

Векторы. Линейные операции.

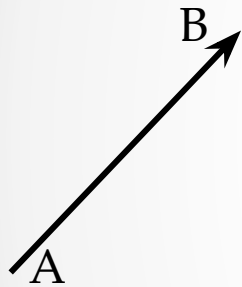
Базис.

Лекция 12

Вектор. Определение. Равенство

Векторные величины (скорость, ускорение, сила и др.) характеризуются как **величиной**, так и **направлением**.

Вектор $\mathbf{a} = \overline{AB}$ – это направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B , который можно переносить параллельно самому себе (свободный вектор)



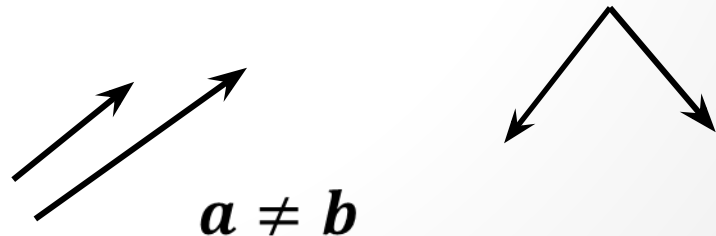
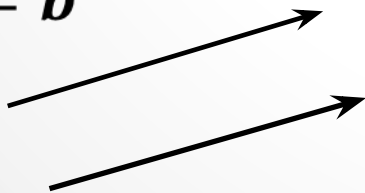
Длину вектора называют *модулем* и обозначают

$$|\mathbf{a}| = |\overline{AB}| \geq 0$$

Нулевой вектор $\overline{AA} = \mathbf{0}$ имеет нулевую длину $|\overline{AA}| = 0$ и не имеет определенного направления

Векторы равны , если совпадают по длине и по направлению:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

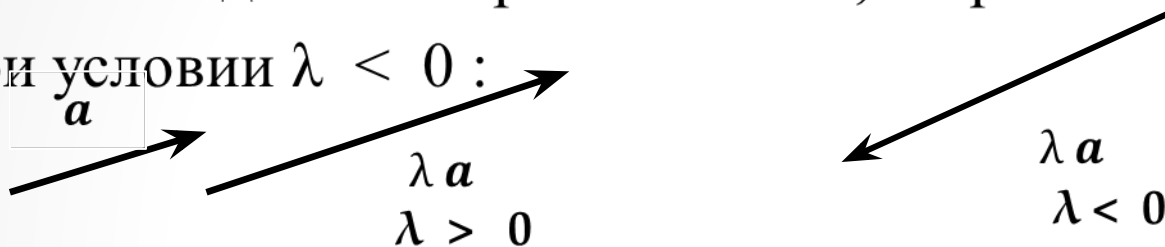


$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$$

Линейные операции. Умножение на число

1. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется вектор $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}$, длина которого равна $|\lambda||\mathbf{a}|$, направление при условии $\lambda > 0$ совпадает с направлением $\mathbf{a}$, и противоположно $\mathbf{a}$

при условии $\lambda < 0$:



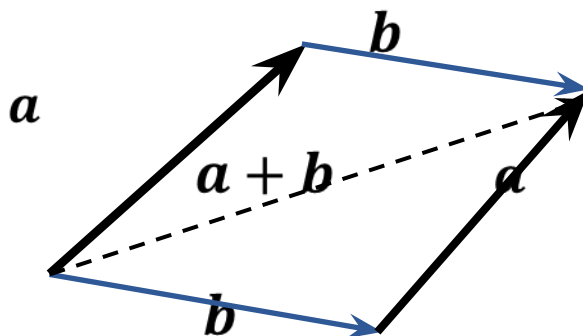
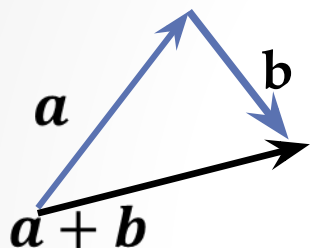
Два вектора называются **коллинеарными**, если при приведении к общему началу они лежат на одной прямой

Единичный вектор или **орт** $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ - вектор *единичной длины*, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{a}$.

Любой вектор можно представить в виде $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}$

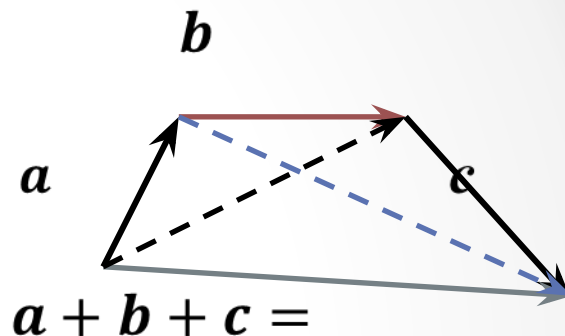
Линейные операции. Сложение и вычитание.

Суммой векторов называется вектор $c = a + b$, направленный из начала вектора a в конец вектора b при условии, что начало b совпадает с концом a



$$a + b = b + a$$

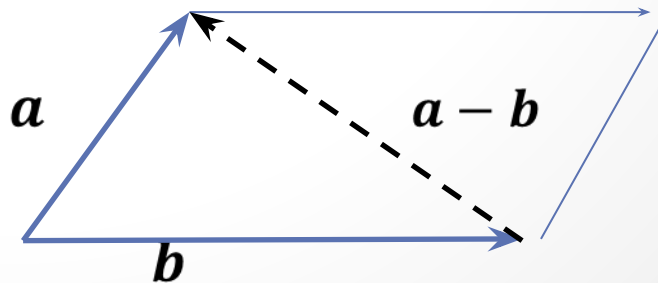
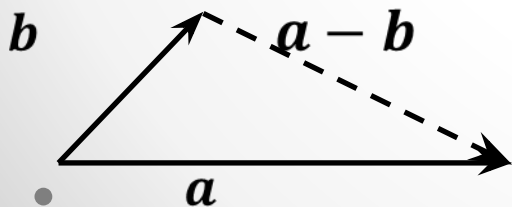
КОММУТАТИВНОСТЬ



$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

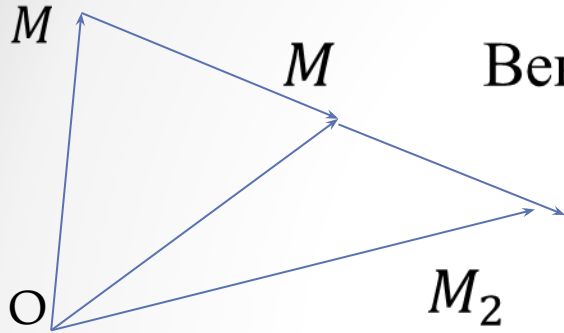
АССОЦИАТИВНОСТЬ

Разностью векторов называют вектор $x = a - b$, который в сумме с вектором b дает вектор a . Вектор разности векторов, приведенных к общему началу направлен из конца вектора b в конец вектора a .



Линейные операции. Пример: деление отрезка в заданном отношении

Пусть точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$



Векторы M_1M , MM_2 , M_1M_2 сонаправлены

$$MM_2 = \frac{1}{\lambda} M_1M, \quad M_1M_2 = M_1M + MM_2$$

$$r_2 - r_1 = M_1M \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = (r - r_1) \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)$$

- $OM = r$

$$r - r_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1} (r_2 - r_1)$$

- $OM_1 = r_1, \quad OM_2 = r_2$

$$r = \frac{1}{1+\lambda} r_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} r_2$$

- $M_1M = r - r_1$

- $M_1M_2 = r_2 - r_1$

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda} \quad . \quad \text{При } \lambda = 1 \quad r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

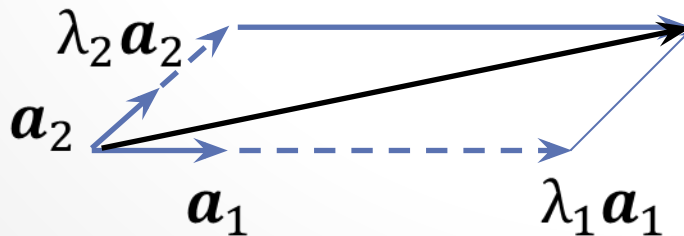
Базис

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ образуют **линейно-независимую** систему векторов, если линейная комбинация векторов $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0$ только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$. В противном случае система линейно зависима – векторы системы можно связать при помощи линейных операций.

Базисом в пространстве n измерений R^n называют систему n линейно-независимых векторов. *Любой вектор пространства выражается через векторы базиса единственным образом:*

$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n$, где числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ – *координаты вектора в выбранном базисе*

На плоскости (пространство R^2) базис образуют любые 2 неколлинеарных вектора: $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$

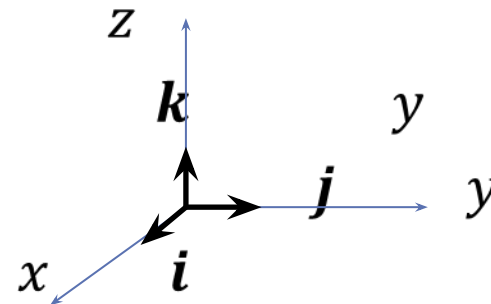
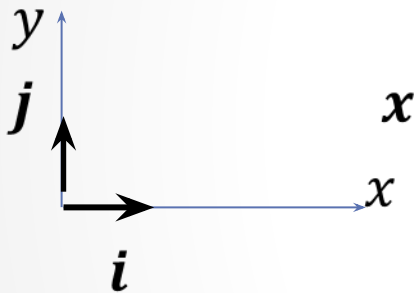


Базис. Координаты вектора

На пространстве R^3 базис образуют любые 3 некопланарных вектора (не лежат в одной или параллельных плоскостях):

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$$

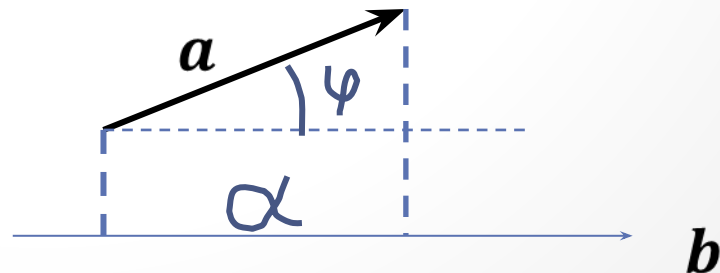
Базисные векторы вместе с началом координат образуют декартову систему координат. *Взаимно перпендикулярные базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ образуют прямоугольную декартову систему координат*



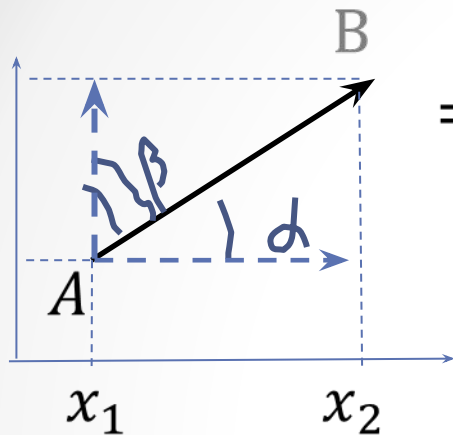
$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

Скалярная проекция вектора на другой вектор – это число α :

$$\alpha = \text{Пр}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$$



Координаты вектора в прямоугольной системе
совпадают с его проекциями на координатные оси



$$\mathbf{AB} = \mathbf{AB}_1 + \mathbf{AB}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (X, Y)$$

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad - \text{длина (модуль) вектора}$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$X = \text{Пр}_i \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos \alpha$$

$$Y = \text{Пр}_j \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos \beta$$

В пространстве R^3 вводится также угол γ между вектором и осью Oz и координата $Z = z_2 - z_1 = \text{Пр}_k |\mathbf{AB}| = |\mathbf{AB}| \cos \gamma$:

$$\mathbf{AB} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad |\mathbf{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\text{Единичный вектор (орт): } \mathbf{e} = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\text{Выполняется: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Действия над векторами в координатной форме

Пусть векторы заданы своими координатами

$$\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1) = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2) = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k} \quad \text{Тогда справедливо :}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (X_1 - X_2, \quad Y_1 - Y_2, \quad Z_1 - Z_2)$$

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \iff (X_2, \quad Y_2, \quad Z_2) = (\lambda X_1, \quad \lambda Y_1, \quad \lambda Z_1)$$

Условие коллинеарности векторов - пропорциональность

координат векторов $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$

Примеры: 1) Векторы $\mathbf{a} = (2, \quad 3, \quad 4)$ и $\mathbf{b} = (4, \quad 6, \quad 8)$

коллинеарны 2) Если $\mathbf{a} = (2, \quad 3, \quad 4)$ и $\mathbf{b} = (1, \quad 0, \quad 3)$,

то вектор $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (4 - 3, \quad 6 - 0, \quad 8 - 9) = (1, \quad 6, \quad -1)$