Производные высших порядков. Формула Тейлора

Лекция 6.

Определение производных высших порядков

- Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$.
- Производную $f^{/}(x)$ называют *производной первого порядка или первой производной*
- Если *первая производная* дифференцируема на $(a,\ b)$, то ее производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* $\left(f^{/}(x)\right)^{/}$:
  - Обозначают: $f^{//}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
- *Пример: 1)* $f(x) = 2^{3x}$, $f^{/}(x) = 2^{3x} 3ln2$,
- $f^{//}(x) = 2^{3x} 3^2 ln^2 2$
- *Аналогично определяется третья производная*
- $\left(f^{//}(x)\right)^{/} = f^{///}(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$
- *Пример (продолжение) :* $f^{///}(x) = 2^{3x} 3^3 ln^3 2$

Определение производных высших порядков

- $\left(f^{(n-1)}(x)\right)^{/} = f^{(n)}(x) \;=\; \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ - производная порядка n

Теорема Тейлора

- Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $x_o \in (a, b)$производные до n – порядка включительно. Тогда в ближайшей окрестности точки x_o функция может быть приближенно представлена **многочленом Тейлора:**

- $$\boldsymbol{f(x) = f(x_o) + f^{/}\ (x_o)\ (x - x_0) + \frac{f^{//}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \frac{f^{(3)}(x_o)}{3!}(x - x_o)^3 + \dots\ + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + o\big((x - x_o)^n\big)}$$

- **Анализ:**

1. Каждый последующий член является бесконечно малым по сравнению с предыдущим, т.е. убывает с большей скоростью

   при $x \to x_o$: $\boldsymbol{(x - x_o)^{k+1} = o\left((x - x_o)^k\right)}$

2. Остаточный член многочлена Тейлора $\boldsymbol{o\big((x - x_o)^n\big)}$, т.е. приближение по формуле тем точнее, чем больше n

Формула Маклорена (формула Тейлора при $x_o = 0$)

$$f(x) = f(0) + f^{/}(0)x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \ \dots \quad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+ \ o \ (x^n)$$

Примеры:

$$e^x \ = \ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \ + \frac{1}{4!}x^4 \ \dots\dots\dots \frac{1}{n!}x^n \ + \ o \ (x^n)$$

$$sinx = x - \frac{1}{3!}x^3 \ + \ \frac{1}{5!}x^5 \ - \ \frac{1}{7!}x^7 \dots\dots\dots \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o \ \left(x^{2n+1}\right)$$

$$cosx = 1 - \frac{1}{2!}x^2 \ + \ \frac{1}{4!}x^4 \ - \ \frac{1}{6!}x^6 \dots\dots\dots \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}x^{2n} \ + \ o \ \left(x^{2n}\right)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \ + \ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 \ \dots\dots\dots + o \ (x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} \ = \ 1 + x + x^2 + x^3 + \ x^4 \ \dots\dots\dots x^n \ + \ o \ (x^n)$$

Примеры разложения функции по формуле Маклорена. Степенной порядок малости.

- Если в окрестности точки $x_0 = 0$ разложение по формуле Маклорена имеет вид
- $\boldsymbol{f(x) = \;\; ax^n + o(x^n)}$**, то $\boldsymbol{n}$ – степенной порядок малости** – характеризует скорость убывания функции (чем больше порядок малости, тем быстрее убывает функция)
- $sinx = x + o(x), \quad n = 1$
- $sinx - x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots\ldots - x = -\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \;\; n = 3$
- $e^{sinx} - \;1 = \left\langle t = sinx = x - \frac{x^3}{3!} \ldots . \right\rangle = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \ldots =$
- $= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 \ldots - 1 \;\; =$
- $= \; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \ldots\ldots + \;\; \frac{x^3}{3!} \ldots\ldots = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \ldots = \; x + o(x), \quad\quad n = 1$

Примеры разложения функции в ряд Тейлора.

- Если $x_o \neq 0$, то для применения таблицы разложения по формуле Маклорена вводим новую переменную $t = x - x_o$:
- **Пример:** $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, $x_o = -1, \quad t = x + 1$
- $f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3t}{2\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}} = \frac{3t}{2}\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$
- $=\left\langle (1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 \ldots, \quad z = -\frac{t^2}{4}, \ m = -\frac{1}{2} \right\rangle =$
- $= \frac{3}{2}\,\mathrm{t}\left(1 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{t^4}{16} \ldots\right) = \frac{3}{2}t + o(t) = \frac{3}{2}(x + 1) + o(x + 1)$

$n = 1$ - порядок малости

Порядок роста бесконечно большой в окрестности точки разрыва.

- Если в окрестности точки x_o функция может быть представлена в виде $f(x) \sim \frac{C}{(x-x_o)^n}$, то ***n* *- степенной порядок роста*** (чем больше порядок роста, тем больше скорость роста функции).
- **Примеры приближенных формул вблизи точек разрыва**:
- $1)\ f(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}, \qquad x_o = 1, \qquad n = 2$
- $2)\ f(x) = \frac{1}{sinx-x} \sim \frac{1}{x-\frac{x^3}{3!}\ldots\ldots-x} \sim -\frac{3!}{x^3}\ , x_o = 0, \qquad n = 3$
- $3)\ f(x) = \frac{1}{1+cos3x}$

$$\left\langle x_o = \frac{\pi}{3}\ ,\ t = x - \frac{\pi}{3}, \quad cos3x = \cos(3t+\pi) = -cos3t \right\rangle$$

$$= \frac{1}{1-cos3t} \sim \frac{1}{1-1+\frac{(3t)^2}{2!}} \sim \frac{2}{9t^2}\ , \qquad n = 2$$

Разложение по формуле Маклорена в окрестности бесконечно удаленной точки. Асимптоты графика функции на бесконечности

- Если при $x \to \infty$ функцию можно представить в виде:
- $f(x) = ax^n + O\left(\frac{1}{x}\right)$, то $\boldsymbol{n}$ ***- степенной порядок роста***
- Если при $x \to \infty$ функцию можно представить в виде
- $f(x) = g(x) + O\left(\frac{1}{x}\right)$, то $g(x)$- асимптота графика функции, т.е.
- $f(x) \sim g(x)$ - приближенная асимптотическая формула
- **Пример 1.** $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x} = x - |x|\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} =$
- $= \left\langle t = -\frac{2}{x}, \quad (1+t)^{\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 \ldots \right\rangle \sim x - |x|\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)$
- $\sim 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to \infty$ и $\sim 2x - 1 - O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to -\infty$