

Матрицы. Определители.
Свойства.

Умножение матриц.
Обратная матрица

Лекция 10

Система линейных уравнений.

Матрица – совокупность $m \cdot n$ чисел (функций), расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$
- $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$
-
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$
- Для случая $m = n = 3$ матрица коэффициентов системы:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Здесь a_{ij} - элемент матрицы.

- i – номер строки, j - номер строки, на пересечении которых стоит элемент

Определитель матрицы. Вычисление.

- Если число строк матрицы равно числу столбцов ($m = n$), то матрицу называют **квадратной**, а число n называют **порядком матрицы**.
- Для квадратных матриц вводится понятие **определитель** (или **детерминант**) матрицы – число, которое записывают в виде таблицы (в прямых скобках) и вычисляют по определенному правилу:
- 1) $n = 2$, $\Delta A = \text{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- **Пример:** $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$
- 2) $n = 3$, $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$
- $= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$
- $- (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$
- **Пример:** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 1 -$
 $0 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 = -6$

Свойства определителей

1. Строки и столбцы определителя равноправны. *Транспонирование* – замена строк на столбцы с сохранением порядка следования. *При транспонировании определитель не изменяется*
2. При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный
3. Определитель **равен нулю**, если имеет **две одинаковых строки (столбца)**
4. *При умножении какой-либо строки (столбца) определителя на коэффициент λ весь определитель умножается на этот коэффициент*
5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
6. Если определитель имеет **пропорциональные строки (столбцы)**, то **он равен нулю**
7. **Определитель не изменится**, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое число

Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Разложение определителя по строке (столбцу)

- Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называют определитель $(n-1)$ -го порядка. Алгебраическим дополнением называют минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначают $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Здесь i, j - номера строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент.

• Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $a_{12} = 0$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17$

- Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

• Пример: разложение по 1-й строке $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} +$

$+ 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 5 = -6.$

• Но лучше разложить по 2 столбцу: $\Delta A = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6$

Виды матриц

- 1. *Диагональная матрица* – квадратная матрица, для которой равны нулю все элементы вне главной диагонали

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 2. *Единичная матрица* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $EA = AE = A$

- 3. *Нулевая матрица* – любая матрица, все элементы которой нули

- $$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4. **Вырожденная (невырожденная) матрица** - квадратная матрица, определитель которой равен нулю $\Delta A = 0$ ($\Delta A \neq 0$)

- 5. **Транспонированная матрица A^T** получается из исходной заменой строк на столбцы с сохранением порядка следования•

Действия с матрицами

- **Сравнивать, выполнять действия сложения и вычитания можно только над теми матрицами, у которых одинаковое число строк и одинаковое число столбцов**

- 1. *Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы*

$$\boxed{A} = \boxed{B}$$

$$a_{ij} = b_{ij}$$

- 2. *Суммой (разностью) $A \pm B$ матриц называют матрицу C*

$$\boxed{A} \pm \boxed{B} = \boxed{C}$$

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

- Сложение матриц коммутативно ($A + B = B + A$) и ассоциативно ($(A + B) + C = A + (B + C)$)

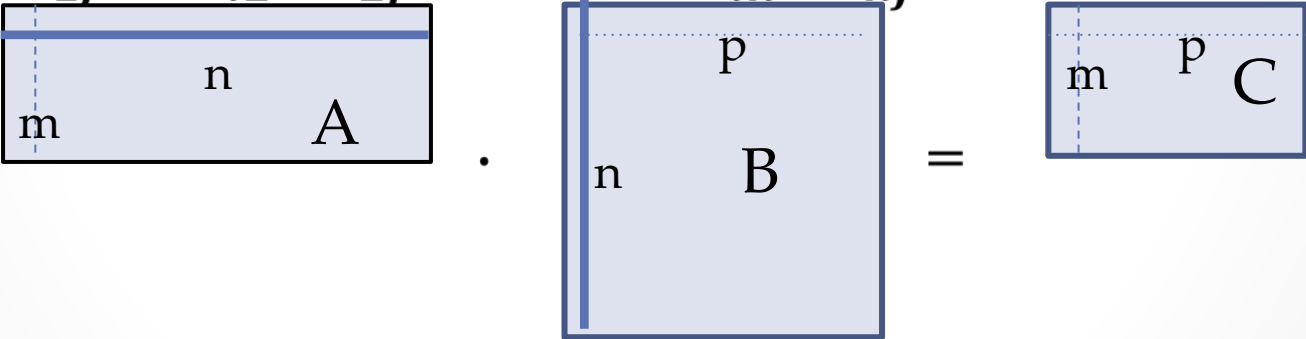
- 3. **Произведением матрицы A на число λ называют матрицу $C = \lambda A$, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ (каждый элемент матрицы умножается на**

это число):

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

$$AB \neq BA$$

- Перемножать можно только те матрицы, у которых *число столбцов* первой матрицы (стоящей *слева*) *равно числу строк* второй матрицы (*стоящей справа*) : $C = A \cdot B$
- Элемент c_{ij} на пересечении i -й строки и j -го столбца равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и j -го столбца матрицы B :
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- 
-
-
-

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 8 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ -4 \cdot 8 + 3 \cdot 1 & -4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 16 & 8 \\ -29 & -16 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Для всякой невырожденной матрицы A (квадратная матрица с ненулевым определителем $\Delta A \neq 0$) существует обратная матрица A^{-1} , такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- Способ определения : 1) каждый элемент матрицы A заменяется его алгебраическим дополнением $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,
- 2) полученная матрица транспонируется (строки заменяют на столбцы)
- 3) все элементы делятся на определитель матрицы A
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$