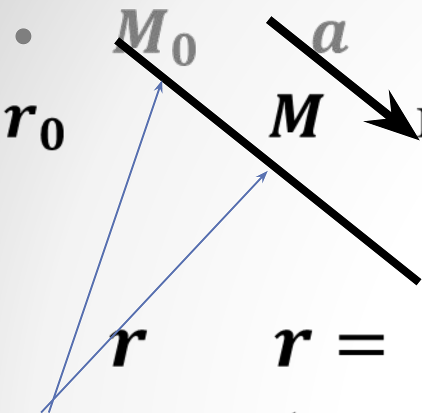
Аналитическая геометрия на плоскости:
прямая линия, кривые второго порядка

Лекция 14

Уравнение прямой с **направляющим вектором** $\boldsymbol{a} = (l\,, m)$- любой вектор параллельный прямой



- Условие *параллельности* вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора, принадлежащего прямой $\boldsymbol{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \quad \text{(каноническое уравнение)}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a} \cdot t \longrightarrow x = x_0 + l \cdot t \ ; y = y_0 + m \cdot t$$

(параметрическое уравнение прямой)

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - ура-ие прямой через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$

Пример: пусть $M_1(3{,}5)$, $M_2\,(2{,}8)$.

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-5}{8-5} \Rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{3} \longrightarrow 3(x-3) = -(y-5) \Rightarrow 3x + y - 14 = 0$$

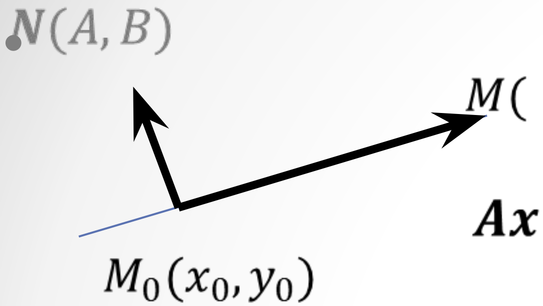
$\boldsymbol{a} = (-1,\ 3)$; параметрическое уравнение $x = 3 - t$; $\quad y = 5 + 3t$

Условие параллельности: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$;

перпендикулярности: $(a_1, a_2) = 0$

Уравнение прямой с **нормальным вектором**

$\boldsymbol{N} = (A\,, B)$- любой вектор, перпендикулярный прямой



Условие **перпендикулярности** вектора нормали $\boldsymbol{N} = (A,B)$ и вектора $\boldsymbol{M_0M}$:

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \quad \text{или}$$

$\boldsymbol{Ax+By+C=0}$ **-** общее уравнение прямой

Пример: $4x+3y-5=0 \Longrightarrow \boldsymbol{N}(4,3)$

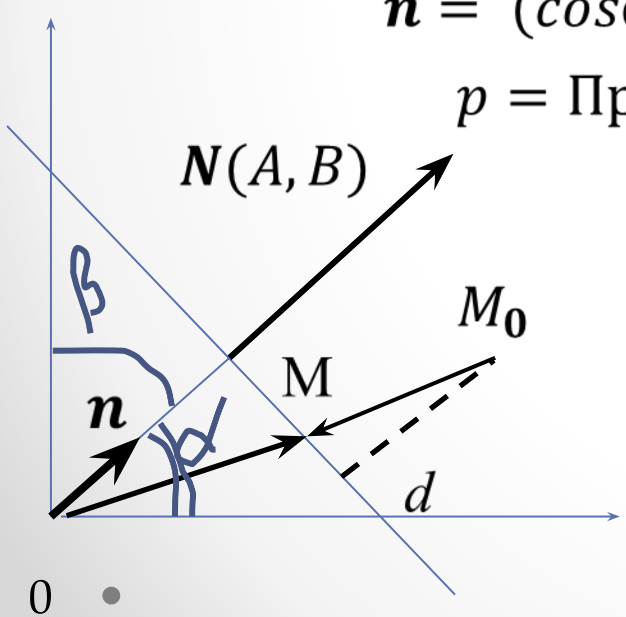
Нормальное уравнение прямой :

p – расстояние от начала координат до прямой

$$\boldsymbol{n} = (cos\alpha,\ cos\beta) = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}; \ \boldsymbol{r} = (x,y)$$

$$p = \text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = xcos\alpha \quad + ycos\beta$$

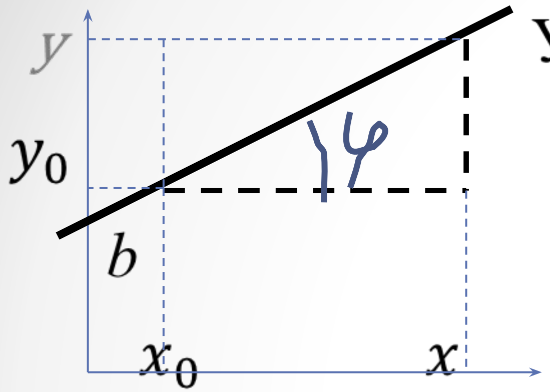
$$\boldsymbol{xcos\alpha \quad + ycos\beta - p = 0}$$



Расстояние от точки $\boldsymbol{M_0}$ до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Угловой коэффициент $k = tg\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0}$

$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

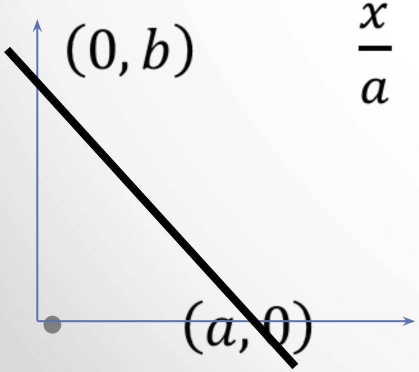
$Ax + By + C = 0 \longrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$; $k = -\frac{A}{B}$

Условие параллельности : $k_1 = k_2$

Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$

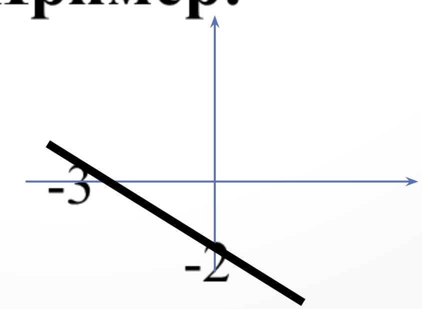
Угол между прямыми $tg\,\varphi = \frac{|k_2-k_1|}{1+k_1k_2}$.

Уравнение «в отрезках на осях:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Пример:



$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$$

$$2x + 3y + 6 = 0$$

Кривые второго порядка задаются уравнением второго порядка

$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

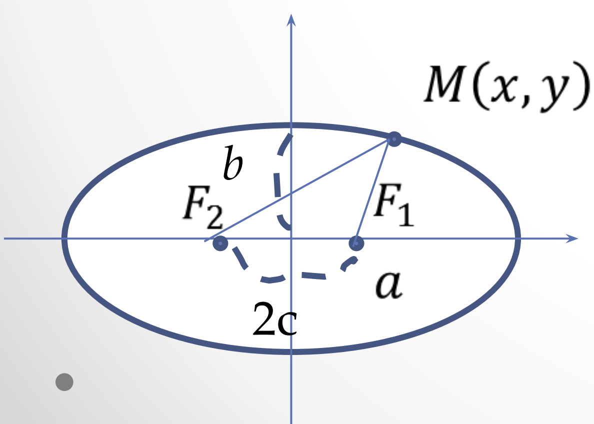
Поворот и параллельный перенос системы координат приведет уравнение к простейшему (каноническому) виду:

1. **Окружность** – множество точек плоскости, одинаково удаленных от некоторой точки (центра) $O(x_o, y_o)$: $\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$

Пример: $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$ $\quad (x+1)^2 + (y+3)^2 = 16$

$O(-1,-3), \longrightarrow R = 4$

2. **Эллипс** – множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами F_1, F_2, есть величина постоянная $(2a)$, большая чем расстояние между фокусами $(2c)$: $\boldsymbol{\frac{c}{a} < 1}$

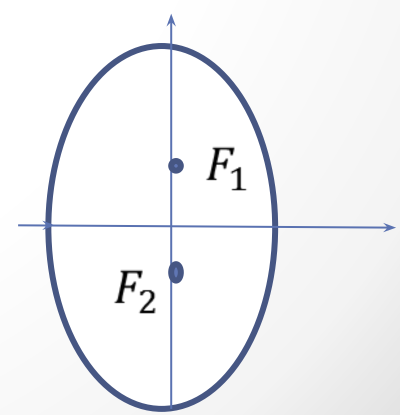


a, b – полуоси эллипса

$M(x,y)$ $\quad c^2 = a^2 - b^2, \quad a > b$

$c^2 = b^2 - a^2, \quad a < b$

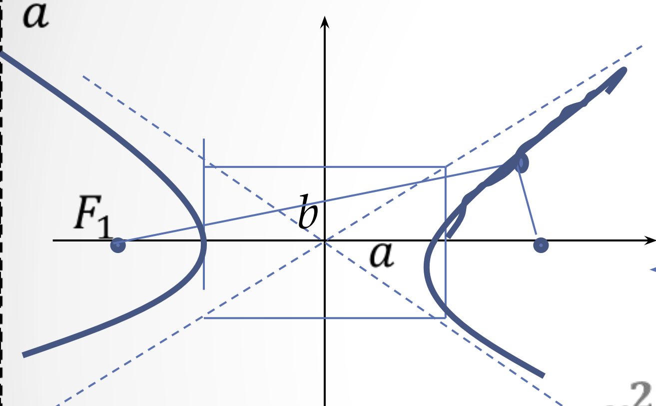
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Кривые второго порядка

3. Гипербола - множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами* F_1, F_2 , есть величина постоянная $(2a)$, меньшая чем расстояние между фокусами $(2c)$:

$\frac{c}{a} > \mathbf{1}$: $c^2 = a^2 + b^2$

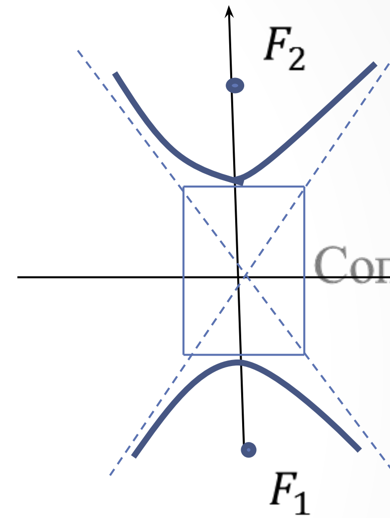


Уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

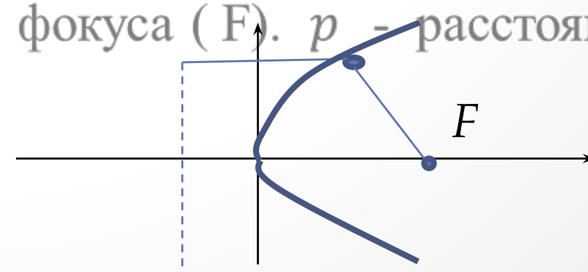
Основная

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$



Сопряженная

4. Парабола – множество точек плоскости, одинаково удаленных от некоторой прямой (директрисы) и некоторой точки - фокуса (F). p - расстояние между фокусом и директрисой : $\boldsymbol{y^2 = 2px}$



Полярная система координат

- 0 – полюс

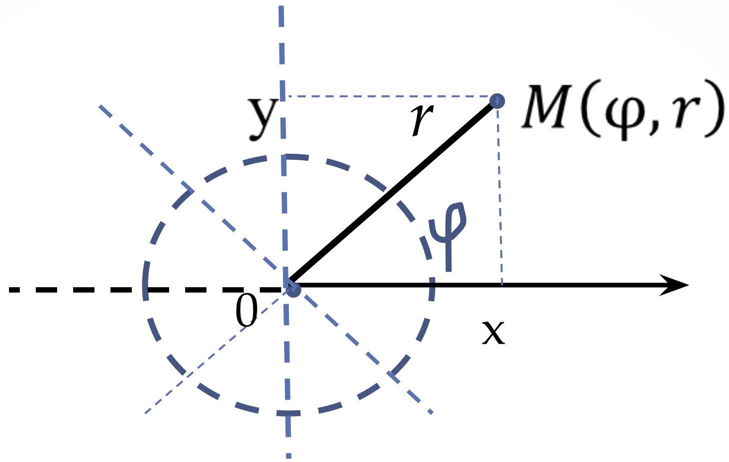
  $0x$ – полярная ось

  (совмещена с 0x)

  $\boldsymbol{r = |OM| \geq 0}$

  полярный радиус

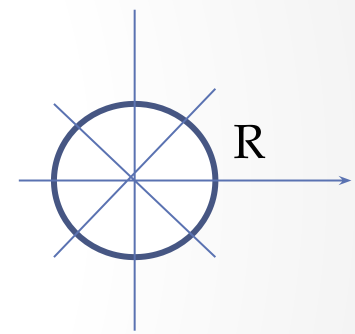
  φ – полярный угол



$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$

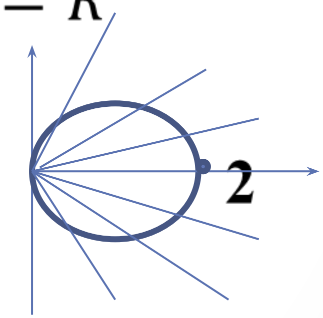
φ $= \boldsymbol{arctg\frac{y}{x}}$, если

$x > 0,\ y > 0$



Примеры: 1) $x^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow r = R$

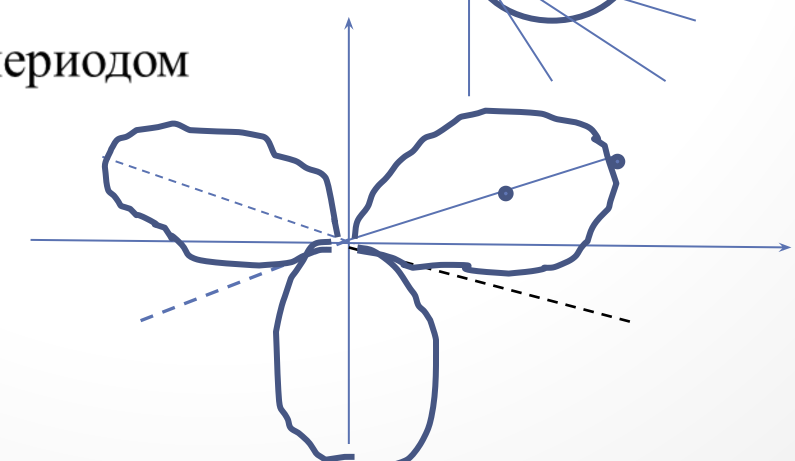
2) $x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow r = 2cos\varphi$



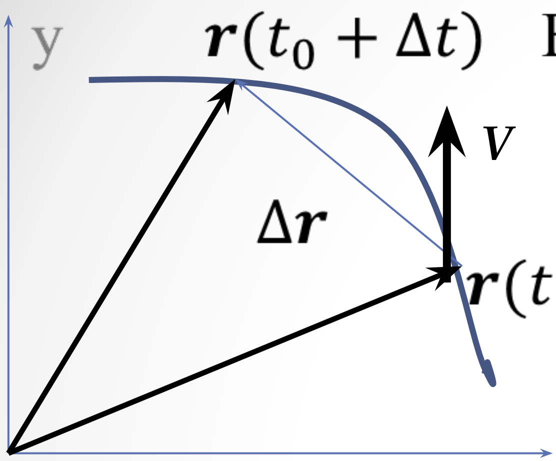
3) $\boldsymbol{r = 1 + sin3\varphi}$

Функция периодическая с периодом

$T = \frac{2}{3}\ \pi.$



Векторная функция скалярного аргумента (ВФСА)



Если каждому действительному $t \in D$, $D \in R$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{r}(t)$, то на то на множестве Dзадана векторная функция действительной переменной:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

Вектор скорости $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{r}^{I}(t) = x^{I}(t)\boldsymbol{i} + y^{I}(t)\boldsymbol{j} + z^{I}(t)\boldsymbol{k}$

Величина скорости $V = |\boldsymbol{V}| = \sqrt{(x^{I}(t))^2 + (y^{I}(t))^2 + (z^{I}(t))^2}$

Годограф – кривая, которую описывает конец вектора $\boldsymbol{r}(t)$

Примеры: 1) $\boldsymbol{r}(t) = Rcos(t)\boldsymbol{i} + Rsin(t)\boldsymbol{j} \longrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

2) $\boldsymbol{r}(t) = acos(t)\boldsymbol{i} + bsin(t)\boldsymbol{j} \longrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $\boldsymbol{r}(t) = ach(t)\boldsymbol{i} + bsh(t)\boldsymbol{j} \longrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

4) $\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{i} + (2t - t^2)\boldsymbol{j} \longrightarrow y = 1 - \frac{1}{9}(x-3)^2$

Векторная функция скалярного аргумента (ВФСА)

Вторая производная – **вектор ускорения:**

- $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{r}^{II}(t) = \quad x^{II}(t)\boldsymbol{i} + y^{II}(t)\boldsymbol{j} + z^{II}(t)\boldsymbol{k}$
- $|a(t)| = a(t) = \sqrt{(x^{II}(t))^2 + (y^{II}(t))^2 + (z^{II}(t))^2}$

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t})}{|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t})|} = \dfrac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t})}{V(t)}$ - единичный касательный вектор (направление скорости)

$\boldsymbol{a} = \dfrac{d(V\boldsymbol{\tau})}{dt} = \dfrac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{V}\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \boldsymbol{a}_\tau\,\boldsymbol{\tau} + a_n\,\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{a}_\tau = \dfrac{dV}{dt},$

$a_n = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - (\boldsymbol{a}_\tau)^2}$

Кривизна – угловая скорость касательного вектора $k = \lim_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Для кривой $y = y(x)$ $\qquad k = \left|\dfrac{y^{II}}{\sqrt{(1+(y^I)^2)^3}}\right|$

Для кривой, заданной параметрически

$x(t),\ y(t),\ z(t) \qquad k = \left|\dfrac{x^I y^{II} - y^I x^{II}}{\sqrt{\left((x^I)^2+(y^I)^2\right)^3}}\right|$