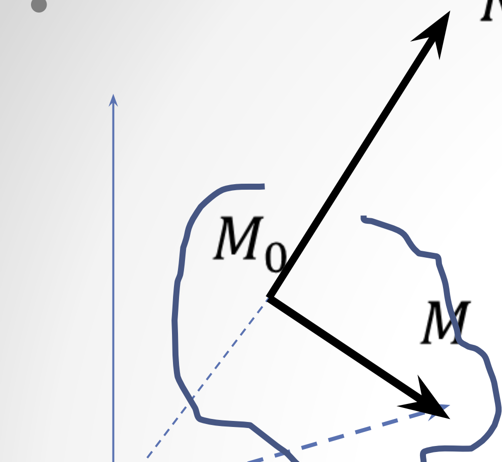
* Плоскость и прямая в пространстве R^3

Лекция 15

Плоскость в пространстве



$\boldsymbol{N} = (A,\ B,\ C)$ - **нормаль** – вектор, перпендикулярный плоскости P.

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

$M(x, y, z) \epsilon P$ только при условии $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{N}$

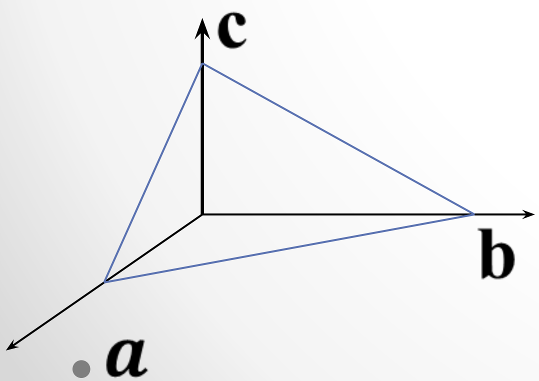
$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M_0M}) = 0$, $\boxed{\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0}}$

Раскрывая скобки, получаем **общее уравнение** плоскости

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

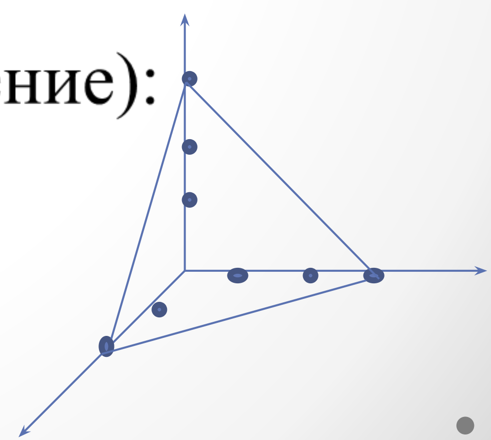
Пример: $3x + 2y + 2z - 6 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{N} = (3,\ 2,\ 2)$

Уравнение в «отрезках на осях»: $\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$



Пример (продолжение):

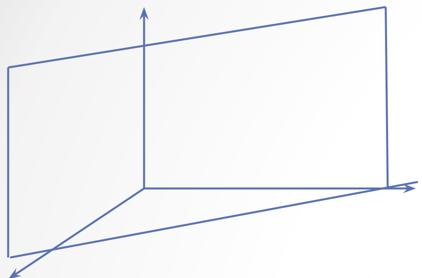
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$



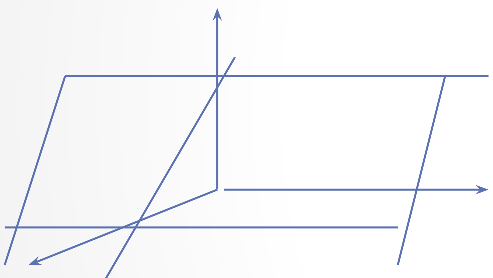
Частные случаи уравнений плоскости

1) $D = 0$ плоскость проходит через начало координат

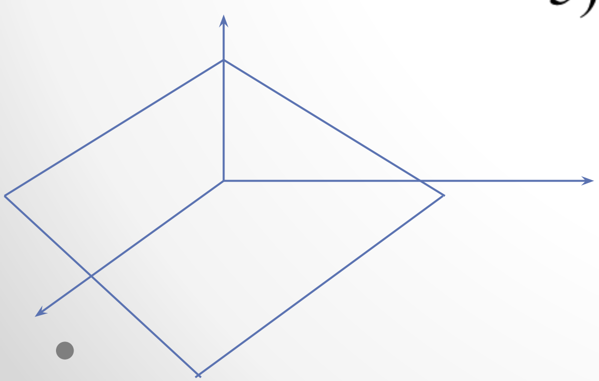
2) $C = 0, \quad N = (A, \quad B, \quad 0)$ плоскость параллельна оси $0Z$



3) $B = 0, \quad N = (A, \quad 0, \quad C)$ плоскость параллельна оси $0Y$

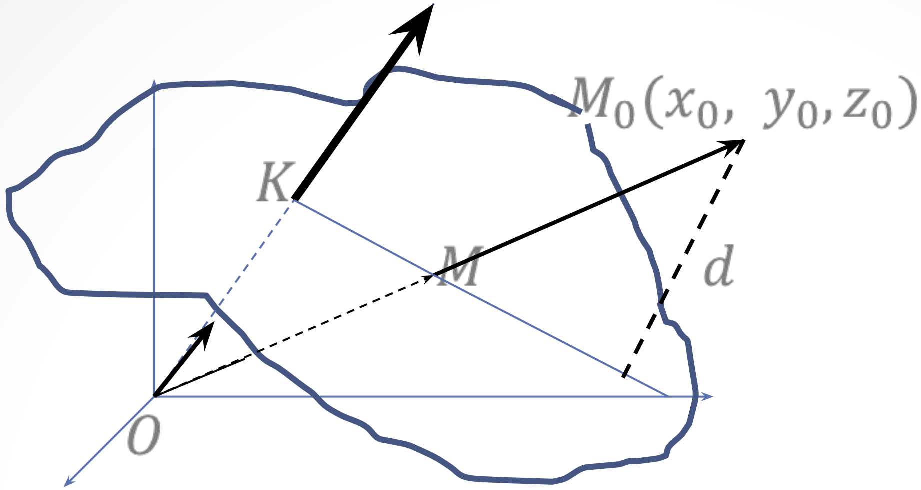


4) $A = 0, \quad N = (0, \quad B, \quad C)$ плоскость параллельна оси $0X$



5) $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}), \ \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{0}), \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{C})$ **соответствуют плоскостям , которые параллельны координатным плоскостям** $\boldsymbol{OYZ}, \quad \boldsymbol{OXZ}, \quad \boldsymbol{OX}$ **соответственно**

Нормальное уравнение плоскости



$p = |OK| \geq 0$ - расстояние от $O(0,0)$ до плоскости

$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) = (cos\alpha, \quad cos\beta, \quad cos\gamma)$- единичный вектор нормали, $\boldsymbol{OM} = (x, y, z) \rightarrow p = |\text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{OM}| = (\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{n}) \rightarrow$

$\boldsymbol{x cos\alpha + y cos\beta + z cos\gamma - p = 0}$ – **нормальное** уравнение плоскости

$\boldsymbol{d} = |\text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{MM_0}| = |(\boldsymbol{MM_0}, \boldsymbol{n})| = \frac{|\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2+B^2+C^2}}}$ - расстояние от точки M_0 до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

Специальные виды уравнений плоскости

Способ 1. 1) по условиям задачи находим два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, которые лежат в искомой плоскости или параллельны ей, а также точку, принадлежащую плоскости , 2) находим нормаль к плоскости как *векторное* произведение : $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (A, B, C)$, 3) записываем уравнение плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_o) + C(z - z_0) = 0$

Способ 2. 1) соответствует способу 1, 2) записываем условие **компланарности** векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{M_0 M}$ через смешанное произведение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{M_0}\, \boldsymbol{M} = 0$

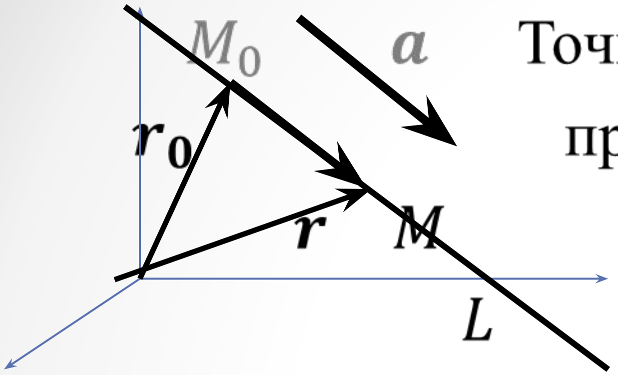
Пример: написать уравнение плоскости, проходящей параллельно оси OY через точки $M(2,0,-1)$, $K(3,4,1)$.

По условию вектор $\boldsymbol{MK} = (1, 4, 2)$ лежит в плоскости, вектор

$j = (0,1,0)$ параллелен плоскости. Тогда $\boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-1)$

Уравнение плоскости: $(x - 2) + 0(y - 0) - 1(z + 1) = 0$ или $2x - z - 5 = 0$

Прямая. Уравнения с **направляющим вектором** $\boldsymbol{a} = (l, m, p)$



- Точка $M_0 \in L$. Точка $M \in L$ только при условии $\boldsymbol{M_0M} \parallel \boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a} \cdot t \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

Параметрическое уравнение

Каноническое уравнение $\longrightarrow$ $\dfrac{\boldsymbol{x - x_0}}{\boldsymbol{l}} = \dfrac{\boldsymbol{y - y_0}}{\boldsymbol{m}} = \dfrac{\boldsymbol{z - z_0}}{\boldsymbol{p}}$

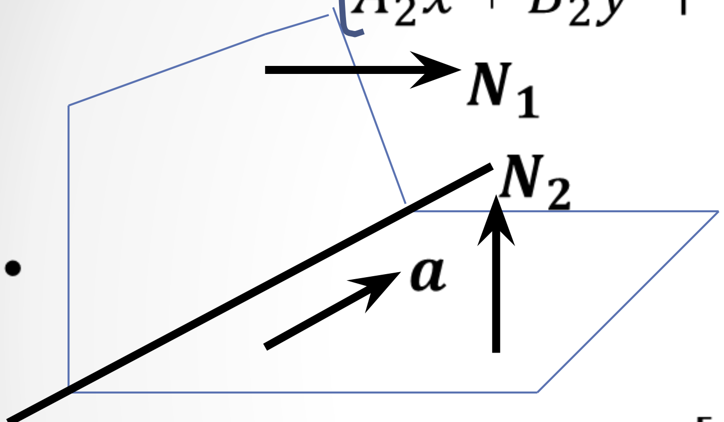
Пример: написать уравнение прямой, проходящей через $M_0(1,2,1)$ параллельно *прямой* : $x = 2 - 3t,\ y = 1 + 5t,\ z = 1 + 2t.$

По условию задачи искомая прямая параллельна заданной, то есть имеет тот же направляющий вектор $\boldsymbol{a} = (-3,5,2)$ $\longrightarrow$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{2} \quad \text{или} \quad x = 1 - 3t,\ y = 2 + 5t,\ z = 1 + 2t.$$

Общее уравнение прямой

Прямая в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \boldsymbol{N_1} = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \boldsymbol{N_2} = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$



1) Направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен как $\boldsymbol{N_1}$, так и $\boldsymbol{N_2}$:

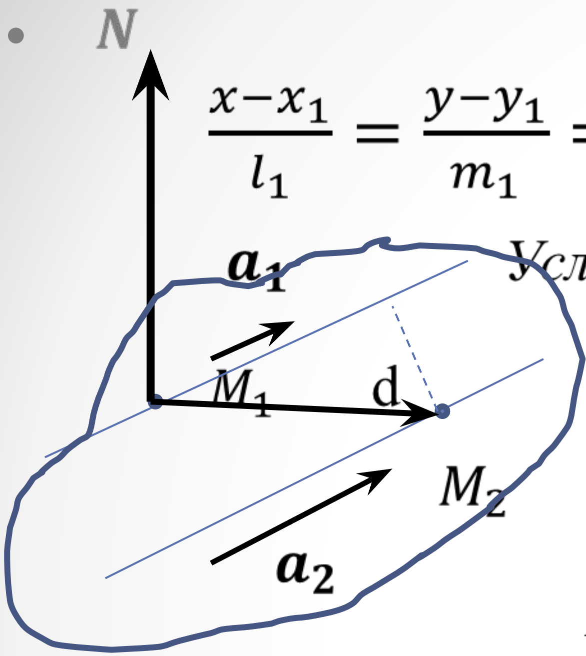
$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = (l, m, p)$$

2) Точку на прямой подбираем как одно из решений системы, задающей прямую **Пример:** $2x - 3y - 3z - 9 = 0$

$$x - 2y + z + 3 = 0$$

$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (9,5,1)$. Пусть $x_0 = 0$. Тогда $y_0 = 0$, $z_0 = -3$

Взаимное расположение прямых



$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

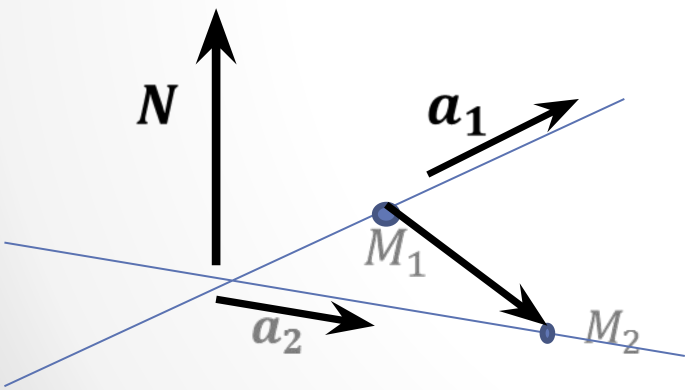
Условия параллельности $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{M_1M_2}]; \qquad d=\frac{|[\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{M_1M_2}]|}{|\boldsymbol{a_1}|}$$

Условие пересечения выражается через условие компланарности $a_1 \cdot a_2 \cdot M_1\, M_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

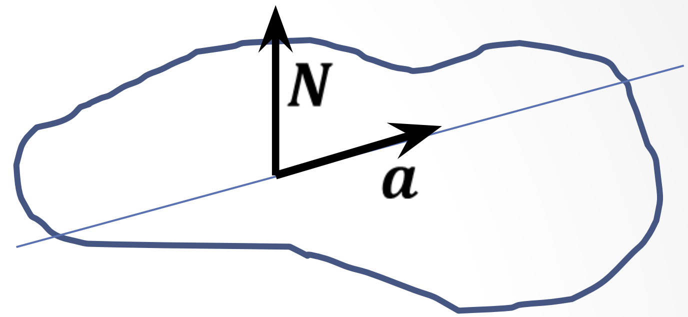
$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}]$$



Угол между прямыми: $\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})}{|\boldsymbol{a_1}|\cdot|\boldsymbol{a_2}|}$

Взаимное расположение прямой и плоскости

- $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ $\qquad Ax+By+Cz+D=0$



1) Прямая параллельна плоскости

$a \perp N \longrightarrow (a, N)=0$

2) Прямая пересекает плоскость

Точка пересечения: прямую задаем параметрически

$x=x_0+lt, y=y_0+mt, \quad z=z_0+pt$ *и* подставляем в уравнение плоскости $A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+pt)+D=0$. Находим из этого уравнения значение параметра *t* и подставляем в уравнение прямой

3) Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость

$cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=sin(\varphi)=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{N})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{N}|}$