Введение в математический анализ: функция , предел, непрерывность

Лекция 1

Функция одной действительной независимой переменной

- $D \in R, \qquad E \in R$
- $x \in D, \qquad y \in E$
- $x \in D \quad \to \quad y \in E$
- $y = f(x)$

- D – область определения (множество значений аргумента, для которых вычисление по формуле имеет смысл)
- E – область значений
- x – аргумент
- y – функция

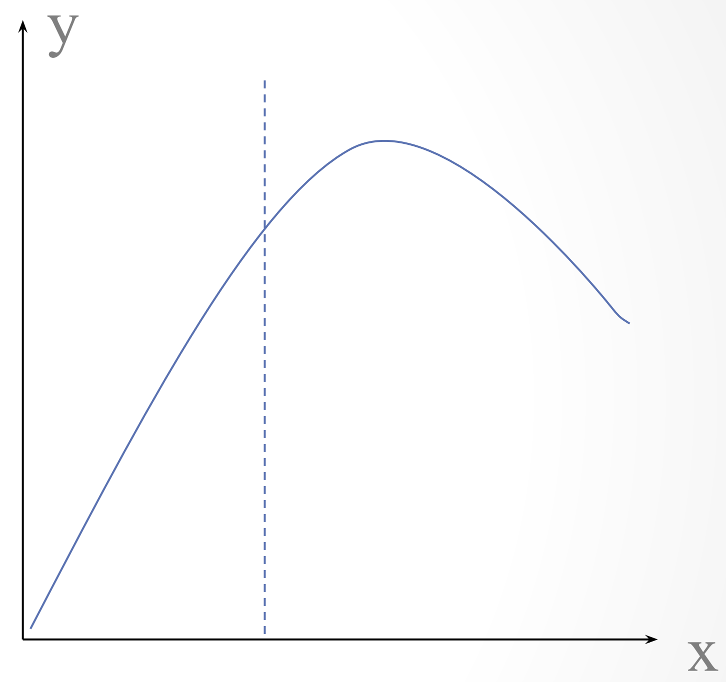


График функции

Основные элементарные функции

- Степенная
- Показательная
- Экспонента
- Логарифмическая (натуральный логарифм, десятичный логарифм)
- *Тригонометрические:*
- Синус
- Косинус
- Тангенс
- Котангенс
- **Литература: Алексеев Д.В. и др. Элементарные аналитические методы и свойства основных элементарных функций. КузГТУ, 1998**

- *Обратные тригонометрические функции*:
- Арксинус
- Арккосинус
- Арктангенс
- Арккотангенс
- *Гиперболические функции*: синус, косинус, тангенс, котангенс
- *Обратные гиперболические функции*: ареасинус, ареакосинус, ареатангенс, ареакотангенс

Гиперболические функции

- Основная функция

- $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- $cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

- Обратная функция

- $archx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
- $x\epsilon[1,\ \infty)$
- $arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
- $arthx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x \in (-1,1)$
- $arcthx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ |x| > 1$

Понятие предела

- **Предел последовательности**

- Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geq N$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
- $x_n \to a$ при $n \to \infty$
- **Примеры:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828 \ldots \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

[Вычисление предела функции по определению.docx]

- **Предел функции**

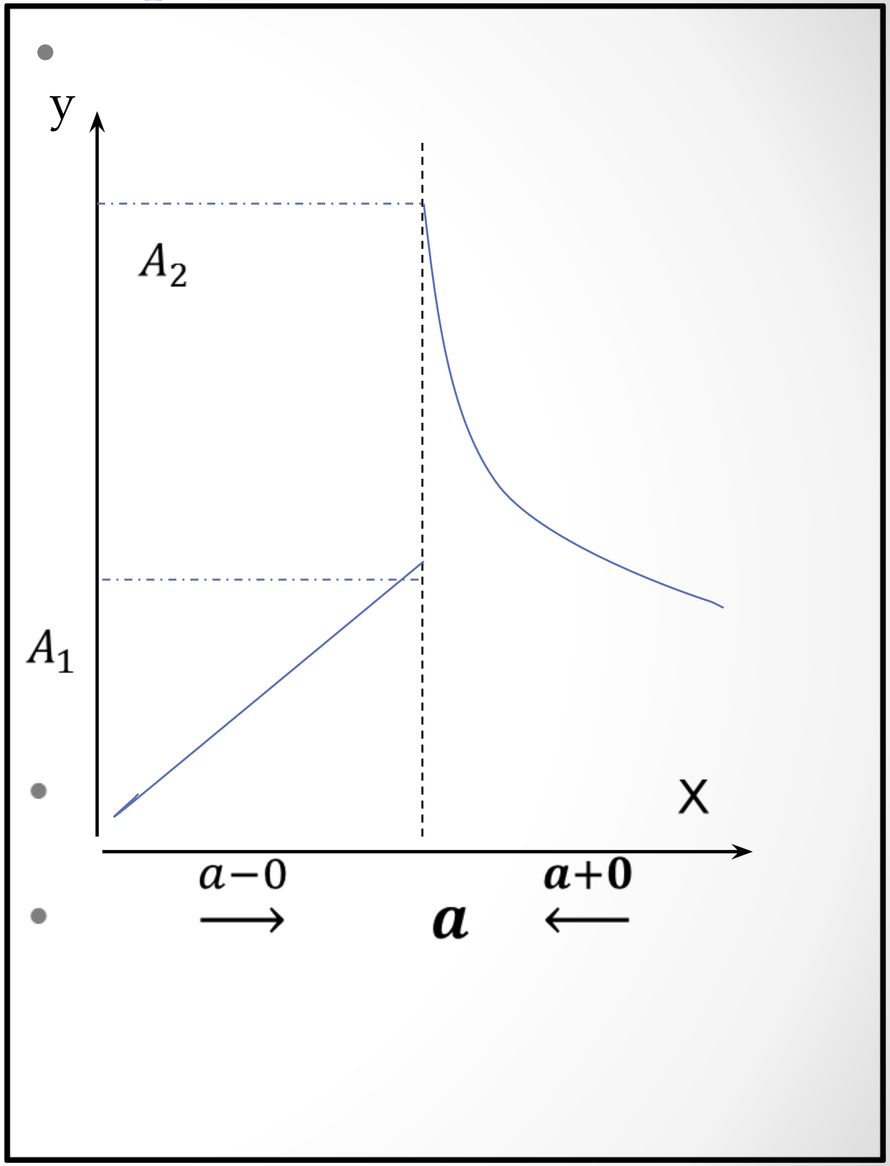
- Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

- $\lim_{x\to a} f(x) = A$
- $f(x) \to A$ при $x \to a$

Пример: $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

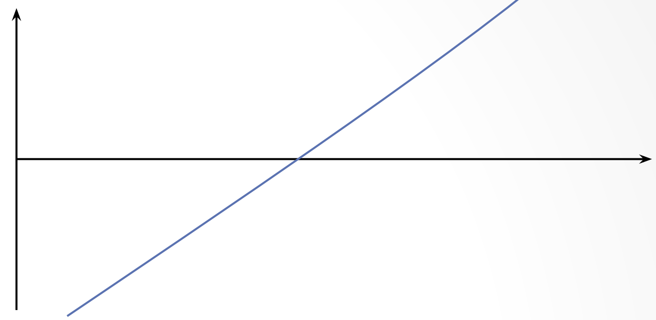
Односторонние пределы

- 1. Число A_1 называется **пределом слева** функции $f(x)$ в точке $x = a$ (при $x \to a - 0$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a - \delta, \ \ a)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$:
- $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$
- $f(x) \to A_1$ при $x \to a$-0
- 2. Число A_2 называется **пределом справа** функции $f(x)$ в точке $x = a$ (при $x \to a + 0$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a, \ \ a + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$:
- $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$
- $f(x) \to A_2$ при $x \to a$+ 0

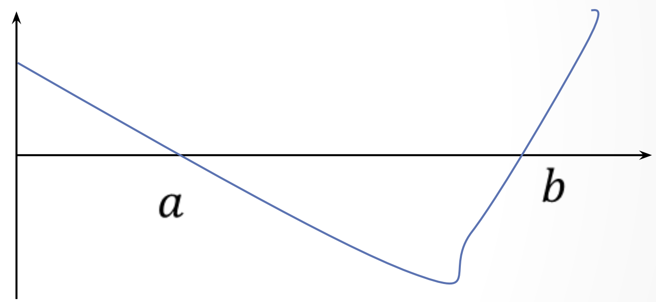


Функции бесконечно большие, бесконечно малые, ограниченные

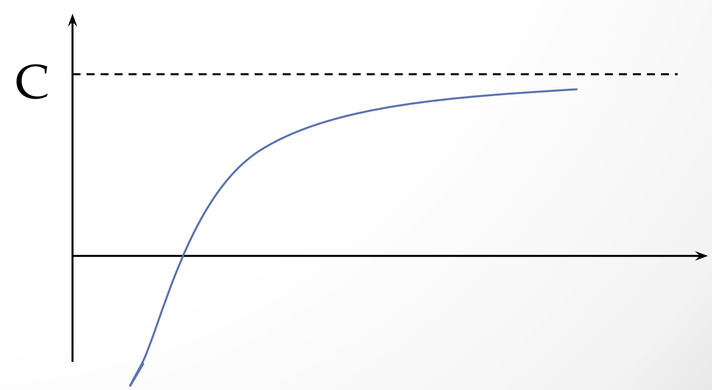
- Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad (-\infty)$



- Функция называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$



- Функция называется **ограниченной сверху** на интервале, если $f(x) < C$
- Функция называется **ограниченной снизу** на интервале, если $f(x) > C$



Действия с бесконечно малыми и бесконечно большими. Неопределенности

1. Сумма (разность) бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая
2. Произведение бесконечно малой и ограниченной функции, а также произведение бесконечно малых есть функция бесконечно малая
3. Произведение бесконечно большой и ограниченной функции, а также произведение бесконечно больших есть бесконечно большая функция
4. Если в окрестности некоторой точки функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $^1/_{f(x)}$ является бесконечно малой
5. Если в окрестности некоторой точки функция $f(x)$ является бесконечно малой, то функция $^1/_{f(x)}$ является бесконечно большой
6. Сумма бесконечно больших одного знака бесконечно большая функция
7. **Неопределенности** $\mathbf{\frac{0}{0}}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\mathbf{0\cdot\infty}$, $\infty-\infty$, $\mathbf{1}^{\infty}$, $\infty^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{0^0}$

1. [Замечательные пределы.docx]

Сравнение бесконечно малых

- Определения

1. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению с** функцией $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

2. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой одного порядка с** функцией $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{A} \neq 0, A \neq \infty$

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** функциями при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

- **Обозначения**

1. $\boldsymbol{f(x) = o(g(x))}$

$x \to a$

Пример: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$

$x^2 = o(x), \quad x \to 0$

2. $\boldsymbol{f(x) = O(g(x))}$

- $x \to a$

- Пример: $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{x^2} = 5,$

- $5x^2=O(x^2), \quad x \to 0$

- 3. $\boldsymbol{f(x) \sim g(x), \quad x \to a}$

Пример: $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

$\boldsymbol{\sin x \sim x, \quad x \to 0}$

Эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^m}{x} = 1$

- $sinx \sim x$
- $arcsinx \sim x$
- $tgx \sim x$
- $arctgx \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $e^x \sim 1 + x$
- $(1+x)^m \sim 1 + mx$
- $cosx \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

Основные теоремы о пределах

1. Если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \rightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0,$

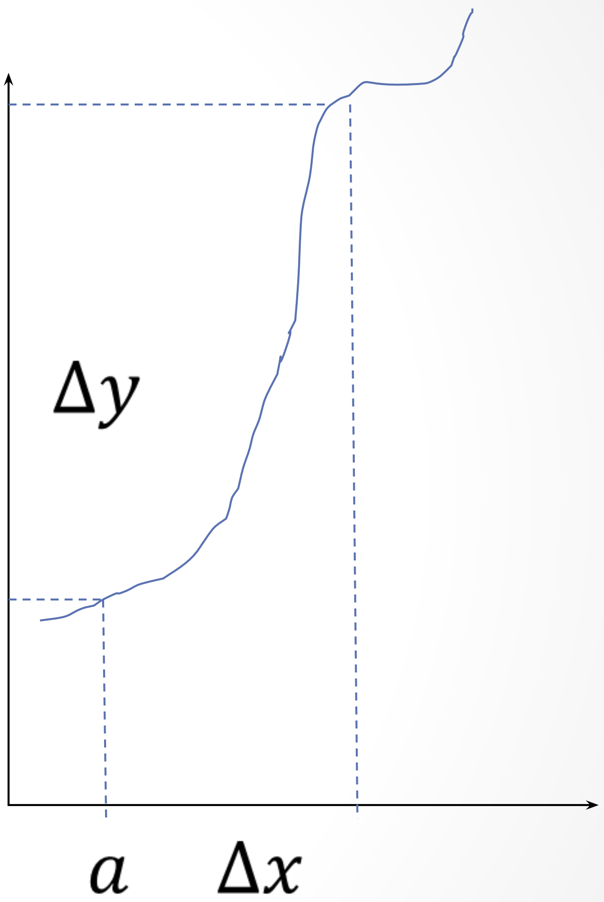
   $x \to a$

3. Если функция имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то она ограничена: $|f(x)| < A$

4. *Признаки существования предела* а) если в окрестности некоторой точки $x = a$ определены функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ такие, что $\varphi(x) < f(x) < g(x)$ и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} g(x) =$ A, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ A, б) если последовательность **монотонно** возрастает (убывает) и **ограничена** сверху (снизу), то она имеет предел

Непрерывность функции в точке

- Функцию $f(x)$, определенную в окрестности точки $x = a$, называют *непрерывной* в этой точке, если $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Функцию, определенную в окрестности точки $x = a$, называют *непрерывной* в точке если $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
- $\Delta x = x - a$ - приращение аргумента
- $\Delta y = f(x) - f(a)$ – приращение функции



Точки разрыва

- Пусть функция $f(x)$определена в окрестности точки $x = a$, кроме, может быть, самой точки. Точку $x = a$ называют **точкой разрыва** функции, если

1. Функция не определена в точке
2. Функция определена в точке, но не существует $\lim_{x\to a} f(x)$ или существует, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

Пусть в точке существуют **односторонние конечные пределы**:

$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$,

- то $x = a$ – **точка разрыва 1 рода.**

- $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$,
- то $x = a$ – **точка устранимого разрыва.**

Если в точке не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов, то $x = a$ – **точка разрыва 2 рода**