Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

Лекция 3

Первообразная и неопределенный интеграл

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на некотором интервале, если $F(x)$ непрерывна на этом интервале и дифференцируема в каждой его внутренней точке, причем $F^{/}(x) = f(x)$
- Первообразная существует для каждой непрерывной функции
- Если $F(x)$ и $\boldsymbol{\Phi}(x)$ - две первообразные функции $f(x)$, то они могут отличаться на постоянную величину
- $F(x) = \boldsymbol{\Phi}(x) + C$
- Множество всех первообразных функций $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается
- $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойства неопределенного интеграла

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную и $a \in R$, то функция $af(x)$ также имеет первообразную и верно равенств $\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные имеют первообразные на некотором интервале, то функция $f(x) + g(x)$ также имеет первообразную на этом интервале, причем $\int\big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)dx$
3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $\quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
4. $\int \boldsymbol{f'(x)dx = f(x) + C}$, $\quad \int \boldsymbol{df(x) = f(x) + C}$

Таблица основных неопределенных интегралов

Таблица

- $\int dx = x + C$
- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsinx + C$
- $\int \frac{1}{(cosx)^2}dx = tgx + C$
- и далее смотри таблицу в распечатках для аудиторных занятий или в учебнике

Пример

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int \frac{5}{x}dx = 5ln|x| + C$
- $\int \left(e^x + \frac{4}{1+x^2}\right)dx = e^x + 4arctgx$
- $\int (tgx)^2\,dx = \int \left(\frac{1}{(cosx)^2} - 1\right)dx =$
- $\int \frac{dx}{(cosx)^2} - \int dx = tgx - x + C$

Основные методы интегрирования :**замена переменной**

$\int \left(f(t(x))\right) t'(x)dx = \int f(t)dt$ - табличный интеграл

- **Примеры**:
- $\int (sinx)^5 \, cosx \, dx \; \langle t = sinx, \quad dt = cosxdx \rangle =$

  $= \int (sinx)^5 \, dsinx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(sinx)^6}{6} + C$

- $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx \left\langle t = arctgx, \quad dt = \frac{dx}{1+x^2} \right\rangle =$

  $= \int e^{arctgx} \, d(arctgx) = \int e^t \, dt = e^t + C = e^{arctgx} + C$

- $\int \frac{xdx}{3x^2+4} = \langle t = 3x^2 + 4, \quad dt = 6xdx \rangle = \frac{1}{6} \int \frac{6xdx}{3x^2+4} =$

  $\frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} ln|t| + C = \frac{1}{6} ln|3x^2 + 4| + C$

Основные методы интегрирования: **подстановка** $\int \left(f(x(t))\right) x'(t)dt = \int f(t)dt$ - преобразования → табличный интеграл

- $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \langle x = t^2, \quad dx = 2tdt \rangle = \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{t+2} dt =$
- $= 2\int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t+2} = 2t - 4ln|t+2| + C =$
- $= 2\sqrt{x} - 4ln\left|\sqrt{x} + 2\right| + C$

- $\int \sqrt{1-x^2}\, dx =$

  $\left\langle x = sint, \ \ dt = costdt, \ \sqrt{1-} x^2 = \sqrt{1-(sint)^2} = cost \right\rangle$
- $= \int (cost)^2\, dt = \int \frac{1+cos2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int cos2tdt = \frac{1}{2}t +$
- $+ \ \frac{1}{4}sin2t + C = \frac{1}{2}arcsinx + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

Интегрирование по частям

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Стандартный случай 1

- $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx$
- $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx$
- $\int P_n(x)e^{ax}dx$
- $\int P_n(x)R(cosx, sinx)dx$
- $\boldsymbol{U(x) = P_n(x)}$
- $\int (3x+2)cos2xdx =$
- $\left\langle \begin{matrix} u = 3x+2, \ du = 2dx \\ dv = cos2x, v = \int cos2xdx \end{matrix} \right\rangle =$
- $= \frac{1}{2}(3x+2)sin2x + \frac{3}{4}cos2x + C$

Стандартный случай 2

- $\int lnxdx \left\langle \begin{matrix} u = lnx, dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}, \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right\rangle$

$= xlnx - \int dx = xlnx - x$

$\int arcsinxdx =$

$\left\langle \begin{matrix} u = arcsinx, dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ v = x \end{matrix} \right\rangle =$

$= xarcsinx + \sqrt{1-x^2}$

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

- **Одна из степеней нечетная положительная:**
- $\int (sinx)^n (cosx)^{2k+1} dx = \int (sinx)^n (cosx)^{2k} cosxdx =$
- $\langle t = sinx, \ dt = cosxdx, \quad cos^2x = 1 - sin^2x \rangle =$
- $= \int t^n (1 - t^2)^k dt$ и т.д.
- **Степени только четные положительные:** понижаем степень по формулам двойного угла
- $\int \boldsymbol{cos^2xdx = \int \frac{1+cos2x}{2} dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} sin2x + C}$
- $\int \boldsymbol{sin^2xdx = \int \frac{1-cos2x}{2} dx = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} sin2t + C}$
- **Сумма степеней четная отрицательная:** замена $t = tgx, \quad t = ctgx$
- **Сумма степеней нечетная отрицательная** – специальные приемы

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$$

- 1. Если дробь **неправильная** $m \geq n$, то в подынтегральной функции выделяем целую часть и остаток – правильную дробь $(m < n)$
- 2. **Правильную** дробь представляют в виде суммы простейших дробей $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ при условии $b^2 - 4ac < 0$,
- $\frac{Ax+B}{x^2+a^2}$
- 3. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left\langle \begin{matrix} ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ t = x + \frac{b}{2a},\ dt = dx,\ x = t - \frac{b}{2a} \end{matrix} \right\rangle =$
- $\int \frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{at^2-\frac{b^2}{4a}+c}dt \rightarrow$ разбиваем на сумму двух интегралов