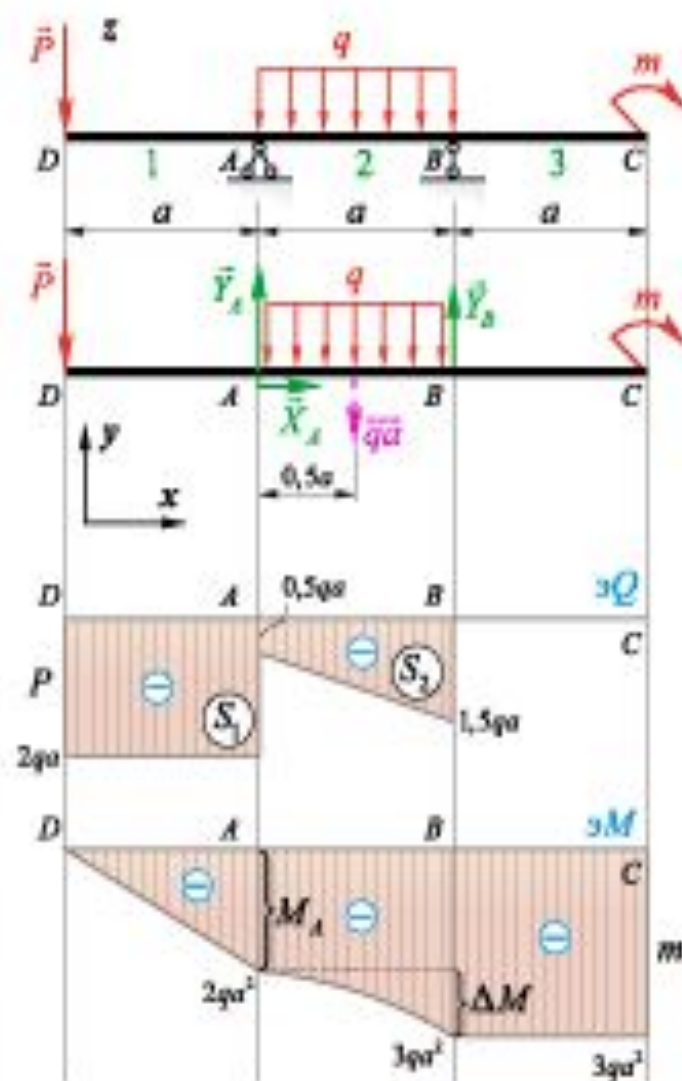
т. В, слева от опоры



т. В, справа от опоры



Сопротивление материалов. Изгиб. Комментарии к примеру



Эпюры zQ и zM обладают рядом свойств, используемых для решения задачи или его проверки.

Скачки (резкие изменения величины): на величину сосредоточенной силы на zQ (т. D ; т. A ; т. B); на величину момента сосредоточенной пары сил (т. C) на zM .

Интегро-дифференциальная связь:

с точностью до постоянных величин (сосредоточенных моментов пар сил) zM является интегралом zQ ;

zQ — производная zM .

Площадь S_1 равна M_A ; $S_2 = \Delta M$.

$Q(z)$ на участках 1 и 2 — отрицательна \Rightarrow

$\Rightarrow M(z)$ — убывающая функция.

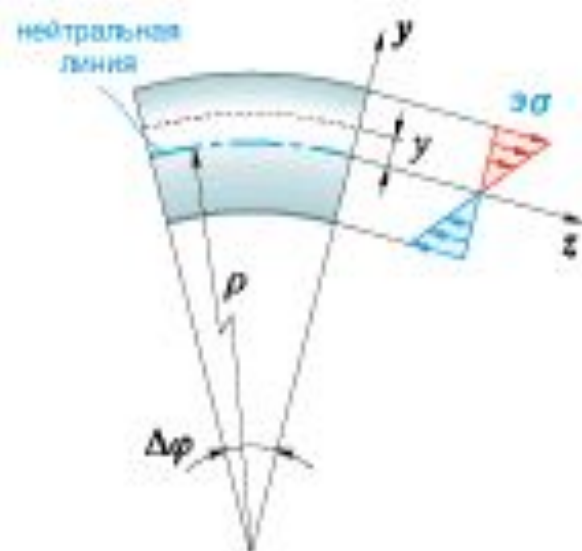
На участке 3 $Q(z) = 0 \Rightarrow M(z) = const = m$.

На участке 2 $Q(z)$ — линейная функция ($q = const$) \Rightarrow

$\Rightarrow M(z)$ изменяется по кривой 2-го порядка (параболе).

Построение эпюр может производиться из равновесия как «правой», так и «левой» части балки, результат должен быть одинаков.

Сопротивление материалов. Изгиб. Определение напряжений при изгибе



Нормальные напряжения в поперечном сечении считаются определяющими прочность металлических балок (брусьев).

Длина нейтральной линии совпадает с первоначальной длиной участка продольного волокна:

$$\Delta l_0 = \Delta \varphi \cdot \rho;$$

Длина деформированного волокна:

$$\Delta l_x = (\rho + y) \cdot \Delta \varphi;$$

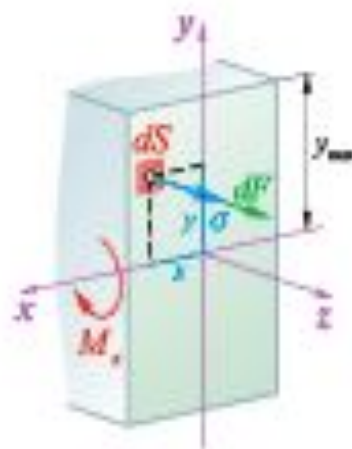
Деформация: $\varepsilon_y = \frac{\Delta l_x - \Delta l_0}{\Delta l_0} = \frac{\rho \cdot \Delta \varphi + y \cdot \Delta \varphi - \rho \cdot \Delta \varphi}{\rho \cdot \Delta \varphi};$

$$\varepsilon_y = \frac{y}{\rho}. \quad \rho \text{ — радиус кривизны нейтральной линии бруса в текущей точке.}$$

Напряжения в волокне — нормальные напряжения в поперечном сечении бруса.

В пределах упругости, когда справедлив закон Гука: $\sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \sigma_y = E \cdot \frac{y}{\rho}.$

Соппротивление материалов. Изгиб. Расчет на прочность



$$dF = \sigma \cdot dS$$

$$\sigma_y = E \frac{y}{\rho}$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении балки должны подчиняться условиям:

а) Сумма проекций сил dF на ось z равна 0:

$$\int E \frac{y}{\rho} dS = \frac{E}{\rho} \int y \cdot dS = 0 \Rightarrow \text{ось } x \text{ — центральная.}$$

б) Сумма моментов сил dF относительно оси y равна 0.

$$\int E \frac{y}{\rho} \cdot x \cdot dS = \frac{E}{\rho} \int y \cdot x \cdot dS = 0 \Rightarrow \text{оси } x \text{ и } y \text{ — главные.}$$

в) Сумма моментов сил dF образует изгибающий момент M_x .

$$M_x = \int E \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dS = \frac{E}{\rho} \int y^2 \cdot dS = \frac{E}{\rho} \cdot I_x; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

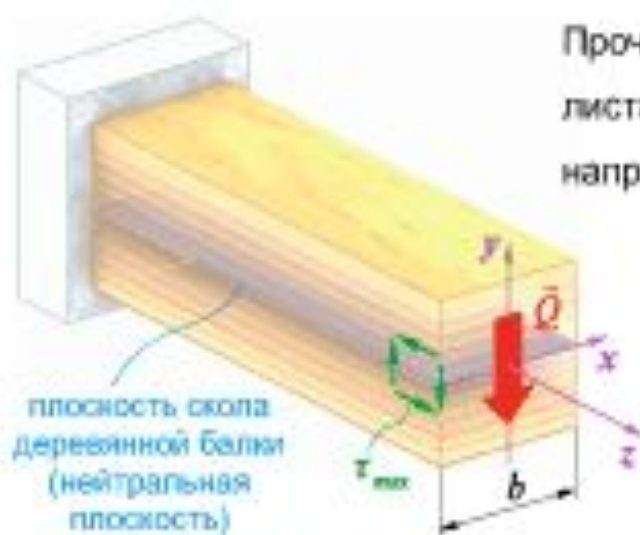
$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_y}{y} \Rightarrow M_x = \frac{\sigma_y}{I_x} \cdot y \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x / y_{\max}}$$

Прочность металлических (пластичных) балок оценивается:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] \text{ — допустимые напряжения; } \sigma_{\max} = \sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} \text{ — максимальные напряжения.}$$

Сопротивление материалов. Формула Журавского

Прочность деревянных и тонкостенных, выполненных из листа металла балок определяется касательными напряжениями, максимальными на нейтральной плоскости.



Максимальные касательные напряжения при изгибе вычисляются по формуле Журавского:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_x^{\max}}{b \cdot I_x}, \quad S_x^{\max} \text{ — статический момент отсеченной по нейтральной оси части сечений относительно этой оси; приводится в стандартах на прокат.}$$



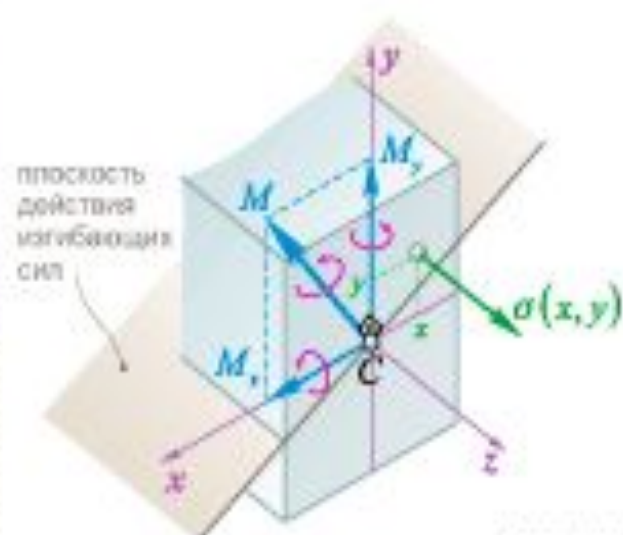
Касательными напряжениями вызываются «морщины» на обшивке фюзеляжа в его срединной плоскости

$$S_x^{\max} = S_{\text{сеч}} \cdot \frac{h}{4} = \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h}$$

$$\left. \begin{aligned} S_x^{\max} &= \frac{d^3}{12} \\ I_x &= \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{16}{3} \frac{Q}{\pi \cdot d^2}$$

Сопrotивление материалов. Косой изгиб



При **косом изгибе** плоскость действия изгибающих сил не содержит главных осей поперечного сечения бруса и не совпадает, поэтому, с плоскостью изгиба.

Изгибающий момент M представляется проекциями M_x, M_y на главные оси. По закону Гука и принципу суперпозиции:

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y.$$

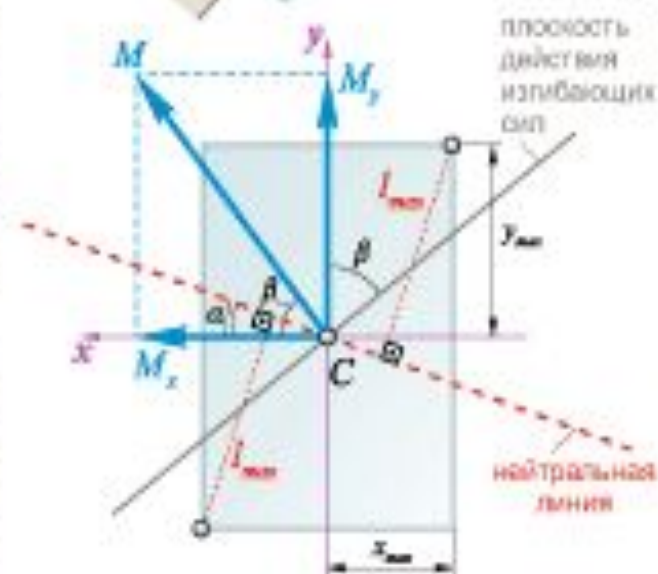
Уравнение нейтральной линии: $\sigma(x, y) = 0$.

$$y = -\frac{M_x}{M_y} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x.$$

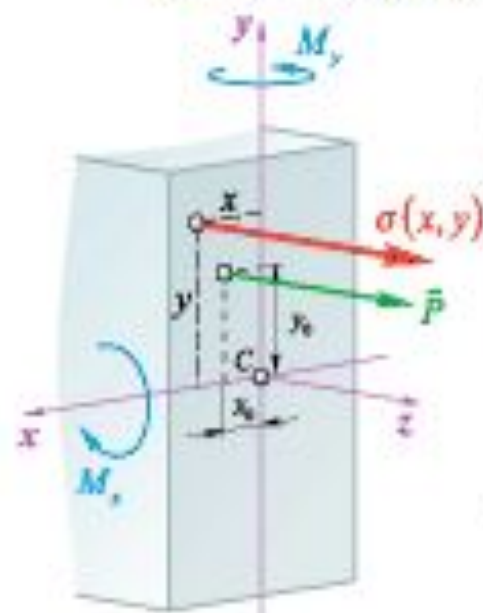
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_x}{M_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \frac{I_x}{I_y}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot x_{\max} + \frac{M_y}{I_y} \cdot y_{\max}.$$

x_{\max}, y_{\max} — координаты точки наиболее удаленной от нейтральной линии.



Сопротивление материалов. Внецентренное растяжение-сжатие



При **внецентренном растяжении-сжатии** линия действия сжимающих нагрузок не совпадает с осью бруса (линией, проходящей через центры тяжести его поперечных сечений).

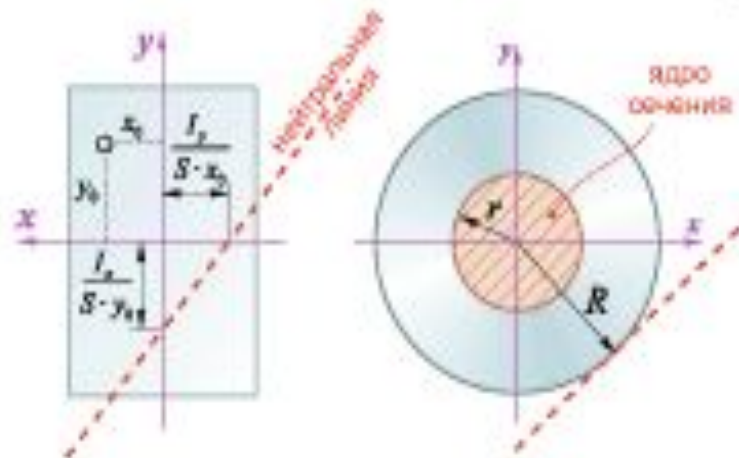
Брус испытывает растяжение-сжатие и кривой изгиб:

$$M_x = P \cdot y_0; \quad M_y = P \cdot x_0.$$

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{S} + \frac{P \cdot y_0}{I_x} \cdot y + \frac{P \cdot x_0}{I_y} \cdot x.$$

Уравнение нейтральной линии:

$$\frac{y_0}{I_x} \cdot y + \frac{x_0}{I_y} \cdot x + \frac{1}{S} = 0, \quad S — \text{площадь поперечного сечения.}$$



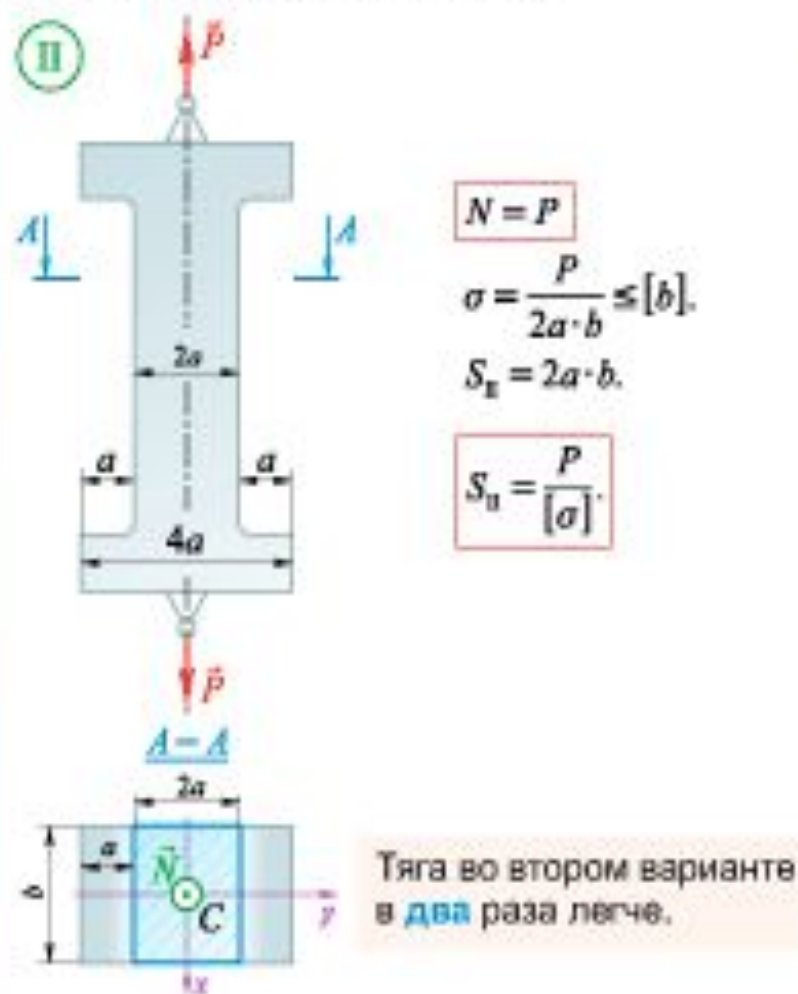
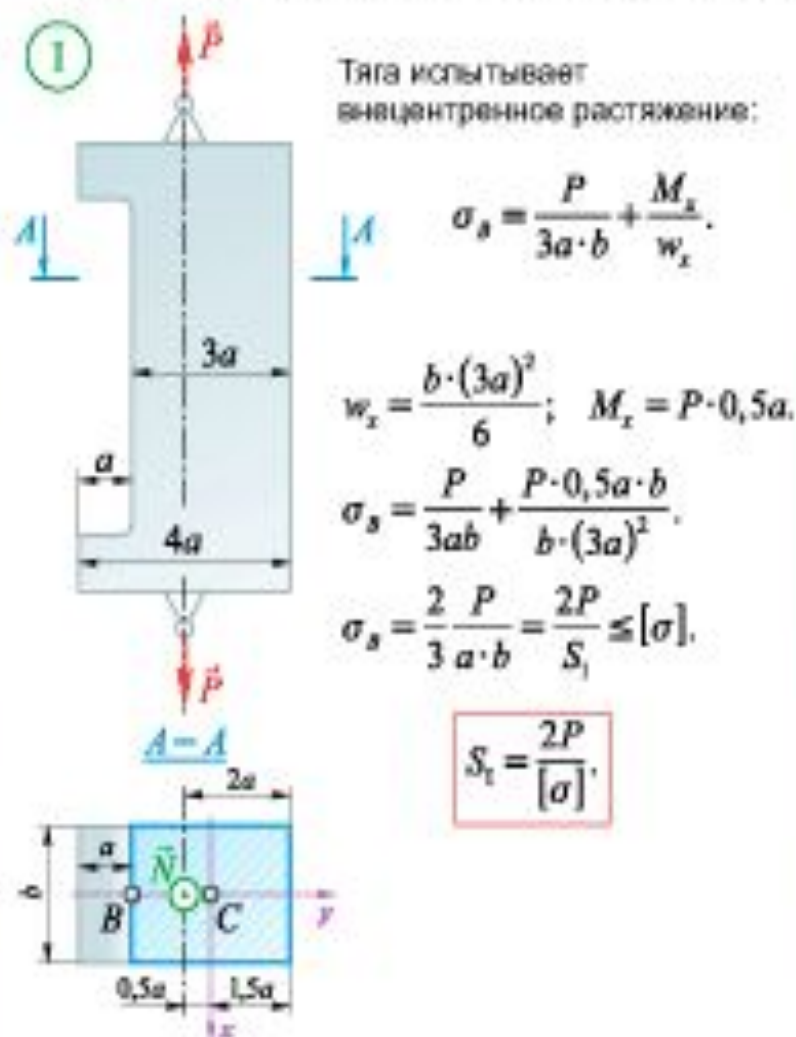
В ряде конструкций требуется, чтобы действующие напряжения были одного знака. Например, в каменных конструкциях напряжения должны быть сжимающими. Для этого нейтральная линия должна находиться вне сечения. Точки с координатами x_0, y_0 , удовлетворяющие этому требованию, образуют **ядро сечения**.

$$\text{Для круга: } I_x = I_y = \frac{\pi(2R)^4}{64}$$

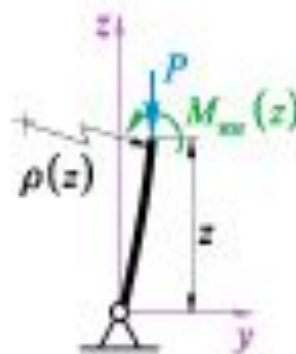
$$\frac{I_y}{S \cdot r} \geq R \Rightarrow r = \frac{\pi(2R)^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi(2R)^2 \cdot R}; \quad \boxed{r = \frac{R}{4}}$$

Сопротивление материалов. Внецентренное растяжение. Пример

Сравнить два варианта конструкции тяги, передающей усилие величиной P .



Сопrotивление материалов. Устойчивость сжатых стержней



Очевидно, существует соотношение P и l , при котором стержень изогнется — потеряет устойчивость.

Из равновесия отсеченной части: $P \cdot y(z) + M_{кр}(z) = 0$.

Из ранее приведенного: $M_{кр}(z) = \frac{E \cdot I_x}{\rho(z)}$.

Из дифференциальной геометрии: $\frac{1}{\rho(z)} \cong \frac{d^2 y(z)}{dz^2}$.

$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \frac{P}{E \cdot I_x} y(z) = 0$ — дифференциальное уравнение упругой линии стержня.

Функцией, обращающей уравнение в тождество, принимается

$y(z) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_x}} \cdot z\right)$ — проверяется непосредственной подстановкой.

Предпосылкой к потере устойчивости является выполнение

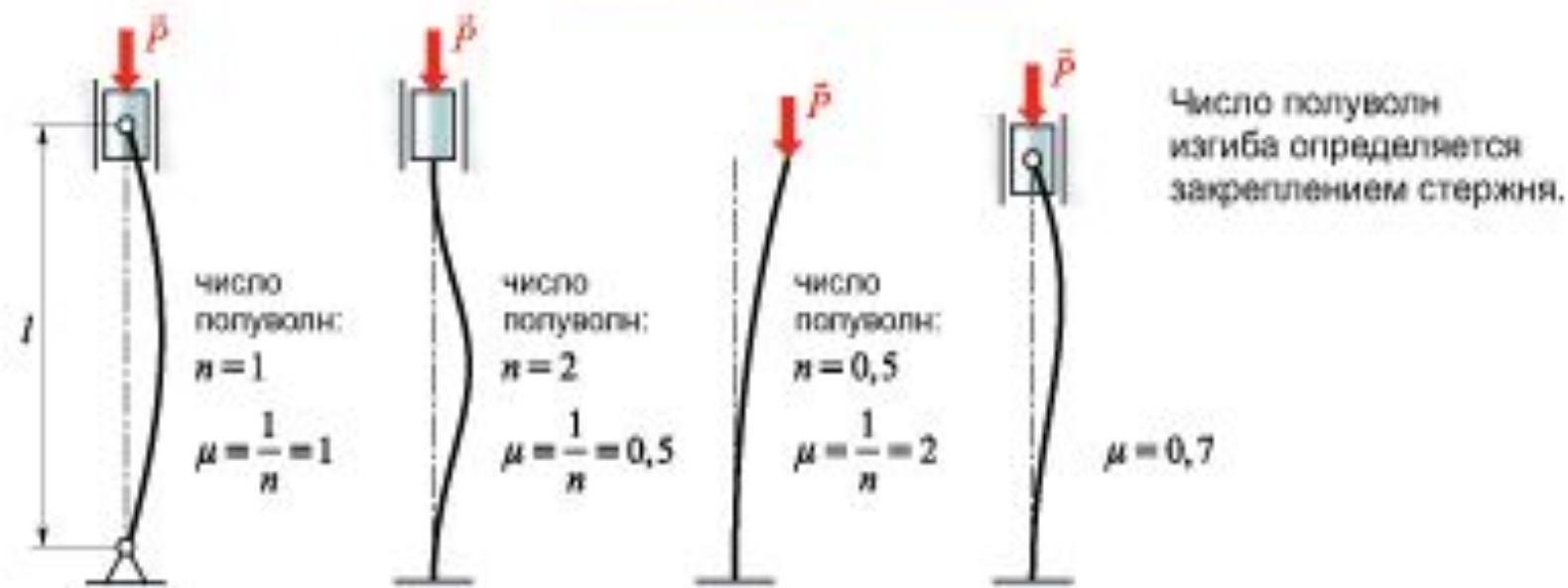
граничных условий при еще прямом стержне: $y(l) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_x}} \cdot l\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_x}} \cdot l = \pi n$.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 E \cdot I_x}{l^2} \quad \text{— формула Эйлера.}$$

n — число полуваги изгиба стержня;

I_x — наименьший из моментов инерции поперечного сечения стержня.

Сопротивление материалов. Расчет критических по устойчивости нормальных напряжений



Формула Эйлера записывается: $P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}$. Напряжение: $\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E \frac{I_x}{S(\mu l)^2}$;

$i = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ — радиус инерции поперечного сечения; $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гибкость стержня. $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
приводится в стандартах на прокат.

Применение формулы Эйлера ограничивается: $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{ст}}$.

Для $\sigma_{\text{кр}} \geq \sigma_{\text{ст}}$ (потеря устойчивости за пределами упругости) используют эмпирические формулы.

Формула Ф. С. Ясинского: $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$. Для многих сталей $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$.

Сопrotивление материалов. Устойчивость стержней. Пример



Определить диаметр штока цилиндра из условия устойчивости при $l = 1500$ мм; $T = 2 \cdot 10^4$ Н. Запас устойчивости $[n_s] = 2$.

Критическое усилие с учетом коэффициента запаса: $P_{\varphi} \geq 2T$; $P_{\varphi} = 4 \cdot 10^4$ Н.

Равновесие отсеченной части аналогично классической задаче. Поэтому:

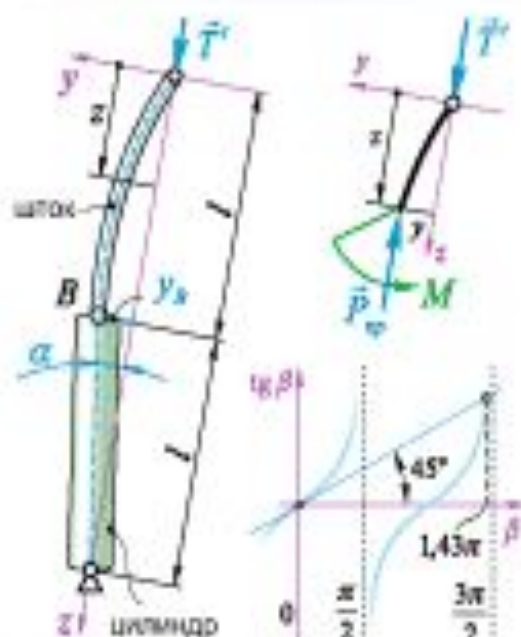
$$y(z) = A \sin \left(z \sqrt{\frac{P_{\varphi}}{EI}} \right).$$

Условие закрепления штока гидроцилиндра: $y_s = l \cdot \operatorname{tg} \alpha = A \sin \left(l \sqrt{\frac{P_{\varphi}}{EI}} \right)$.

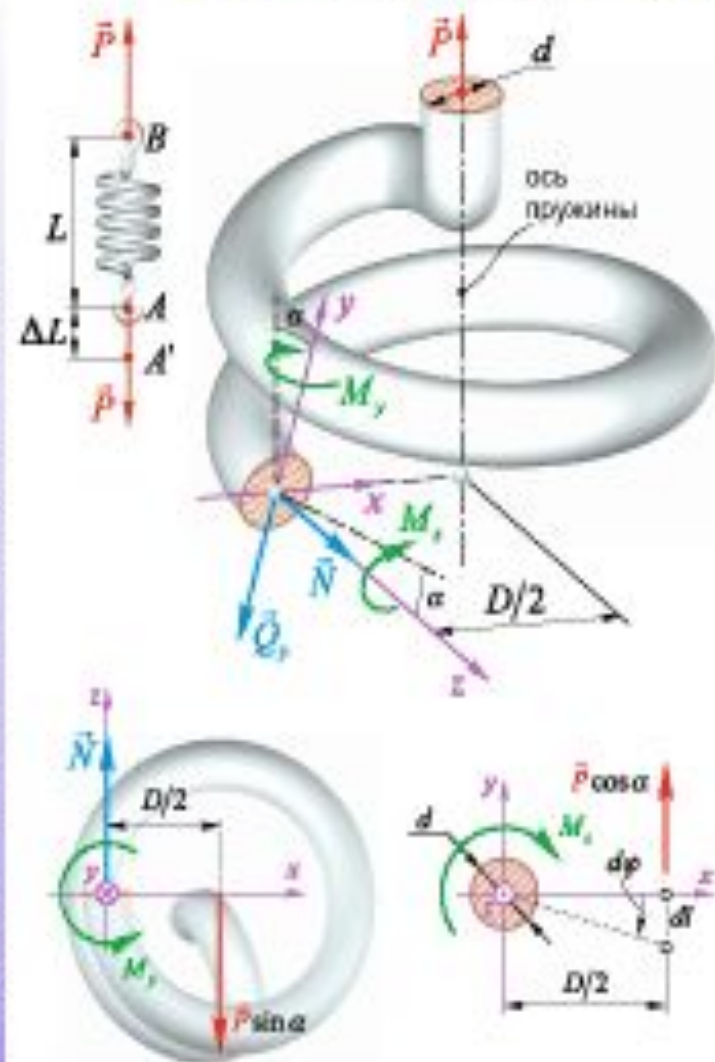
По смыслу первой производной: $\operatorname{tg} \alpha = A \sqrt{\frac{P_{\varphi}}{EI}} \cdot \cos \left(l \sqrt{\frac{P_{\varphi}}{EI}} \right)$.

Получим: $l \cdot \sqrt{\frac{P_{\varphi}}{EI_{\varphi}}} = \beta = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \beta = 1,43\pi$; $\frac{P_{\varphi}}{EI_{\varphi}} l^2 = 1,43^2 \pi^2 = 20,2$.

$$I_{\varphi} = \frac{P_{\varphi} l^2}{20,2 E} = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64 P_{\varphi} l^2}{20,2 \pi E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 1,5^2}{20,2 \pi \cdot 2 \cdot 10^{11}}} = 26 \text{ мм}.$$



Сопротивление материалов. Расчет витых цилиндрических пружин



В поперечном сечении витка, составляющем угол α с осью пружины, действуют:

$$\begin{cases} Q_z = -P \cos \alpha & \text{— поперечная сила;} \\ M_z = -P \cos \alpha \frac{D}{2} & \text{— крутящий момент;} \\ N = P \sin \alpha & \text{— нормальная сила;} \\ M_y = P \sin \alpha \frac{D}{2} & \text{— изгибающий момент.} \end{cases}$$

Определяющим прочностью при $\cos \alpha \approx 1$ считается крутящий момент:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{P \cdot D \cdot 16}{2\pi \cdot d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

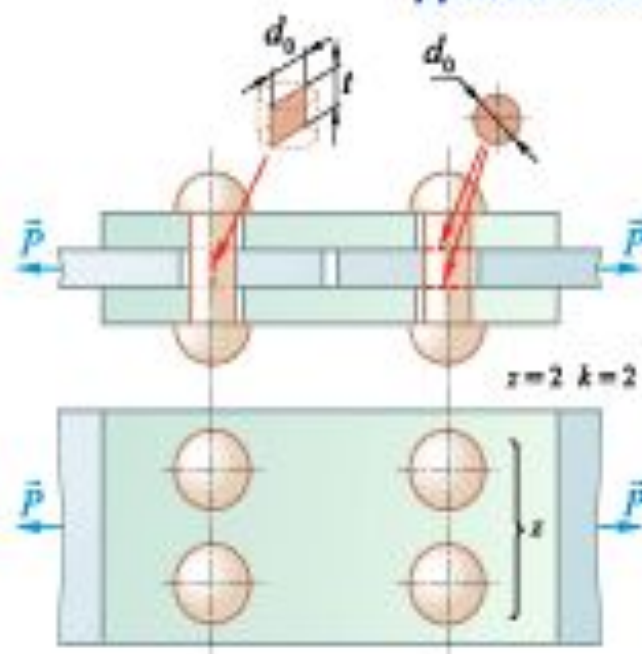
Смещение концов пружины друг относительно друга может быть получено из картины деформирования витков при кручении:

$$d\bar{l} = \frac{D}{2} d\varphi.$$

$$\Delta L = \frac{D}{2} \cdot \varphi = \frac{D M_z L}{2 GI} = \frac{D PD}{2 \cdot 2 G} \cdot \frac{1}{\pi d^4} \cdot \frac{n \cdot \pi D^3 \cdot 32}{\pi d^4} = 8 \frac{P D^3}{G d^4} \cdot n.$$

Жесткость пружины $c = \frac{P}{\Delta} = \frac{Gd^4}{8D^3n}$, n — число витков.

Детали машин. Заклепочные соединения



Заклепочные соединения до сих пор применяются в тяжелом самолетостроении, строительстве мостов, кораблестроении. Склепываются звенья цепных передач. Аналогично заклепочным рассчитываются на прочность соединительные элементы звеньев гусениц танков и тракторов.

Прочность заклепок на срез:

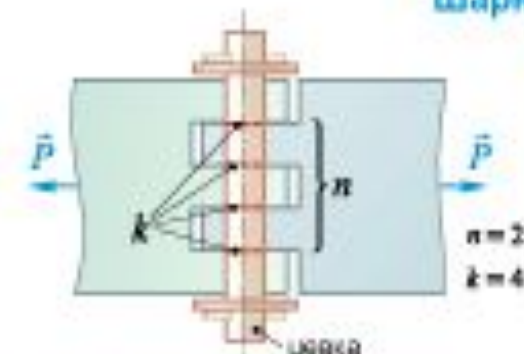
$$\tau_{\varphi} = \frac{P}{S_{\varphi}} = \frac{P}{kz \frac{\pi d_0^2}{4}} \leq [\tau_{\varphi}].$$

Расчет на смятие поверхности соединяемых деталей ведется по **условной** площади смятия:

$$\sigma_{\omega} = \frac{P}{S_{\omega}} = \frac{P}{z d_0 t} \leq [\sigma_{\omega}].$$

z — число заклепок;
 k — число поверхностей среза заклепки (цели);
 P — сила, приходящаяся на один лист.

Шарнирное соединение звеньев гусеницы



$$\tau_{\varphi} = \frac{P}{S_{\varphi}} = \frac{P}{k \frac{\pi d_0^2}{4}} \leq [\tau_{\varphi}].$$



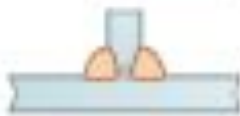

$$\sigma_{\omega} = \frac{P}{S_{\omega}} = \frac{P}{n d_0 t} \leq [\sigma_{\omega}].$$

n — число «внутренних» петель шарнира;

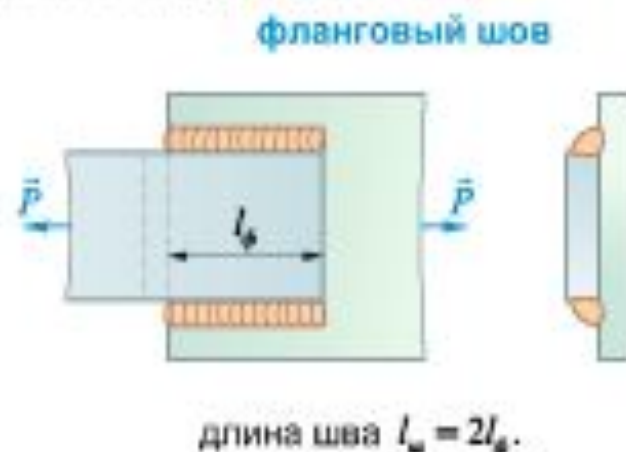
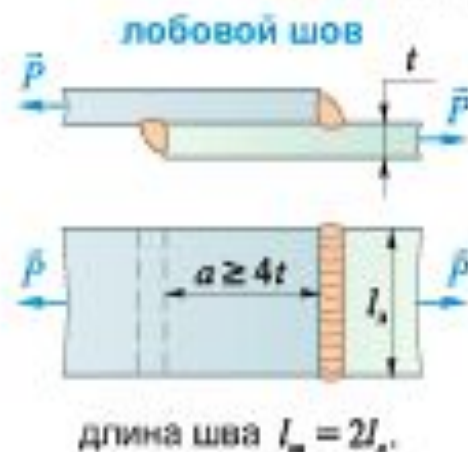
Для конструкционных сталей $[\tau_{\varphi}] \approx 140 \text{ МПа}$; $[\sigma_{\omega}] = 280 + 320 \text{ МПа}$.

Детали машин. Сварные соединения

Сварные соединения подразделяются на виды:

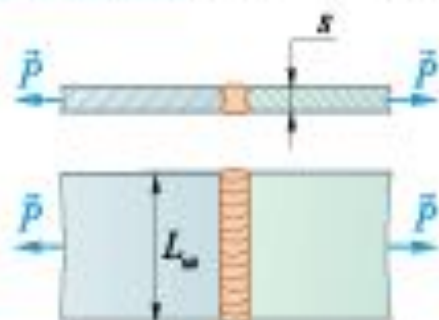
- | | | |
|--------------|---|---|
| стыковое |  | — условные обозначения: $C4...C11$
(по толщине свариваемых деталей $2+60$ мм); |
| нахлесточное |  | — условные обозначения: $H1, H2$ ($2+60$ мм); |
| тавровое |  | — условные обозначения: $T3$ ($2+30$ мм); |
| угловое |  | — условные обозначения: $У4$ ($1+30$ мм). |

В зависимости от ориентации шва и нагрузки различают:



Детали машин. Сварные соединения. Расчет на прочность

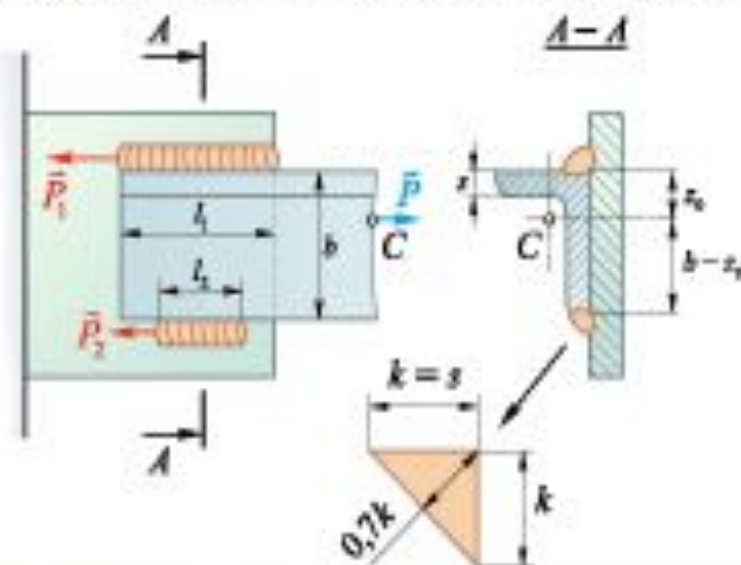
Стыкочное (шов — лобовой) соединение рассчитывается на растяжение (сжатие):



$$\sigma'_p = \frac{P}{SL_w} \leq [\sigma'_p]; \quad \sigma'_c = \frac{P}{SL_w} \leq [\sigma'_c].$$

Для сварки под флюсом или в защитной среде величины $[\sigma'_p]$ и $[\sigma'_c]$ совпадают с аналогичными величинами для материала деталей: $[\sigma'_p] = [\sigma_p]$; $[\sigma'_c] = [\sigma_c]$.

Соединения в нахлест рассчитываются на срез по наименьшему по площади продольному сечению шва:



$$S_{ср} = 0,7k \cdot L_w; \quad \tau' = \frac{P}{0,7kL_w} = [\tau'].$$

k — катет шва, $k = s$; $L_w = l_1 + l_2$.

$[\tau'] = 0,6 + 0,65[\sigma_p]$ материала деталей.

При использовании уголкового профиля требуется их работа без изгиба; сила P должна быть приложена в центре тяжести сечения:

$$P_1 z_0 = P_2 (b - z_0) \Rightarrow l_2 = l_1 \frac{z_0}{b - z_0}.$$

Детали машин. Резьба

Резьба — выполненные по винтовой линии на поверхности вращения (цилиндрической или конусной) выступы (углубления).

Стандартизованные обозначения:

P — **шаг резьбы** — измеренное вдоль образующей расстояние между одинаковыми точками **соседних витков** резьбы;

P_h — **ход резьбы** — измеренное вдоль образующей расстояние между одинаковыми точками **одного витка** резьбы;

n — число заходов резьбы;

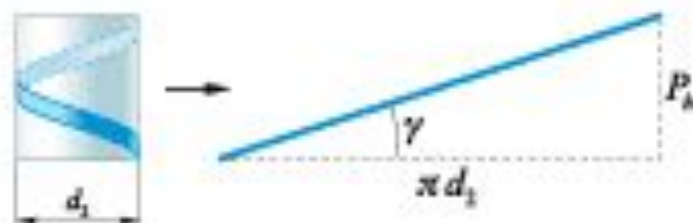
h — высота витка резьбы;

d_1 — внутренний диаметр резьбы;

d — наибольший (номинальный) диаметр резьбы;

d_2 — средний диаметр резьбы (диаметр цилиндра, по образующей которого ширина впадин равна ширине выступа);

γ — угол подъема резьбы;



$$P_h = n \cdot P;$$

$$d_1 = d - 2h;$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{P_h}{\pi d_2}.$$

Детали машин. Типы резьб и резьбовых соединений

Типы резьб определяются назначением и профилем витка:

Крепежные



метрическая



трубная



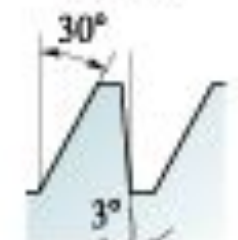
круглая

Соотношения параметров резьб (кроме прямоугольной) стандартизованы.

Ходовые



трапециевидальная



упорная



прямоугольная

Охватываемая деталь резьбового соединения — **гайка**, охватываемая деталь — **винт**.

Болтовое соединение

гайка накручивается на болт



Винтовое соединение

винт вворачивается в одну из деталей

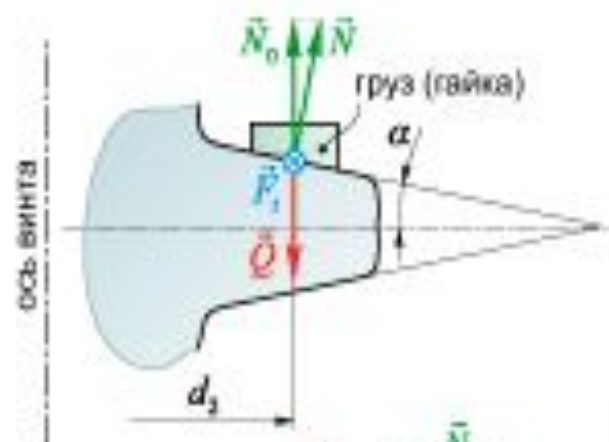


Шпильчатое соединение

шпилька имеет резьбу с двух концов



Детали машин. Силовые соотношения в резьбе

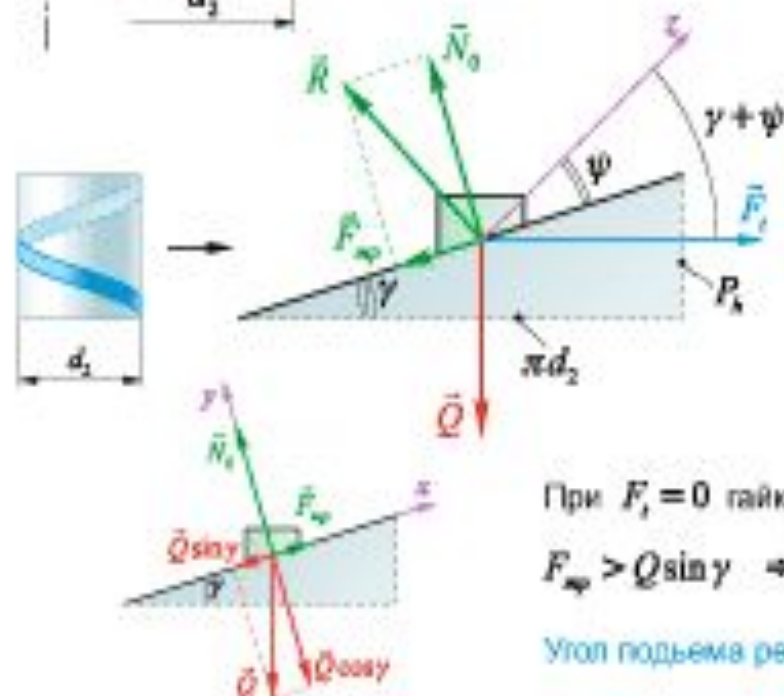


Силовые соотношения в резьбе имитируются равновесием груза (гайки) на наклонной плоскости витка резьбы на винте.

α — угол профиля витка резьбы;

Q — сила затяжки, осевая сила, действующая на гайку;

F_t — окружная сила.



$$N_0 = N \cos \alpha; \quad N = \frac{N_0}{\cos \alpha}$$

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow F_t \cos(\gamma + \psi) = Q \sin(\gamma + \psi);$$

$$F_t = Q \operatorname{tg}(\gamma + \psi).$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{F_w}{N_0} = \frac{F_w}{N \cos \alpha} = \frac{f \cdot N}{N \cdot \cos \alpha} = \frac{f}{\cos \alpha}.$$

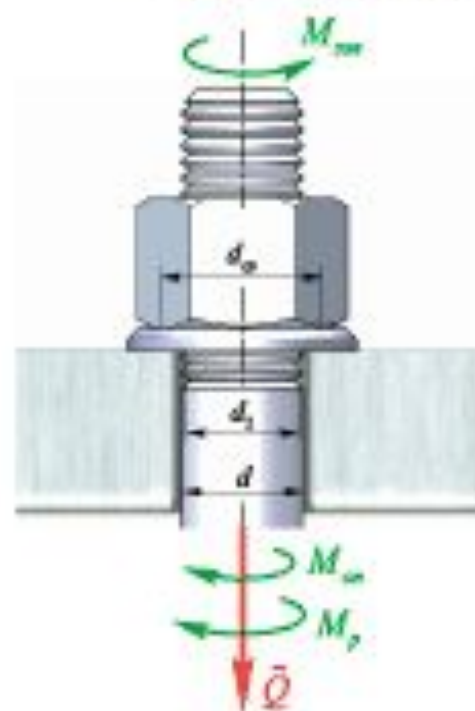
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos \alpha} \quad \text{— приведенный угол трения в резьбе.}$$

При $F_t = 0$ гайка не будет раскручиваться (самотормозиться), если

$$F_w > Q \sin \gamma \Rightarrow f N > \frac{N_0 \sin \gamma}{\cos \gamma} \Rightarrow f \frac{N_0}{\cos \alpha} = N_0 \operatorname{tg} \gamma; \quad \operatorname{tg} \psi > \operatorname{tg} \gamma.$$

Угол подъема резьбы должен быть меньше приведенного угла трения.

Детали машин. Силовые соотношения в крепежных соединениях



Для завинчивания гайки необходимо преодолеть момент сил трения на опорной поверхности гайки $M_{тр}$ и момент сил, действующих в резьбе $M_р$:

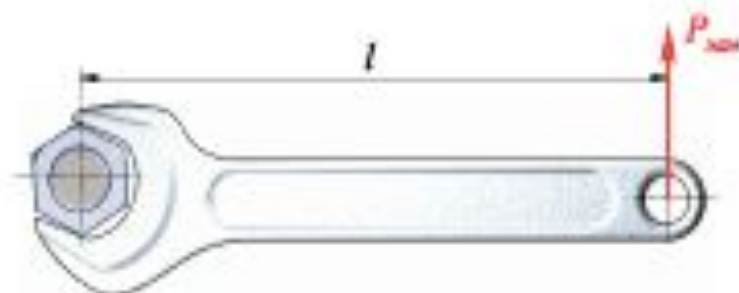
$$M_{зв} = M_{тр} + M_р.$$

Из предыдущего: $M_р = \frac{1}{2} F_r d_2 = Q \operatorname{tg}(\psi + \gamma) \cdot 0,5 d_2$.

Принимается: $M_{тр} = Q \cdot f \cdot 0,5 d_2$; $d_1 = 0,9 d$; $d_2 = 1,4 d$;

$$M_{зв} = Q \cdot 0,5 d \cdot (1,4 f + 0,9 \operatorname{tg}(\psi + \gamma));$$

При предварительных расчетах с учетом стандартизованных соотношений $M_{зв} = 0,2 Q d$.

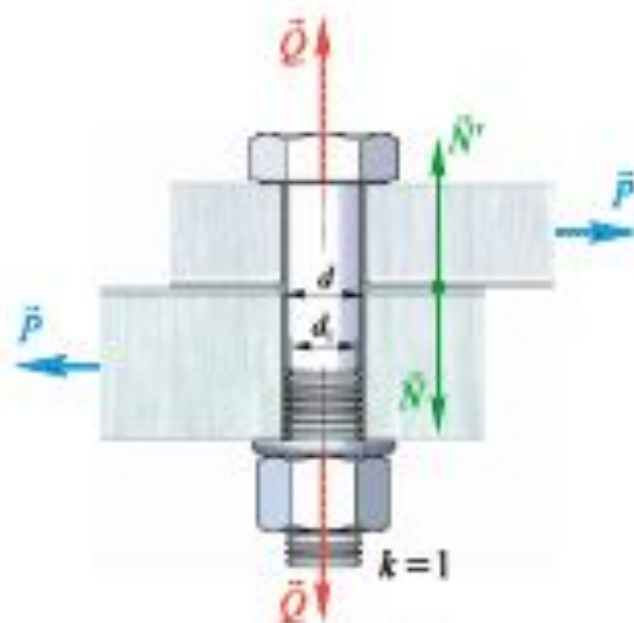


При затяжке гаечным ключом: $P_{зв} = \frac{M_{зв}}{l}$.

Для малых резьб ($d \leq 10$) $l \approx 15d$.

Для остальных $P_{зв} \leq 200 \text{ Н}$, $l = \frac{M_{зв}}{200} [\text{м}]$.

Детали машин. Нагрузка в крепежных резьбовых соединениях



При нагрузке поперечной силой:

Болт садится с зазором — неподвижность соединения обеспечивается за счет сил трения.

$$fkN \geq \beta P, \quad N = Q \cdot z, \quad Q = \frac{\beta P}{fzk}$$

- k — число плоскостей трения;
- z — число болтов;
- β — коэффициент запаса.

При посадке болта без зазора соединение рассчитывается как заклепочное с диаметром заклепки d_1 .

Клеммовое соединение

Для надежной работы (без проскальзывания) клеммового соединения требуется:

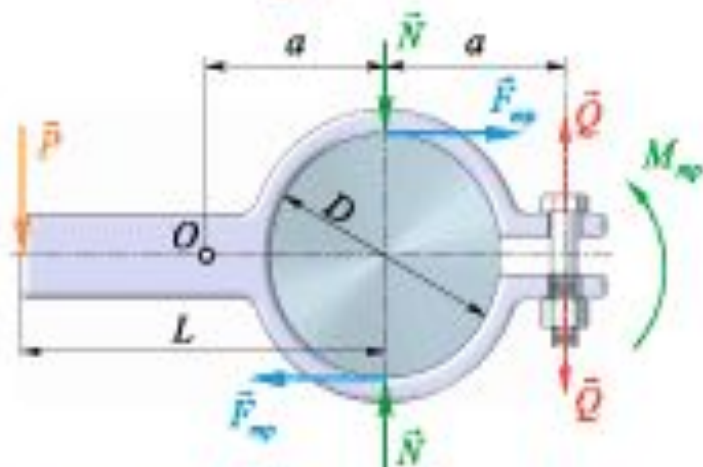
$$\beta PL \leq M_{\text{тр}}$$

$M_{\text{тр}}$ — момент сил трения на поверхности соприкосновения рычага и вала (клеммы). Оценивается в виде:

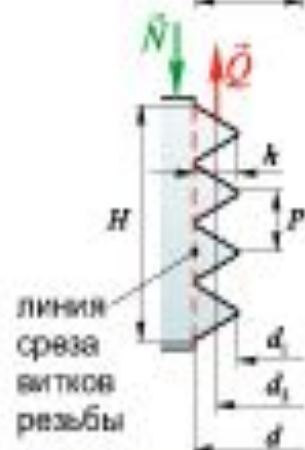
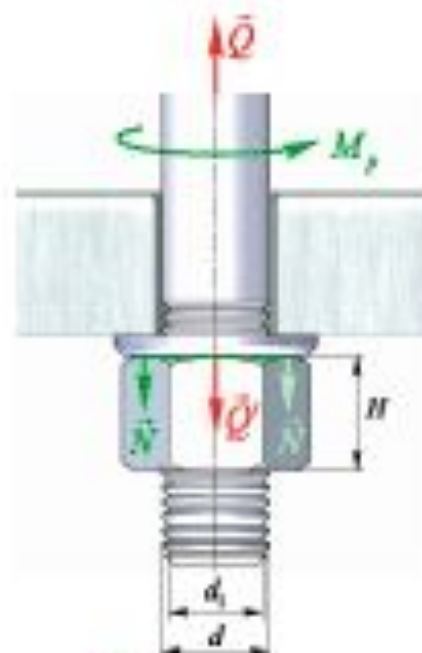
$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} D = fND,$$

$\sum \text{mom}_O \vec{F} = 0$; точка O принимается за шарнир при затяжке.

$$F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow Na - z2aQ = 0, \quad N = 2Qz; \quad Q = \frac{\beta PL}{2fDz}$$



Детали машин. Расчет крепежного резьбового соединения на прочность



Соединение может разрушаться из-за:

- среза резьбы по поверхности, образуемой основаниями витка резьбы: $S_{\sigma} \approx \pi d H$;
- смятия витков резьбы по поверхности: $S_{\sigma} \approx h \frac{H}{P} \pi d_2$;
- разрушения болта, работающего на растяжение с силой Q и кручение с моментом M_p — моментом в резьбе, действующим со стороны гайки на болт.

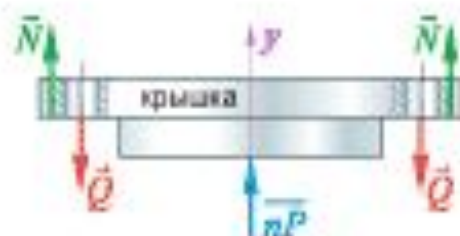
Стандартом предусмотрена равнопрочность соединения. Выбор параметров резьбового соединения производится по прочности болта.

$$\sigma_p = \frac{Q_p \cdot 4}{\pi d_1^2}; \quad \tau_{\sigma} = \frac{M_p}{w_p} \approx \frac{0,5 d_2 \cdot Q_{\text{зам}} \operatorname{tg}(\psi + \gamma)}{0,2 d_2^3}; \quad \sigma_{\text{зам}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_{\sigma}^2}$$

Если растяжение болта вызвано только его затяжкой ($Q_p = Q_{\text{зам}}$) то для стандартных резьбовых соединений принимают $\sigma_{\text{зам}} = 1,3 \sigma_p$.

$$\frac{1,3 Q \cdot 4}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p]; \quad d_1 = \sqrt{\frac{5,2 Q}{\pi [\sigma_p]}}; \quad d \text{ подбирается по справочникам в соответствии с } d_1$$

Детали машин. Расчет герметизирующего резьбового соединения



Осуществляется предварительная затяжка T каждого болта.

С этой же силой поджимается прокладка. После сборки конструкции на крышку действует сила $n\bar{P}$, n — количество болтов.

Из равновесия крышки: $\sum F_y = 0 \Rightarrow nP = nQ - nN$.

Силу Q растяжения болта представляют: $Q = T + \kappa P$.

Сжатие прокладки ослабевает: $N = T - \Delta N$;

$$P = T + \kappa P - T + \Delta N \Rightarrow \Delta N = (1 - \kappa)P.$$

Дополнительное удлинение болта равно утолщению прокладки.

λ_s, λ_n — удлинение болта, прокладки под действием единичной силы.

Условие совместности деформаций: $\lambda_s x P = \lambda_n (1 - x) P$, $x = \frac{\lambda_n}{\lambda_s + \lambda_n}$.

$$N = T - (1 - x)P.$$

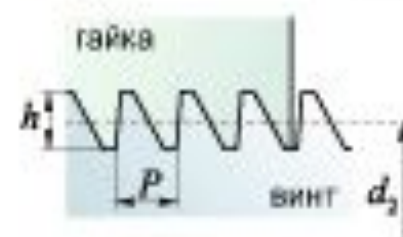
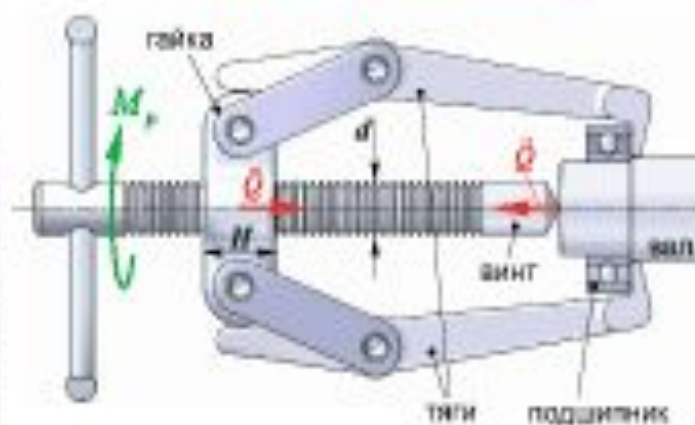
Недопустимо $N = 0 \Rightarrow T = (1 - x)P$.

Назначают $T = \beta(1 - x)P$; β — коэффициент запаса.

При $P = const$ $\beta = 1,5$; при переменном P $\beta = 4$.

Детали машин. Передача винт-гайка

Съемник подшипника



Передача винт-гайка предназначена для преобразования одного в другое вращательного и поступательного движения. Применение от сверхточных механизмов до тяжело нагруженных.

Проектный расчет ведется по допустимому среднему давлению q в витках резьбы, обеспечивающему приемлемый износ за время эксплуатации.

$$q_r \leq [q].$$

Площадь опорной поверхности витков $S = \pi d_2 z \cdot h = \pi d_2 \frac{H}{P} h$.

При проектировании задаются $\psi_A = \frac{h}{P}$; $\psi_N = \frac{H}{d_2}$.

$$q_r = \frac{Q}{S} \Rightarrow d_2 \geq \sqrt{\frac{Q}{\pi \cdot \psi_A \cdot \psi_N [q]}} \quad \begin{matrix} \psi_A = 0,5 - 0,75; \\ \psi_N = 2,5 - 3,5. \end{matrix}$$

Для пары сталь-чугун: $[q_{c,ч}] = 4 \div 5 \text{ МПа}$,

сталь-бронза: $[q_{c,б}] = 10 \text{ МПа}$.

Работа, затрачиваемая на функционирование механизма при повороте винта на 2π радиан:

$$A_r = M_r \cdot 2\pi = 0,5 Q d_2 \operatorname{tg}(\psi + \gamma) = \pi d_2 \operatorname{tg}(\psi + \gamma) \cdot Q.$$

Полезная работа по перемещению гайки:

$$A_n = Q \cdot P_n = \pi d_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot Q.$$

К.П.Д. передачи винт-гайка: $\eta = \frac{A_n}{A_r} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \psi)}$. При условии самоторможения $\eta < 0,5$.

Детали машин. Фрикционные передачи

Лобовой вариатор

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 x;$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{x}.$$



Фрикционные передачи используются в основном в качестве **вариаторов** — устройств, предназначенных для бесступенчатого изменения соотношения угловых скоростей зацепляемых валов без их остановки.

Передаваемая мощность вариаторов ограничивается наличием скольжения, и, следовательно, выделением тепла.

На участке $\frac{b}{2} + \Delta$ скорости точек ролика больше скорости точек диска; на участке $\frac{b}{2} - \Delta$ — наоборот.

$$\sum \text{мом}_x F = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{N}{b} \cdot f \cdot \frac{d_1}{2} \left[\frac{b}{2} + \Delta - \left(\frac{b}{2} - \Delta \right) \right]; \quad \Delta = \frac{M_1 b}{f \cdot N \cdot d_1}.$$

$f \frac{N}{b}$ — сила трения на единицу длины размера b .

Максимальная скорость скольжения:

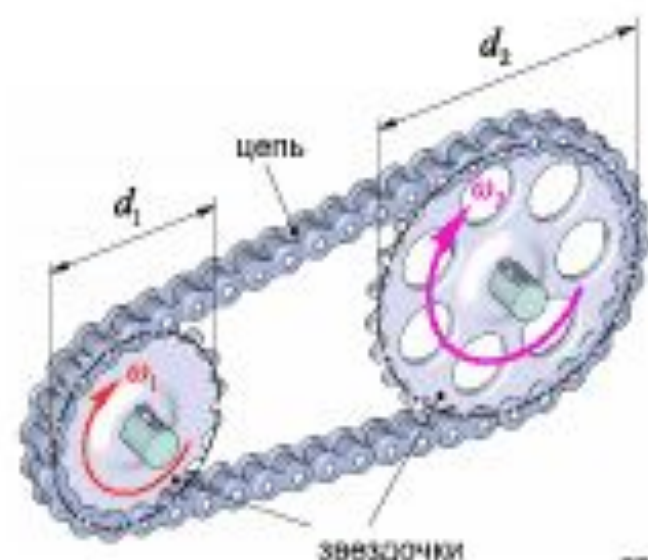
$$\Delta V_{\max} = \omega_2 (x + \Delta) - \omega_1 \left(x - \frac{b}{2} \right); \quad \Delta V_{\max} = \omega_2 \left(\frac{b}{2} + \Delta \right).$$

Величины N и b ограничиваются допустимым контактным напряжением.

Для лобового вариатора: $\rho_1 = r_1$, $\rho_2 = \infty$, $\frac{1}{\rho_{\text{эф}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{r_1}$.

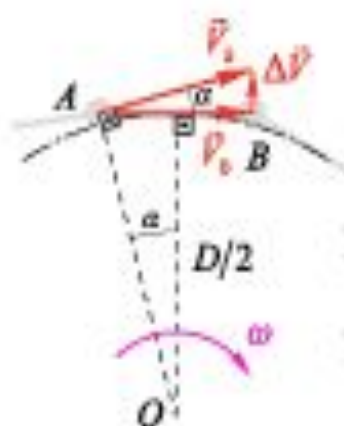
Формула Герца: $\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{N \cdot E}{b \cdot r_1}} \leq [\sigma_H]$, $[\sigma_H] \approx 1000 \text{ МПа}$ (для закаленных сталей).

Детали машин. Цепные передачи



Цепные передачи предназначены для передачи значительных мощностей между далеко отстоящими друг от друга валами. Применяются также при необходимости неизменного взаиморасположения таких валов в течение всего времени эксплуатации.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}, \quad \begin{array}{l} z_1 \text{ — число зубьев на входном} \\ \text{(ведущем) звене;} \\ z_2 \text{ — число зубьев на ведомом звене.} \end{array}$$

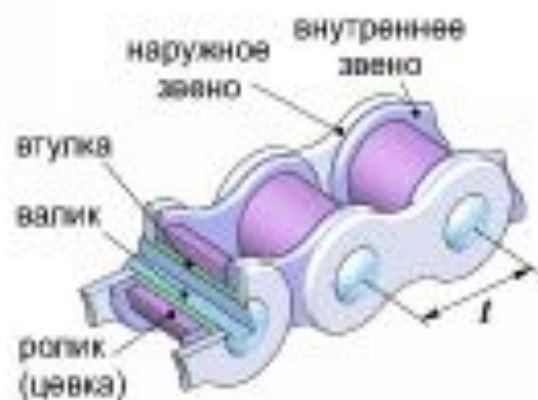


$$V_s = \frac{1}{2} \omega D;$$

$$V_k = \frac{1}{2} \omega \frac{D}{\cos \alpha};$$

$$\Delta V = \frac{1}{2} \omega D \operatorname{tg} \alpha$$

— изменение скорости точки A при укладке звена на звездочку. Объясняется мгновенным переходом движения звена цепи от поступательного (V_s) к вращательному со скоростью точки A V_k . Вызывает колебания цепи и цикличность числа i , служит ограничением величин угловых скоростей валов передачи.



Валик запрессован в наружное звено, втулка — во внутреннее. Втулка и валик образуют подшипник скольжения. Ролик свободно одевается на втулку, уменьшает износ звездочки.

Детали машин. Ременные передачи







Ременные передачи предназначены для передачи вращения на большие расстояния (до 15 м), обладают плавностью хода и бесшумностью работы.

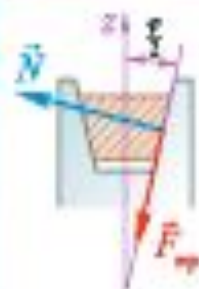
Недостатки: вытяжка ремней со временем; повышенные нагрузки на валы из-за натяжения ремней.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Выгнутость на одном из шкивов обеспечивает устойчивость движения плоского ремня.

Виды ремней:

-  — круглые (самые дешевые, применяются в неответственных, маломощных установках);
-  — плоские (наиболее жесткие, применяются в передачах с высокими требованиями к постоянству числа i);
-  — зубчатые (применяются для исключения проскальзывания);
-  — клиновые (применяются для тяжело нагруженных передач).



Условие расклинивания:

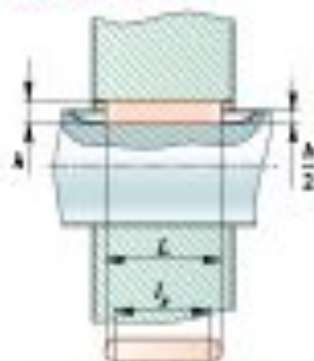
$$N \sin \frac{\varphi}{2} \geq F_{\text{пр}} \cos \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} \geq f$$

f — коэффициент трения между ремнем и шкивом.

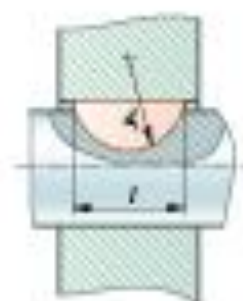
Детали машин. Разъемные неподвижные соединения

Для соединения валов с маховиками, колесами, кулачками и т. д. применяются **шпонки**, **шлицы** и **штифты**.

Виды шпонок:



призматические,
применяются в
обычных случаях



сегментные,
наиболее технологичные
(дешевые)



клиновые,
при передаче больших
крутящих моментов

Шпонки рассчитываются на срез и смятие по стандартным формулам.

Шлицы применяются для хорошего центрирования соединения и передачи значительных моментов.

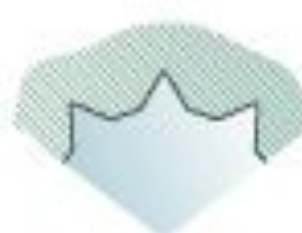
Виды шлицевых соединений:



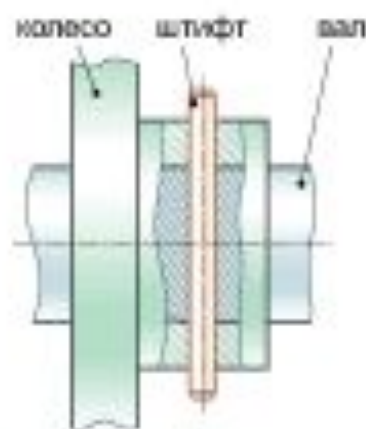
прямобоковые
подвижные, легко
нарезаются,
не поддаются шлифовке



эвольвентные
подвижные, шлифуются
специальными кругами



треугольные
неподвижные



Штифты применяются для
кинематических,
слабонагруженных передач

Детали машин. Теорема зацепления

Зацепляются абсолютно твердые тела. Поэтому проекции скоростей соприкасающихся точек A_1 и A_2 на общую нормаль к поверхностям равны между собой.

$$V_A^{(1)} = \omega_1 O_1 A_1; \quad V_A^{(2)} = \omega_2 O_2 A_2.$$

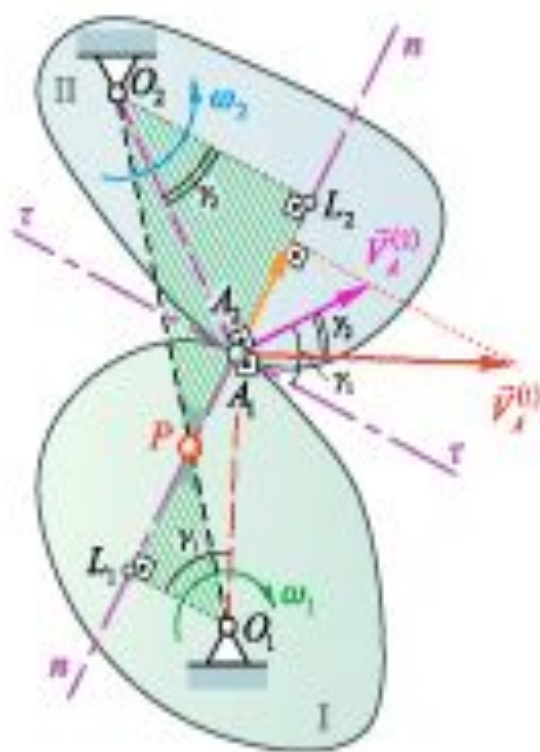
$$\omega_1 O_1 A_1 \cos \gamma_1 = \omega_2 O_2 A_2 \cos \gamma_2;$$

$$\omega_1 O_1 L_1 = \omega_2 O_2 L_2.$$

Треугольники $O_1 L_1 P$ и $O_2 L_2 P$ подобны, т. к. имеют вертикальный угол.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}; \quad i — \text{передаточное отношение.}$$

$$i = \text{const, если } \frac{O_2 P}{O_1 P} = \text{const.}$$



Нормаль к соприкасающимся поверхностям — линия зацепления.

Точка пересечения линии зацепления и межосевой прямой $O_1 O_2$ — полюс зацепления P .

Теорема зацепления: для постоянства передаточного отношения i требуется неизменность положения полюса зацепления P относительно остова (корпуса) механизма.

Детали машин. Зубчатые колеса

Для любого профиля зуба одного из колес можно найти профиль зуба на другом колесе такой, что выполняются требования теоремы зацепления. Применяются зацепления:

Цевочное колесо



Профиль зуба колеса (звездочки) не вызывает подергивания цепи при входе круглой цевки в зацепление и выходе из него.

Гребневое колесо



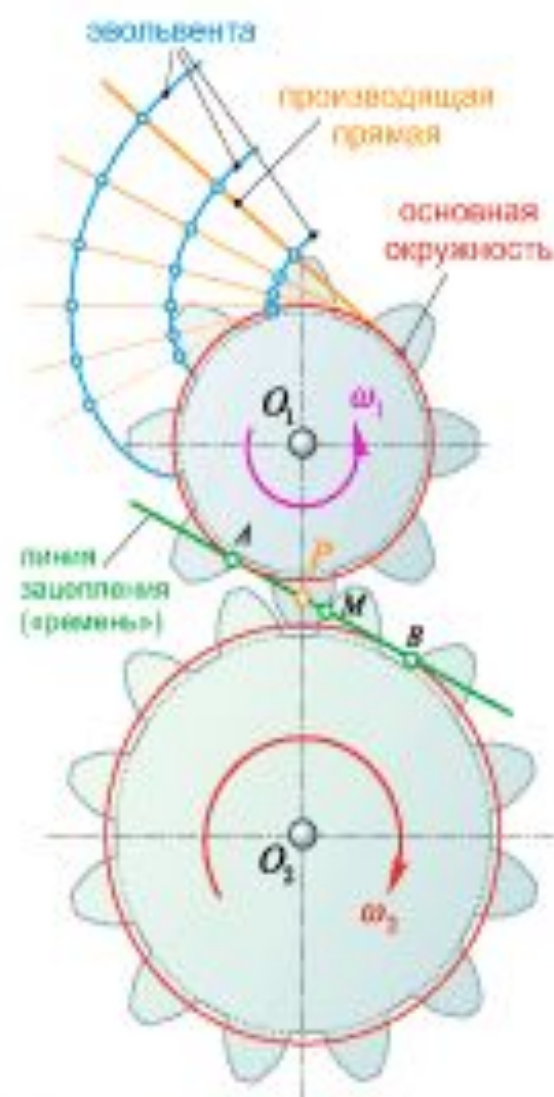
Профиль зуба ведущего колеса тяжелого (промышленного) трактора соответствует профилю гребня звена гусеницы по теореме зацепления.

Циклоидальное колесо



Циклоида — кривая, описываемая точкой окружности, обкатывающей без проскальзывания какую-либо другую окружность. Это траектория точки обода одного колеса в пространстве другого при их фрикционном зацеплении. Выполнение профиля зубьев по циклоиде имитирует это зацепление. Обеспечивает повышенную плавность хода. Параметры циклоиды определяются диаметрами обоих зацепляемых колес.

Детали машин. Эвольвентное зацепление

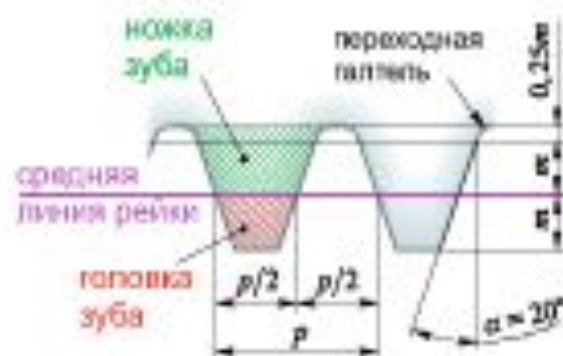


Эвольвента — кривая, описываемая точкой прямой (**производящая прямая**), обкатывающей без проскальзывания окружность (**основная окружность**). Такова траектория точки ремня в пространстве зацепляемых им колес. Выполнение профиля зубьев по эвольвенте имитирует это зацепление. Почти все зацепления — эвольвентные.

Основное преимущество: **профиль зуба определяется только диаметром того колеса, на котором он нарезается, и не зависит от диаметра зацепляемого**. Поэтому колеса любых соотношений диаметров нарезаются одним и тем же инструментом.

Зацепляемым колесом может быть и **прямолинейная рейка**. Эвольвента прямой — прямая, то есть эвольвентные зубья рейки — **прямобоочные трапеции**. Прообраз любого инструмента для нарезки эвольвентных зубьев — **прямобоочная рейка** — **исходный контур**.

Детали машин. Параметры исходного контура



Параметром, определяющим все размеры исходного контура (пробора рейки), является **модуль m** .

$$m = \frac{p}{\pi}; \quad p \text{ — шаг рейки}$$

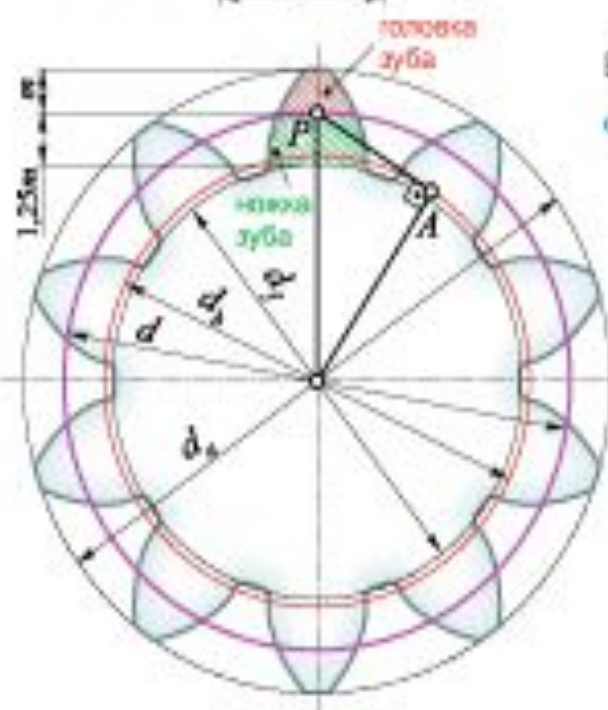
Базовая линия рейки — **средняя линия**. Ширина зуба на ней равна ширине впадины. Наносится на режущем инструменте.

Базовый размер нарезаемого колеса — **диаметр делительной окружности d** .

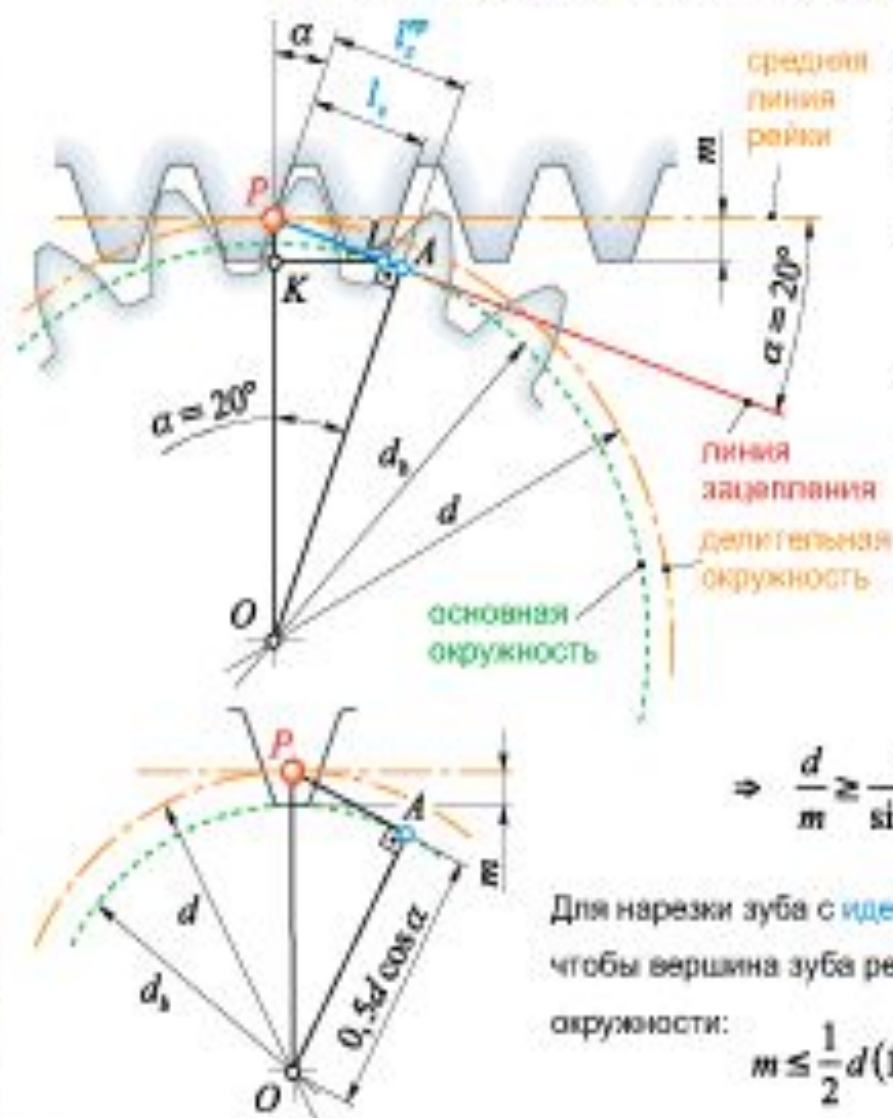
$$d = mz.$$

- z — число нарезаемых на колесе зубьев;
- d_a — окружность вершин $d_a = mz + 2m$;
- d_f — окружность впадин $d_f = mz - 2,5m$;
- d_b — основная окружность, обкатыванием по ней прямой линией образуется эвольвентный профиль зуба $d_b = d \cos \alpha$.

Отрезок PA — предельно возможная длина активного участка линии зацепления, на котором происходит контакт зубьев.



Детали машин. Определение минимальных чисел зубьев



Зацепление рейки и колеса с **эвольвентными** зубьями можно имитировать намоткой ремня на основную окружность. Предельная длина ремня, рассчитываемая по параметрам шестерни:

$$AP = l_s^* = \frac{1}{2} d \sin \alpha \quad (\triangle OPA).$$

Используемый при **непредельном** числе зубьев активный участок линии зацепления имеет длину:

$$l_s = \frac{m}{\sin \alpha} \quad (\triangle PKL).$$

Точка L не подрежет ножку зуба, если

$$l_s \leq l_s^* \Rightarrow \frac{m}{\sin \alpha} \leq \frac{1}{2} d \sin \alpha \Rightarrow$$

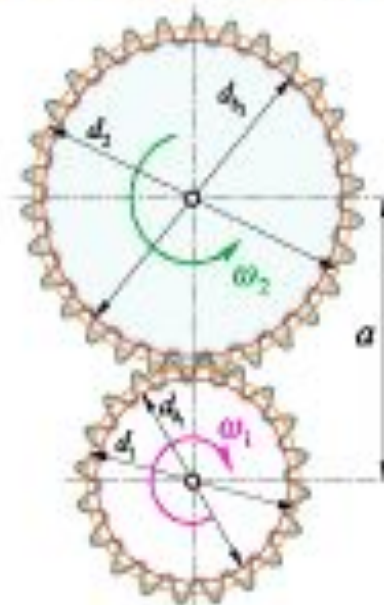
$$\Rightarrow \frac{d}{m} \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha}; \quad z_{\min} = \frac{d}{m} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}. \quad \text{При } \alpha = 20^\circ \quad z_{\min} = 17.$$

Для нарезки зуба с **идеальным эвольвентным профилем** требуется, чтобы вершина зуба рейки в крайнем случае лишь касалась основной окружности:

$$m \leq \frac{1}{2} d (1 - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{d}{m} \geq \frac{2}{(1 - \cos \alpha)}; \quad z_{\min}^2 = 38.$$

Детали машин. Параметры эвольвентного зубчатого зацепления

внешнее зацепление



Зацепляются колеса одного модуля m .

Передаточное отношение $i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ может быть подсчитано как соотношение углов поворота колес при переборе ими одного зуба:

$$i = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{2\pi \cdot z_2}{2\pi \cdot z_1} \Rightarrow i = \pm \frac{z_2}{z_1};$$

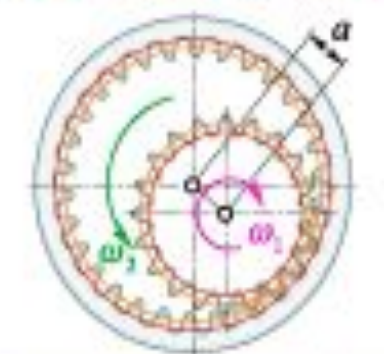
z_1 — количество зубьев на меньшем колесе (**шестеренке**);

z_2 — количество зубьев на большем колесе (**колесе**);

«+» — признак **внутреннего** зацепления (шестерня и колесо вращаются в одну сторону);

«-» — признак **внешнего** зацепления (шестерня и колесо вращаются в противоположные стороны).

внутреннее зацепление



Межосевое расстояние: $a_T = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$.

$u = \frac{z_2}{z_1}$ — передаточное число (просто цифра).

$$a_T = \frac{m}{2} z_1 (u \pm 1); \quad \begin{array}{l} \text{«+» — внешнее зацепление;} \\ \text{«-» — внутреннее зацепление.} \end{array}$$

a_T — теоретическое межосевое расстояние, при котором делительные окружности колес соприкасаются. Для выполнения межосевых расстояний в соответствии со стандартом колеса могут нарезаться со смещением инструмента.

Детали машин. Проектный расчет закрытой зубчатой передачи



Процессом, принципиально ограничивающим срок службы таких передач, является **усталостное выкрашивание** на рабочей поверхности зуба, которое определяется контактными напряжения, вычисляемыми по формуле Герца:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{q \cdot E_{\varphi}}{\rho_{\varphi}}} \quad (*)$$

Приведенный модуль упругости:

$$\frac{1}{E_{\varphi}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \Rightarrow E_{\varphi} = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}. \text{ Если } E_1 = E_2, \text{ то } E_{\varphi} = \frac{E}{2}.$$

Для прямозубой передачи:

Приведенный радиус кривизны профиля зуба:

$$\frac{1}{\rho_{\varphi}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} + \frac{2}{d_2 \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right);$$

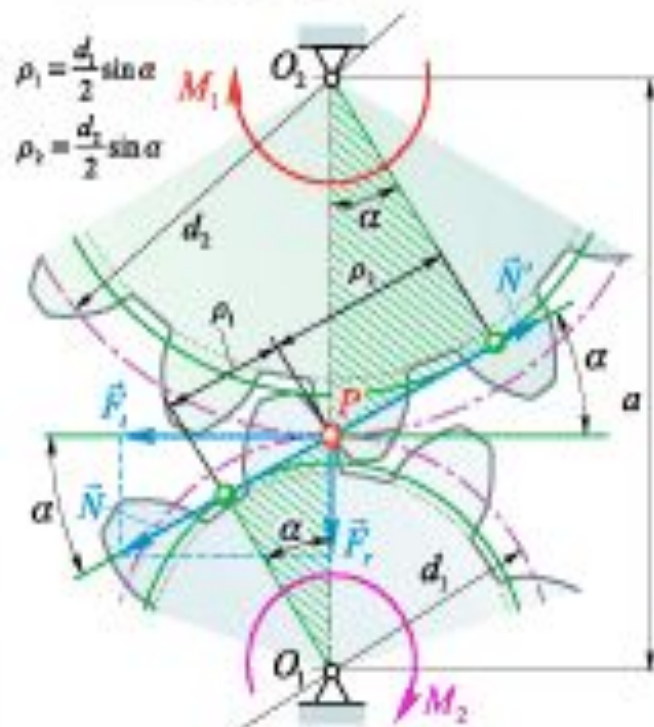
Нагрузка на единицу длины зуба: $q = \frac{N}{b} = \frac{F_t}{b \cos \alpha} = \frac{2M_1}{d_1 b \cos \alpha}$

Межосевое расстояние: $a = \frac{d_1 + d_2}{2}$; $d_2 = u \cdot d_1$.

После подстановки и преобразований для колес с $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ получим (при размерности $[H], [M]$):

$$\sigma^* = 4950(u+1) \sqrt{\frac{1,3M_1}{\psi_{\Sigma} \cdot u \cdot [\sigma_H]^2}} \quad [M]$$

$[\sigma_H]$ — допускаемое контактное напряжение;
1,3 — эмпирическая поправка; $\psi_{\Sigma} = \frac{b}{a}$



Детали машин. Базовые характеристики выносливости

Способ термической и химической обработки	Средняя твердость поверхностей зубьев	Стали, например	σ_{Hlim}, MPa	σ_{Flim}, MPa
Отжиг, нормализация или улучшение	$\leq 350 HB$	45, 50, 40X, 45X, 40XH	$2H_{HB} + 70$	$1,75H_{HB}$
Объемная и поверхностная закалка	38...50 HRC	40X, 35XM, 35XГСА, 40XH	$17H_{HRC} + 200$	500...700
Цементация и нитроцементация	56 HRC	20X, 12ХН3А, 18ХГТ, 20ХН	$23H_{HRC}$	700...950
Азотирование	350...750 HV	40X, 38ХМЮА	1050	580...770

Базовое число циклов

Твердость HB	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$N_{Hlim}, \text{млн. циклов}$	10	17	25	37	50	64	80	100	120

Детали машин. Определение параметров зубчатой передачи

По рассчитанному из формулы Герца межосевому расстоянию подбирают его ближайшее стандартное значение a . В зависимости от требований к передаче определяют первоначальное, ориентировочное число зубьев на шестерне. Обычно принимают $z_1^* = 20 \dots 24$.

$$a = \frac{m}{2} z_1 (1 + u).$$

По формуле $m^* = \frac{2 \cdot a}{z_1^* (1 + u)}$ вычисляется значение модуля m и округляется до ближайшего стандартного значения.

Определяется суммарное число зубьев $z_{\Sigma} = z_1 + z_2$ как ближайшее целое $z_{\Sigma}^* = \frac{2a}{m}$.

Окончательное значение z_1 — ближайшее целое $z_1^* = \frac{z_{\Sigma}^*}{1 + u}$.

$z_2 = z_{\Sigma} - z_1$, $u_{\text{факт}} = \frac{z_2}{z_1}$, разность между спроектированным и требуемым значением $\frac{u - u_{\text{факт}}}{u} \cdot 100\% = \Delta u$.



Окончательно теоретическое межосевое расстояние

рассчитывается по формуле: $a_y = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$

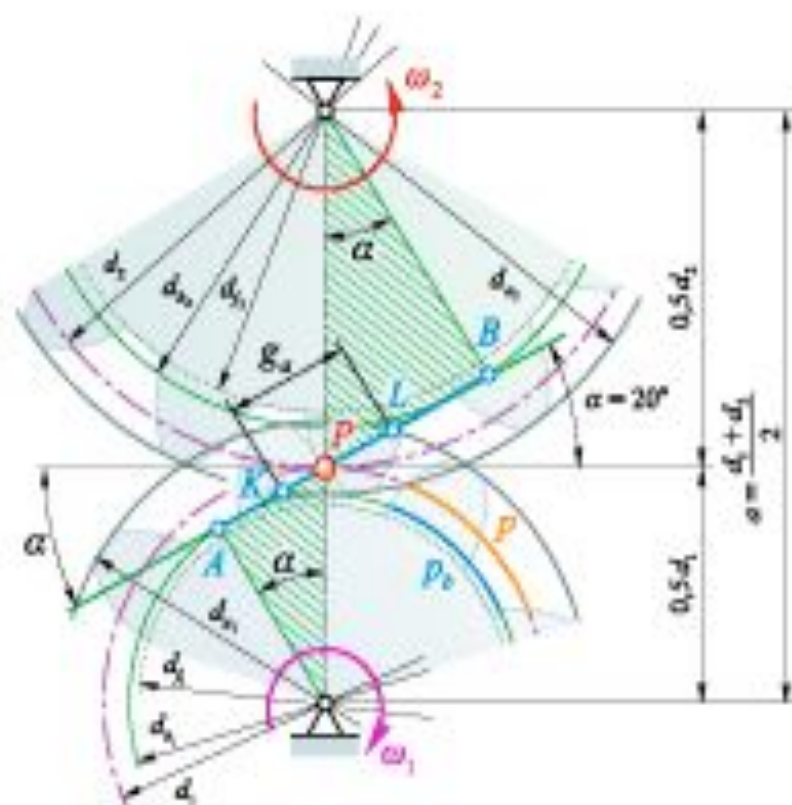
Смещение инструмента для выполнения стандартного расстояния

$$x = \frac{a - a_y}{2} \quad (\text{если смещения на шестерне и колесе одинаковы}).$$

Результаты проектирования:

$$a, m, z_1, z_2, u_{\text{факт}}, \Delta u, x.$$

Детали машин. Коэффициенты перекрытия зубчатой передачи



Прямая $AKLB$ — линия зацепления.

Отрезок AB — предельная длина активного участка этой линии; зацепление происходит без интерференции (внедрения) тел зубьев друг в друга:

$$AB = \sum 0,5 d_i \sin \alpha = a \cdot \sin \alpha.$$

$KL = g_a$ — реализуемая длина активного участка линии зацепления;

точка K — «появление» на линии зацепления между зубьями шестерни: вершины зуба **копеса**;

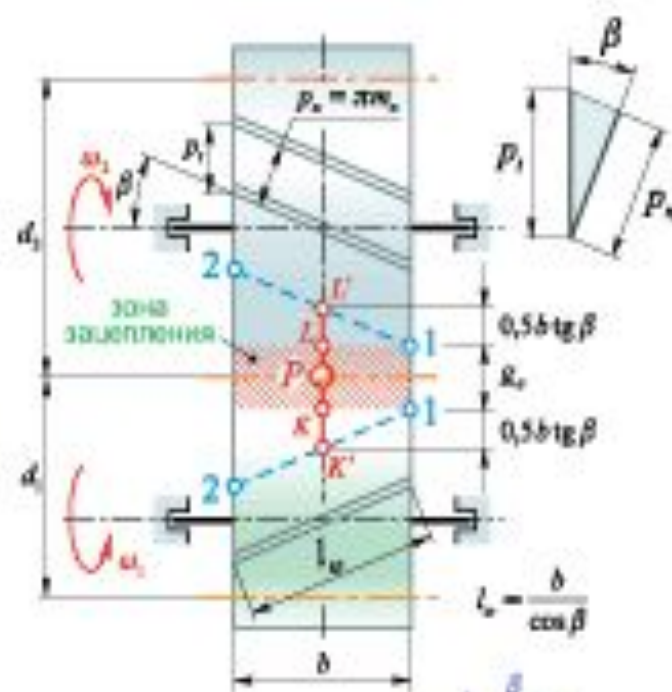
точка L — «выход» из линии зацепления вершины зуба **шестерни**.

Коэффициент торцового перекрытия $\epsilon_\alpha = \frac{g_a}{p_b}$.

p_b — основной окружной шаг зубьев; на основную окружность наматывается участок ремня KL ; $p_b = p \cdot \cos \alpha$.

Проектируется $\epsilon_\alpha > 1$.

Детали машин. Косозубая цилиндрическая передача



Обеспечивает большие коэффициенты перекрытия, и тем самым, пониженные значения шума, вибрации, динамических нагрузок. Зубья колес входят в зацепление постепенно, начиная с точек 1 и заканчивая точками 2. Процесс может трактоваться как увеличение длины активного участка линии зацепления: $LL' + KK' = 2 \cdot 0,5b \cdot \operatorname{tg} \beta = b \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Коэффициент осевого перекрытия:

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_t} = \frac{b \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{p_n} = \frac{b \cdot \sin \beta}{p_n} = \frac{b}{\pi m_n} \sin \beta.$$

Выполняется $\varepsilon_{\beta} > 1$.

Общий коэффициент перекрытия $\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}$.

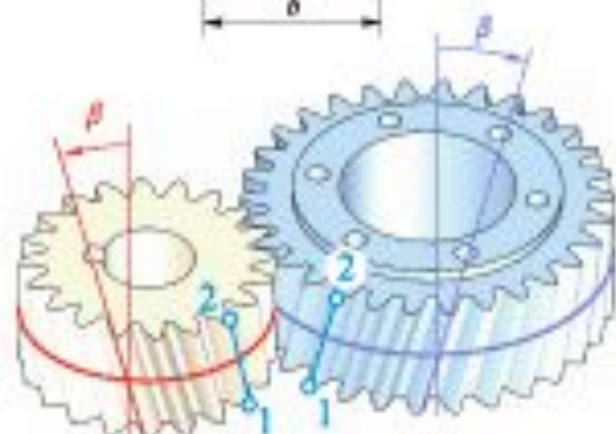
p_t — окружной шаг зубьев, $p_t = \frac{\pi d}{z}$,

p_n — нормальный шаг зубьев, $p_n = p_t \cos \beta$.

m_t — окружной модуль, $m_t = \frac{p_t}{\pi}$;

m_n — нормальный модуль, $m_n = \frac{p_n}{\pi}$;

$$m_n = m_t \cos \beta.$$



Детали машин. Косозубое зацепление. Расчет геометрии



По смыслу теоремы зацепления зубья профилируются в плоскости Π , перпендикулярной прямой τ , состоящей из точек их соприкосновения. В плоскости Π **эбрис делительной окружности** — эллипс. Его радиус кривизны в точке M :

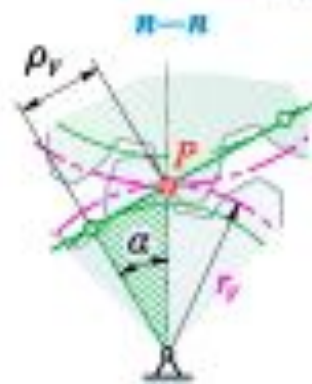
$$r_v = \frac{a^2}{c} = \frac{2d^2}{4 \cos^2 \beta \cdot d}; \quad r_v = \frac{d}{2 \cos^2 \beta}$$

При расчете контактных напряжений в зацеплении используют параметры **эквивалентного колеса** (V — индекс параметров эквивалентного колеса):

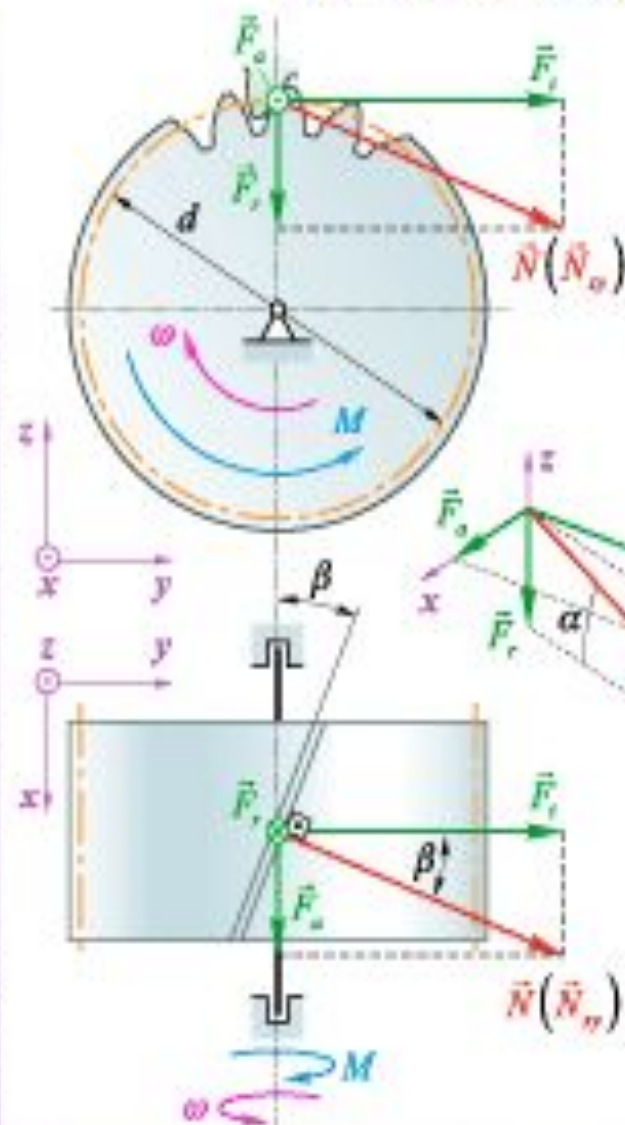
$$d_v = 2r_v; \quad d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}; \quad z_v = \frac{d_v}{m_n} = \frac{d}{\cos^2 \beta \cdot m_n \cos \beta}; \quad z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

В зацеплении:

$$\frac{1}{\rho_v^\alpha} = \frac{1}{\rho_{r_1}} + \frac{1}{\rho_{r_2}} = \frac{2}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right); \quad \frac{1}{\rho_v^\alpha} = \frac{2 \cos \beta}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)$$



Детали машин. Косозубое зацепление. Расчет нагрузок



Силы, действующие в зацеплении, принято выражать через окружную силу

$$F_t = \frac{2M}{d}$$

Проекции нормальной силы N :

$$F_t = N_{\alpha} \cos \beta = N \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad N = \frac{F_t}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$F_a = N_{\alpha} \sin \beta = N \cos \alpha \sin \beta \quad \text{— осевая сила.}$$

$$F_r = N \cdot \sin \alpha \quad \text{— радиальная сила.}$$

$$\frac{F_a}{F_t} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Rightarrow F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$\frac{F_r}{F_t} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \Rightarrow F_r = F_t \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}.$$

Проектная оценка межосевого расстояния косозубых передач производится из формулы Герца по предельно допустимым контактным напряжениям.

$$a^* = 4300(u+1) \sqrt{\frac{1,2M}{u \cdot [\sigma_H]^2 \psi_{\Sigma}}}$$

Детали машин. Коническая зубчатая передача. Геометрия



Применяется при необходимости передачи вращения между непараллельными друг другу валами. По смыслу теоремы зацепления зубья профилируются в плоскости перпендикулярной к прямой точек их соприкосновения.

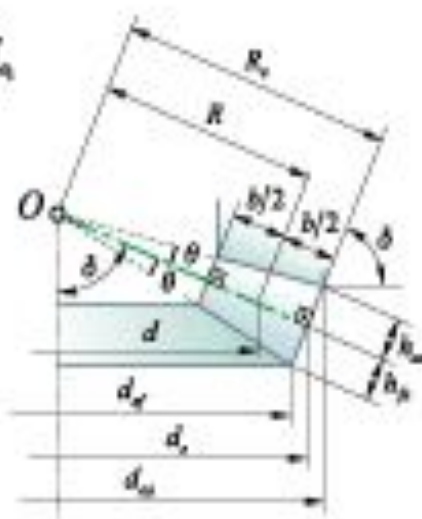
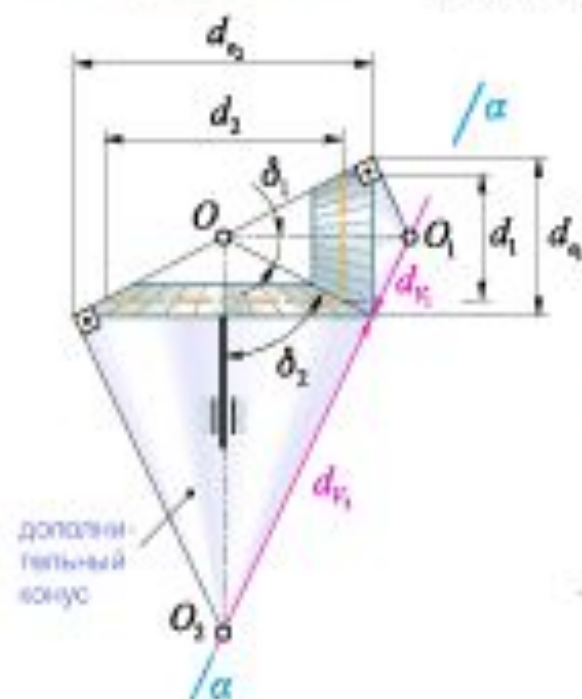
Плоскость α касательна к *дополнительному конусу*.

Сечение зуба дополнительным конусом — *торцовое сечение*.

d_e — индексо внешнего торцового сечения; по этому сечению определяются все размеры копес.

R_e — внешнее конусное расстояние;

$$\text{при } \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{2} \quad R_e = 0,5\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 0,5m_z\sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0,5m_z z_1\sqrt{1 + u^2}.$$



$$h_x = 1,2m_z; \quad h_{ax} = m_z;$$

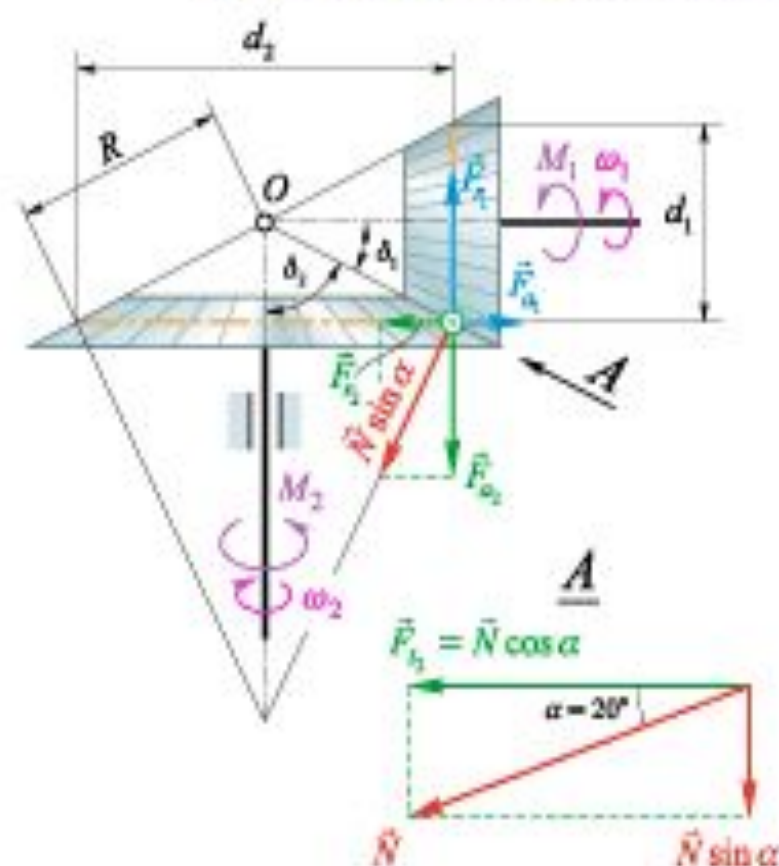
$$d_{ax} = d_e + 2h_{ax} \cos \delta = m_z (z + 2 \cos \delta).$$

Диаметр эквивалентного колеса

$$d_{v1} = d_e / \cos \delta_1.$$

Принято: $\psi_x = \frac{b}{R_e} = 0,285.$

Детали машин. Коническая зубчатая передача. Расчет усилий



Расчет усилий производится по окружной силе:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}, \quad d_1 \text{ — средний делительный диаметр.}$$

$$N = \frac{F_t}{\cos \alpha}$$

$$F_{t_2} = F_{t_1} = N \sin \alpha \cos \delta_2; \quad F_{r_2} = F_{r_1} = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2.$$

$$F_{a_2} = F_{a_1} = N \sin \alpha \sin \delta_2; \quad F_{t_1} = F_{t_2} = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2.$$

Формула проектного расчета конической зубчатой передачи со стальным колесом по предельным допустимым контактным напряжениям, выведенная из формулы Герца с учетом геометрических и силовых соотношений, имеет вид

$$d_1 = K_s \sqrt{\frac{M_2}{u \cdot [\sigma_H]^2}}, \quad K_s = 17900 \text{ Па}^{\frac{1}{3}}.$$

Числом z_1 задаются, $z_1 > 17$. С учетом $u = \frac{d_2}{d_1} = \operatorname{ctg} \delta_1 \Rightarrow \sin \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \delta_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}$.

Подсчитывают среднее конусное расстояние $R = \frac{d_1}{2 \sin \delta_1} = \frac{d_1}{2} \sqrt{1 + u^2}$.

Детали машин. Червячная передача. Геометрия



$z_1 = \frac{P_h}{p}$; z_1 — число заходов червяка (число витков нарезки).

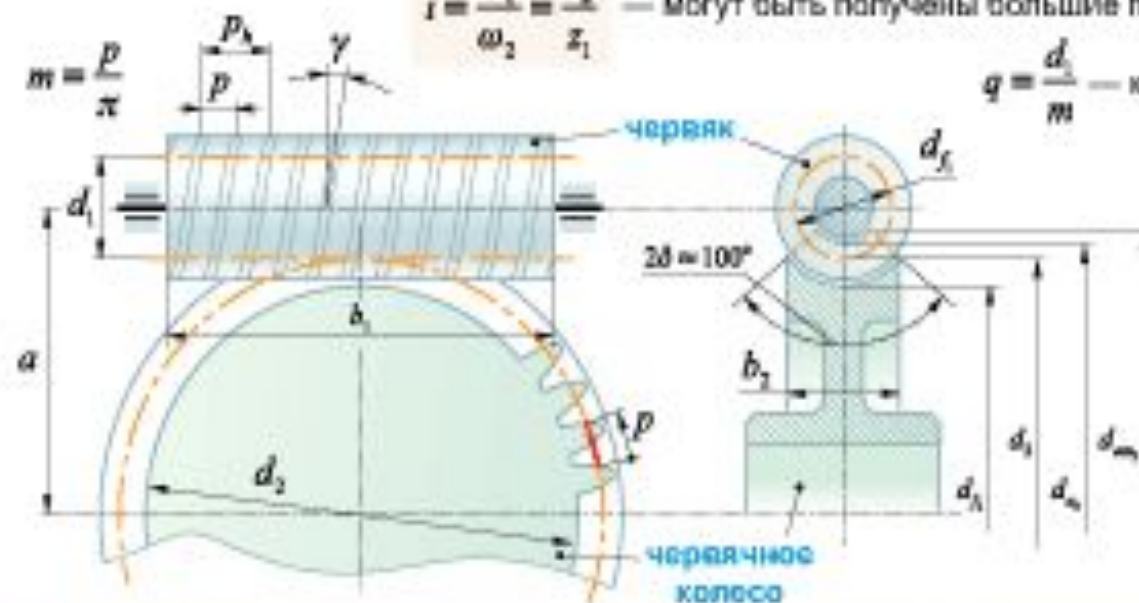
По аналогии с резьбой: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{P_h}{\pi d_1} = \frac{z_1 p}{\pi d_1} = \frac{m z_1}{d_1} = \frac{z_1}{q}$,

Поворот червяка на угол 2π означает поворот колеса на угол φ , соответствующий дуге P_h .

$i = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{2\pi \cdot d_2}{2P_h} = \frac{z_2 \pi \cdot d_2}{z_1 p \cdot z_1}$; $\frac{\pi d_2}{p} = z_2$ — число зубьев на червячном колесе.

$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$ — могут быть получены большие передаточные отношения.

$q = \frac{d_1}{m}$ — коэффициент диаметра червяка.



По стандарту:

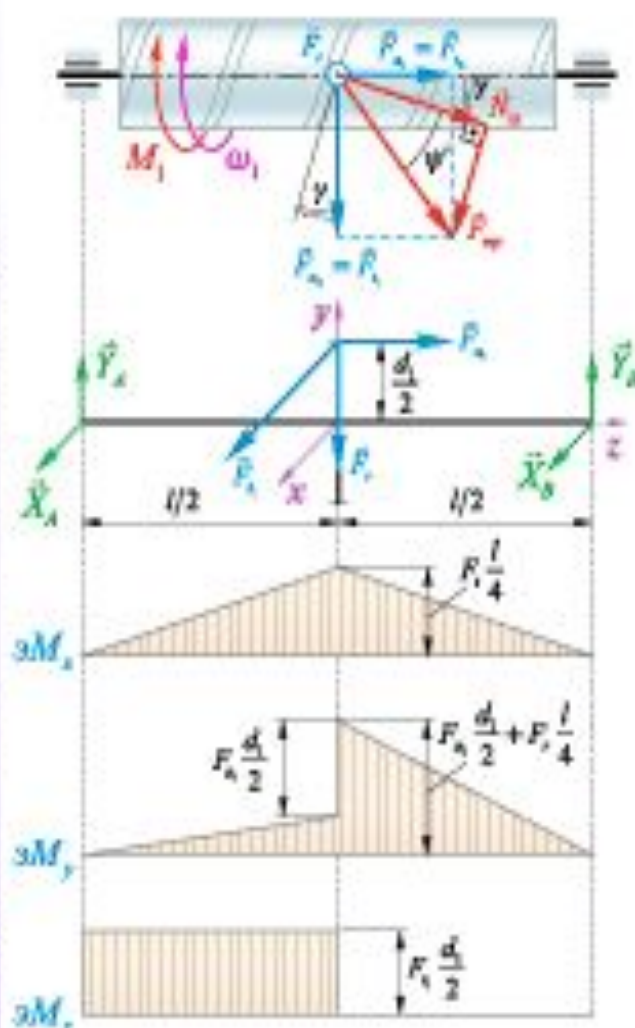
$z_1 = 1, 2, 4$; $z_2^{\text{min}} = 28$;

$m = 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3 \dots$

$q = 8; 10; 12,5; 16; 20$.

Для комбинаций стандартизованных m, q, z_1 предусмотрен режущий инструмент — червячные фрезы.

Детали машин. Червячная передача. Силовой анализ



Выбор параметров передачи осуществляется с учетом прочности и жесткости червяка. Заданной исходной величиной является момент на ведомом червячном колесе — M_2 .

F_t — окружное усилие на колесе,
оно же осевое для червяка:

$$F_t = F_a = \frac{2M_2}{d_2}$$

Расчет окружного усилия (F_t) для червяка производится с учетом силы трения

$$F_{t\text{пр}} = f_{\text{пр}} N = f_{\text{пр}} \frac{N_{\text{н}}}{\cos \alpha}, \quad \alpha = 20^\circ \text{ — стандартный угол зацепления.}$$

Приведенный угол трения: $\psi' = \arctg \frac{F_{t\text{пр}}}{N_{\text{н}}} = \arctg \frac{f}{\cos \alpha}$; $F_t = F_a \cdot \text{tg}(\gamma + \psi')$.

Радиальные усилия одинаковы для обоих колес, по аналогии с косозубым зацеплением: $F_r = F_t \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \gamma}$.

Опасное сечение — посередине. По третьей теории прочности для валов:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{вн}}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{0,1 d_h^3} \leq [\sigma] \approx 60 \text{ МПа.}$$

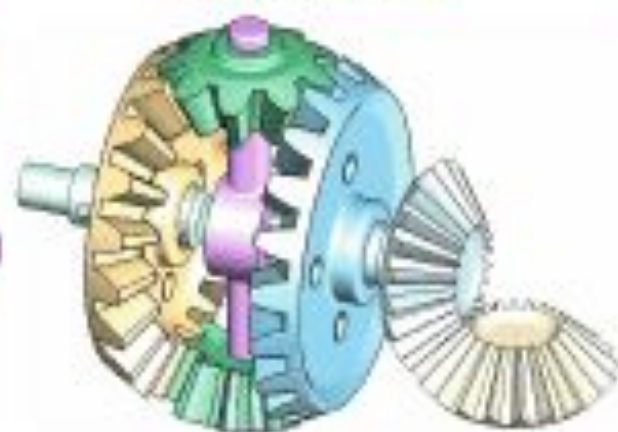
Прогиб вала: $f = \frac{\sqrt{F_r^2 + F_t^2}}{48EI} l^3 \leq 0,01 \text{ м}; \quad I = \frac{\pi d_h^4}{64}$.

Детали машин. Планетарные передачи

плоская

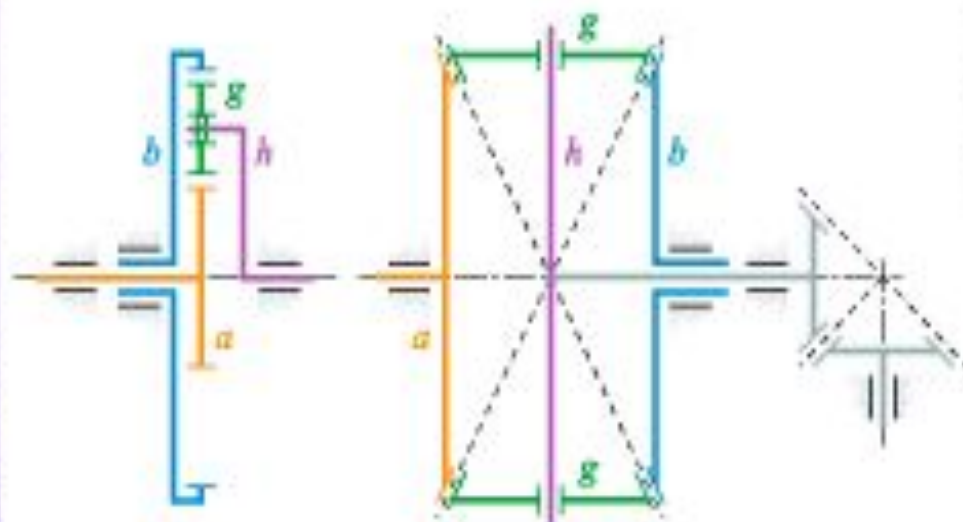


пространственная



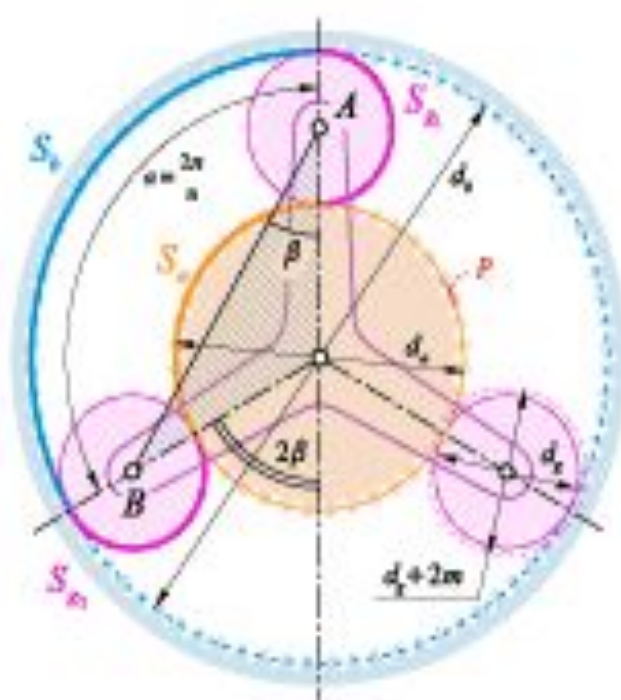
Планетарные передачи включают в себя колеса (сателлит), вращающегося относительно водила — звена механизма, вращающегося относительно его остова (основания). Подразделяются на **плоские**, выполняемые на основе зубчатых цилиндрических колес, и **пространственные**, конструкция которых состоит из конических колес.

Применяются во всех отраслях машиностроения из-за компактности, больших передаточных соотношений и возможности их изменения поочередным торможением колес.



- h — водило;
- a и b — центральные колеса;
- g — сателлиты.

Детали машин. Условия подбора зубьев планетарных передач



1. Условие соосности.

$$\frac{1}{2}d_c + d_g = \frac{1}{2}d_k; \text{ поделим на } m:$$

$$z_c + 2z_g = z_k \Rightarrow z_c + z_g = z_k - z_g.$$

2. Условие сборки.

Совокупность дуг S_{c_1} и S_{c_2} образует депитальную окружность сателлита, содержащую целое число шагов зацепления N .

Этому же условию должны отвечать дуги S_c и S_k :

$$\frac{S_c + S_k}{p} = N \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha \frac{d_c + d_k}{p} = N \Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi(d_c + d_k)}{p} = N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} (z_c + z_k) = N.$$

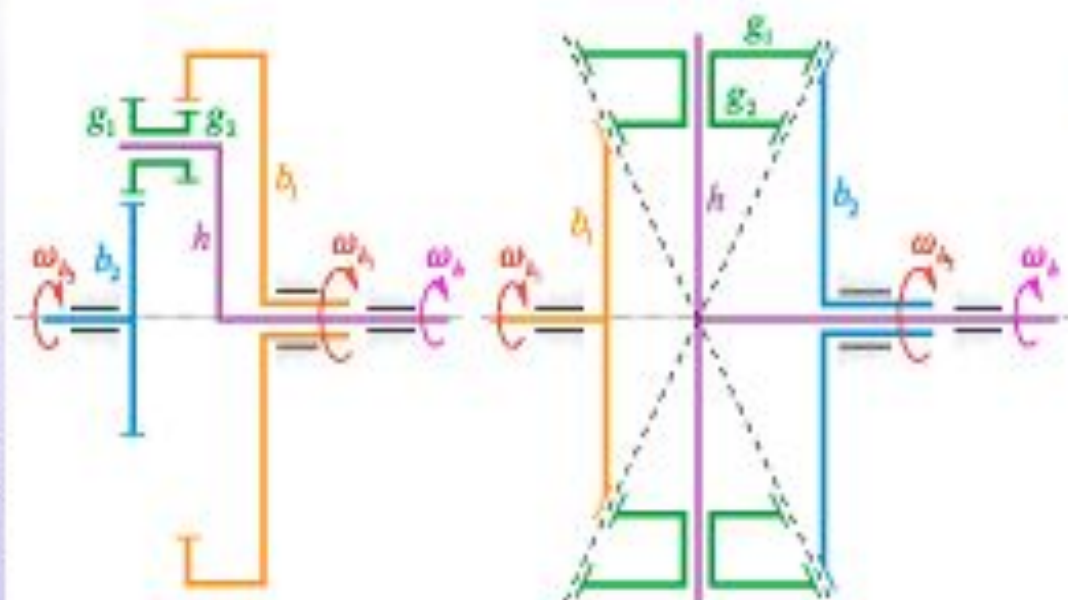
Уравновешенность механизма требует $\frac{2\pi}{\alpha} = n$, n — число сателлитов, следовательно $\frac{z_c + z_k}{n} = N$.

3. Условие соседства.

Сателлиты не будут зацепляться друг за друга вершинами зубьев, если

$$2 \cdot \frac{1}{2}(d_c + d_g) \cos \beta \geq d_g + 2m; \quad 2\beta = \pi - \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}. \text{ Поделим на } m: (z_c + z_g) \sin \frac{\pi}{n} \geq z_g + 2.$$

Детали машин. Метод Виллиса



Метод Виллиса кинематического расчета планетарных передач заключается в анализе кинематики механизма в пространстве водила.

Наблюдатель, «сидящий на водиле», видит оси колес неподвижными (уравнения с индексом r).

Центральные колеса b и водило h вращаются относительно осей, образующих одну прямую. Поэтому

$$\omega_h = \omega_b + \omega_b^r; \quad \omega_b^r = \omega_h - \omega_b.$$

Абсолютная угловая скорость равна сумме переносной ω_h и относительной ω_b^r угловых скоростей.

$$\frac{\omega_b^r}{\omega_h} = \frac{z_{g1}}{z_{b1}}; \quad \frac{\omega_b^r}{\omega_h} = \frac{z_{g2}}{z_{b2}}; \quad \omega_{g1} \equiv \omega_{g2} \text{ — одно и тоже.}$$

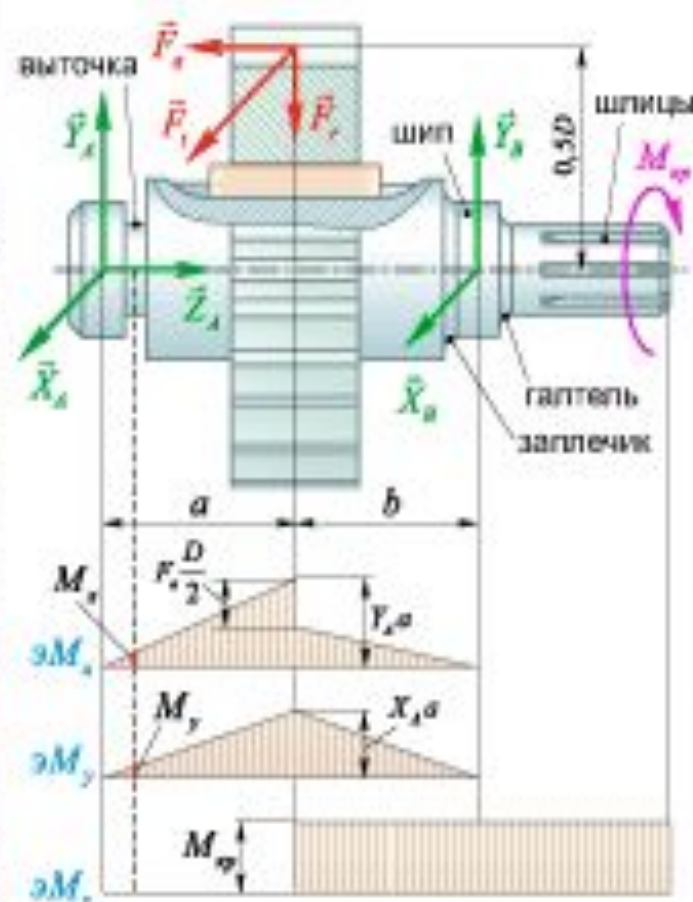
Поделим уравнения:
$$\frac{\omega_{b1}^r}{\omega_h} = \pm \frac{z_{g1}}{z_{b1}} \cdot \frac{z_{b2}}{z_{g2}} \quad (*)$$

$$\frac{\omega_{b1} - \omega_h}{\omega_h - \omega_b} = \pm \frac{z_{g1} z_{b2}}{z_{g2} z_{b1}} \quad (*)$$

Знаки в правых частях уравнений (*) определяются направлением вращения центральных колес в пространстве водила:

⊕ — при вращении в одну сторону; ⊖ — при вращении в противоположные стороны.

Детали машин. Валы и оси



Для осей $M_z = 0$.

Валы и оси предназначены для установки на них деталей, совершающих по назначению механизма вращательное движение: колес, шкивов, блоков, кулачков и т. д. Через валы передаются крутящие моменты от двигателя к исполнительным органам.

Валы и большинство осей «проворачивают» свои поперечные сечения относительно нагрузки, что приводит к переменным напряжениям. Прочность вала определяется их уровнем в концентраторах напряжений — выточках, галтелях, шлицах, шпоночных пазах. При проверочном расчете производится вычисление запаса сопротивления усталости.

В простейшем виде:

$$S_s = \frac{\sigma_{-1} \cdot K_d K_r}{\sigma_o \cdot K_o} \leq [S].$$

σ_{-1} — предел выносливости;

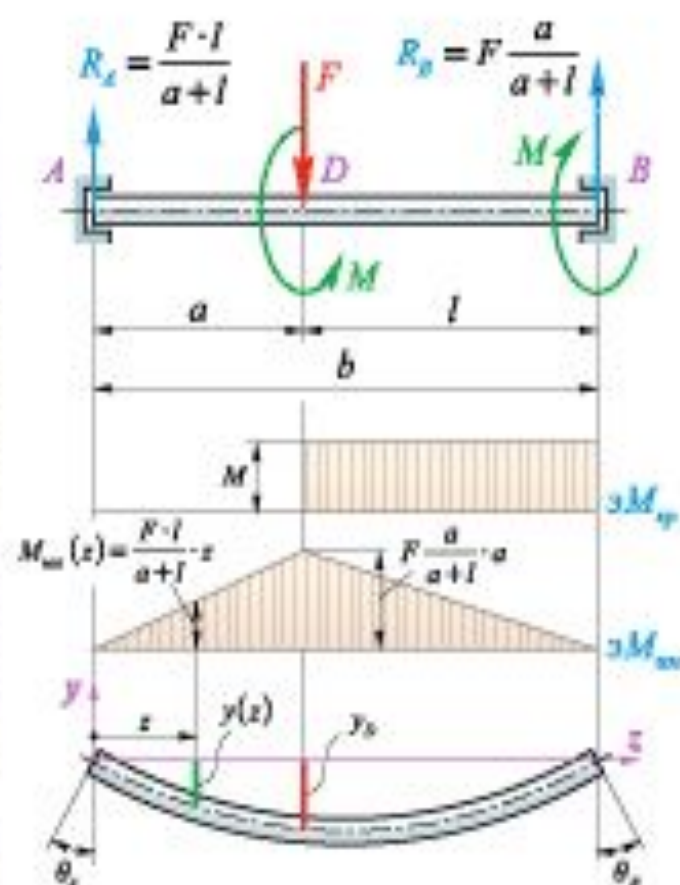
$\sigma_o = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{w_{\text{неч}}}$ — номинал напряжения в проверяемом сечении;

K_o — коэффициент концентрации напряжений, определяется из специальных таблиц в соответствии с видом концентратора;

K_d — масштабный фактор (тем меньше, чем больше диаметр вала);

K_r — определяется шероховатостью поверхности вала.

Детали машин. Валы. Расчет на жесткость



Получающиеся при проектном расчете с использованием материалов высокой прочности малые значения диаметров вала делают необходимым его проверку на жесткость.

1. Крутильная жесткость вала должна подчиняться неравенству $\varphi = \frac{M_{\varphi} \cdot l}{G \cdot I_{\varphi}} \leq [\varphi]$.

В приводах точных механизмов $[\varphi/l] \leq 0,15^\circ$.

В карданных валах автомобиля $[\varphi/l] \leq 5^\circ + 7^\circ$.

2. Изгибная жесткость оценивается исходя из зависимости, следующей из дифференциального уравнения упругой линии балки: $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{max}(z)}{EI}$

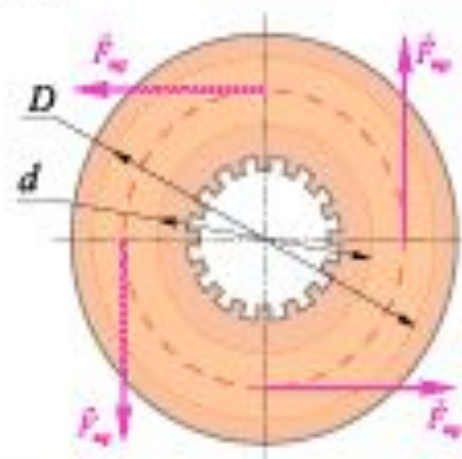
В литературе приводятся типовые решения:

$$\theta_A = \frac{F \cdot a l (b+l)}{6EI \cdot b}; \quad \theta_B = \frac{F \cdot a l (a+b)}{6EI \cdot b};$$

$$y_D = \frac{F \cdot a^2 l^2}{3EI \cdot b}; \quad \theta_D = \frac{F \cdot a l (l-a)}{3EI \cdot b}.$$

Для зубчатых передач: $F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$; $[y_D] = 0,005 + 0,01 \text{ м}$; $[\theta_D] = 0,001 \text{ рад}$; $[\theta_A] = [\theta_B] = 0,001 + 0,005 \text{ рад}$.

Детали машин. Муфты. Сцепная муфта



Муфты предназначены для соединения валов с целью компенсации их несоосности, управляемого соединения и автоматического поддержания режима работы в соответствии с какими-либо требованиями.

Специфичен расчет муфт, принцип действия которых основан на свойствах трения скольжения.

Передаваемый момент: $M \cong f Q_{\Sigma} R n \cong f Q_{\Sigma} n \frac{D-d}{4}$;

n — число плоскостей скольжения;

$R = \frac{D-d}{4}$ — радиус окружности, по которой «считаются» приложенными силы трения;

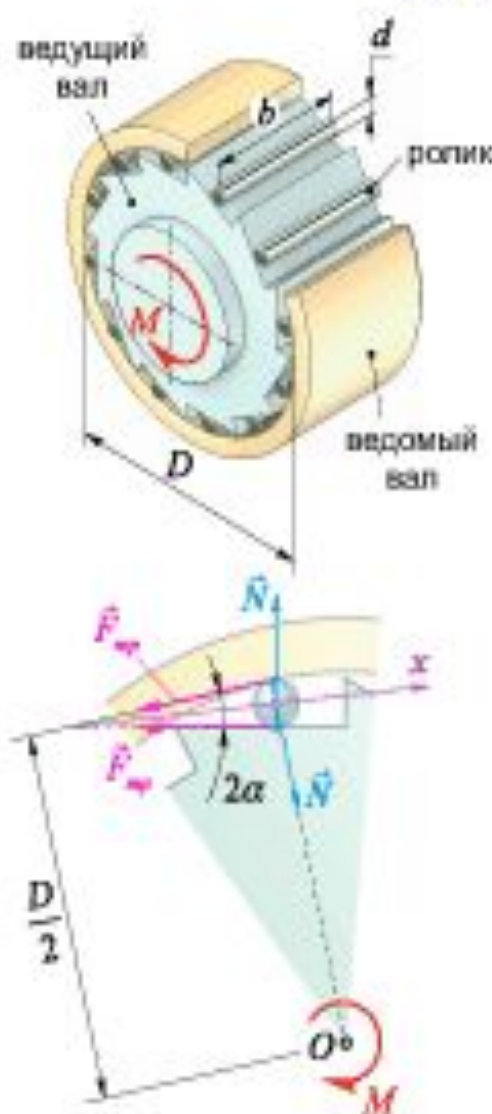
$$Q_{\Sigma} = \sum Q.$$

Давление между дисками должно подчиняться неравенству, обеспечивающему допустимый температурный режим:

$$p = \frac{4Q_{\Sigma}}{\pi(D^2 - d^2)} \leq [p], \quad p \text{ — давление между дисками.}$$

Для «ферродо» $[p] = 0,2 \text{ МПа}$.

Детали машин. Муфты. Обгонная муфта



Обгонная муфта применяется при необходимости вращения колес без вращения ведущего вала (велосипед). Момент с ведущего вала на ведомый передается через заклинивающиеся ролики.

Из равновесия ведомого вала:

$$\sum \text{mom}_O \vec{F}_i = 0 \Rightarrow n \cdot F_{\text{тр}} \cdot \frac{1}{2} D = M = n f N \cdot \frac{1}{2} D;$$

$$N = \frac{2M}{f D n}; \quad n - \text{число роликов.}$$

По формуле Герца:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{2M}{f D n} \cdot \frac{E}{\rho_{\text{ст}}}} = 0,418 \sqrt{\frac{4ME}{f D n} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)} \leq [\sigma_H].$$

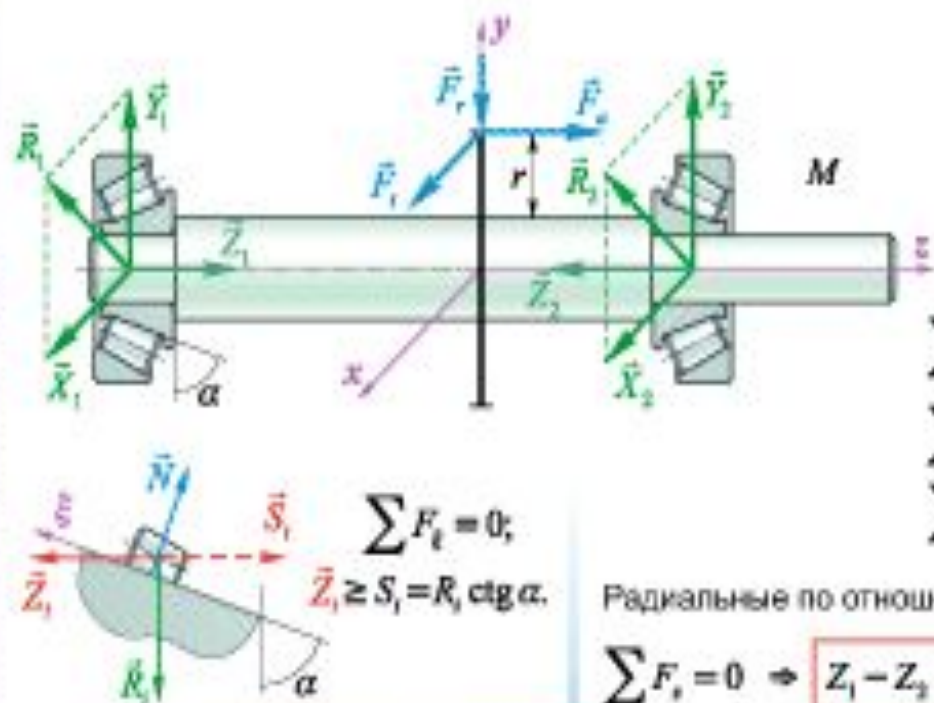
Муфта работает, если силы трения «затягивают» ролик:

$$\sum (\vec{F}_{\text{тр}})_x \geq \sum (\vec{N})_x \Rightarrow 2F_{\text{тр}} \cos \alpha \geq 2N \sin \alpha;$$

$$\text{tg } \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \leq f.$$

При обгоне ведущего валом ведомым ролик «выкатывается» в более широкое место и не препятствует его вращению.

Детали машин. Подшипники качения. Определение нагрузок



Нагрузки на подшипник определяются из равновесия вала.

С учетом геометрических соотношений между \vec{F}_r , \vec{F}_a , \vec{F}_o можно определить силы \vec{X}_1 , \vec{Y}_1 , \vec{X}_2 , \vec{Y}_2 .

$$\sum \text{mom}_x \vec{F} = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{M}{r}$$

$$\sum \text{mom}_z \vec{F} = 0 \text{ и } \sum F_y = 0: \text{ найдутся } \vec{Y}_1 \text{ и } \vec{Y}_2$$

$$\sum \text{mom}_y \vec{F} = 0 \text{ и } \sum F_x = 0: \text{ найдутся } \vec{X}_1 \text{ и } \vec{X}_2$$

Радиальные по отношению к подшипнику силы: $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Z_1 - Z_2 + F_a = 0 \Rightarrow Z_2 = Z_1 + F_a \text{ или } Z_1 = Z_2 - F_a$$

$$\sum F_x = 0; \quad Z_1 \geq S_1 = R_1 \cdot \text{ctg } \alpha$$

При наличии у обоих подшипников осевой составляющей нагрузки задача становится статически неопределимой. В этом случае используется соотношение $Z_1 \geq S_1 = e \cdot R_1$ — реальная осевая составляющая не может быть меньше величины S_1 — собственной осевой составляющей.

e — параметр осевой нагрузки; обусловлен углом α ; приводится в каталоге на подшипник.

$$\text{Если } S_1 + F_a > S_2, \text{ то } Z_1 = S_1; \quad Z_2 = F_a + Z_1 = F_a + S_1$$

$$\text{Если } S_1 + F_a < S_2, \text{ то есть } S_2 - F_a > S_1, \text{ то } Z_2 = S_2; \quad Z_1 = Z_2 - F_a = S_2 - F_a$$

Детали машин. Подбор подшипников качения

Подбор подшипников качения при угловой скорости вала $n \geq 1 \frac{\text{рад}}{\text{мин}}$ производится по динамической грузоподъемности:

$$C \geq C_{\text{эф}}$$

Требуемая динамическая грузоподъемность

для шариковых подшипников: $C_{\text{эф}} = P\sqrt[3]{L}$;

для роликовых подшипников: $C_{\text{эф}} = PL^{0.3}$.

L — долговечность подшипников в миллионах оборотов:

$$L = 60h \cdot L_h \cdot 10^{-6}; \quad L_h \text{ — долговечность в часах.}$$

P — эквивалентная динамическая нагрузка.

$$P = (X \cdot F_r + Y \cdot F_o)$$

Если $F_o/F_r \leq e$ то $Y = 0$, $X = 1$;

Если $F_o/F_r > e$ то X и Y определяются по каталогу, в котором указывается C — паспортная динамическая грузоподъемность.

Обычный расчет — проверочный, то есть проверяется выбранный подшипник. Проектный подбор подшипника осуществляется круговым процессом: подшипник $\rightarrow e \rightarrow F_o \rightarrow P \rightarrow C$; сравнение C и $C_{\text{эф}}$ т. д.

