Системы линейных алгебраических уравнений.

Обзор методов решения.

Лекция 11

Матричные уравнения

- 1) Найдем неизвестную матрицу X из матричного уравнения
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow AX = B$
- $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$ Обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Умножаем **<u>слева</u>** матричное уравнение на обратную матрицу :

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Longleftrightarrow EX = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$

- $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2) $X\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow XA = B \Longleftrightarrow X = BA^{-1}$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ -7 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

- Линейную систему записываем в матричном виде $\boldsymbol{AX = B}$.
- Если матрица системы A *квадратная и невырожденная*, то система имеет *единственное решение* $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Пример. $\begin{matrix} 2x & +2y & +3z = 1 \\ x & -y & = \quad 0 \\ -x & +2y & +z = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} -1+6 \\ -1+6 \\ 1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = y = -5, \quad z = 7$

Метод Крамера решения систем линейных уравнений

- Если матрица системы *A квадратная и невырожденная*, то система имеет *единственное решение* , которое можно найти по формулам:
- $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{b_3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} & a_{23} \\ a_{31} & \boldsymbol{b_3} & a_{33} \end{vmatrix},$
- $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{b_2} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta A},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta A},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta A}$
- ***Пример***: $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$
- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ -1 & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \mathbf{1} \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = -7 \Longrightarrow \quad x = y = -5,$
- $z = 7$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

- Этот метод является более универсальным и может быть использован и в тех случаях, когда матрица коэффициентов A не является квадратной или является квадратной, но ее определитель $\Delta A = 0$.
- К элементарным (линейным) преобразованиям уравнений системы относят : 1) умножение уравнения на число ,отличное от нуля, 2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число, отличное от нуля, 3) перемена местами двух уравнений системы
- Выполняя элементарные преобразования, получаем систему, равносильную исходной.

Преобразования удобнее проводить **над расширенной матрицей системы** $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$, **которая преобразуется при этом к треугольному или трапецевидному виду (все элементы левее главной диагонали равны нулю)**

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (примеры решений)

- Для системы, рассмотренной ранее, расширенная матрица имеет вид:
- $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$
- $\left\langle \begin{array}{c} \text{Первую строку умножаем на } (-2) \text{ и складываем со второй,} \\ \text{а затем складываем первую и третью строки} \end{array} \right\rangle$
- $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} 2-\text{ю строку умножаем} \\ \text{на } (-4) \text{и складываем} \\ \text{с } 3-\text{й строкой} \end{array} \right\rangle$
- $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{получаем} \\ \text{равносильную} \\ \text{систему} \end{array} \right\rangle$
- $\begin{array}{lll} x & -y & = 0 \\ y & +z & = 2 \\ & z & = 7 \end{array} \Longrightarrow \quad z = 7, \qquad x = y = -5$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

- **Ранг матрицы** $\boldsymbol{r}$ – целое число, равное максимальному числу линейно-независимых строк матрицы (уравнений системы)
- Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях
- *Практический способ определения ранга – число ненулевых строк* после приведения матрицы к трапецевидному (треугольному) виду при помощи алгоритма Гаусса.
- **Пример:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{11} & \mathbf{2} \\ \mathbf{11} & \mathbf{4} & \mathbf{56} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{r} = \mathbf{2}$
- **Теорема Кронекера-Капелли:** для того, чтобы система линейных уравнений была совместна (имела хотя бы одно решение) необходимо и достаточно выполнение условия
- $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$. **Следствия :** 1) если $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) < \boldsymbol{n}$, то
- система имеет **бесконечное множество решений** ,
- 2) если $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$, то **система решений не имеет**

Пример системы с бесконечным числом решений

- $$\begin{aligned} 2x &+2y &+3z &= 1 \\ -x &+2y &+z &= 2 \\ 2x &-4y &-2z &= -4 \end{aligned} \iff (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- $$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- $r(A) = r(A\,|\,B) = 2 < n = 3$ (число неизвестных в системе).
- Система имеет бесконечно много решений.
- Число базисных переменных равно рангу $\boldsymbol{r = 2}$, число свободных переменных равно $\boldsymbol{(n - r) = 3 - 2 = 1.}$
- Поэтому одну (любую) из переменных считаем произвольной .
- **Пусть $\boldsymbol{z = t}$.** Тогда для определения других переменных получаем систему $-x + 2y = 2 - t$
- $$6y = 5 - 5t \Longrightarrow \begin{aligned} y &= \frac{5}{6}(1 - t) \\ x &= \frac{1}{3}(2t - 1) \end{aligned}$$

Пример системы, которая не имеет решений

- $\begin{matrix} 2x & +2y & +3z & = 1 \\ -x & +2y & +z & = 2 \\ 2x & -4y & -2z & = 1 \end{matrix} \Longleftrightarrow (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$

- $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim$

- $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right).\ \ r(A) = 2, \quad r(A\,|\,B) = 3, r(A) < (A\,|\,B)$

- Система решений не имеет . Или пришли **к невозможному равенству** $\mathbf{0 \cdot z = 1}$