Числовой ряд.
Сумма ряда.
Признаки сходимости

Лекция 7

Числовой ряд.

- Числовым рядом называют **бесконечную сумму** членов числовой последовательности $\{a_n\}$:
- $a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- a_n - общий член ряда (определяет член ряда по его номеру)
- *Пример* 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots\ldots$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ldots\ldots\ldots$
- $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- Возникают вопросы:

✓ Что понимать под суммой бесконечного числа слагаемых ?

✓ Можно ли изменять порядок членов ряда ?

Сумма ряда

- Пусть $\boldsymbol{a_n \geq 0}$
- Сумму первых n членов ряда называют **$\boldsymbol{n}$ –й частичной суммой ряда и обозначают $\boldsymbol{S_n}$:**
- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- ……………………………………
- $\boldsymbol{S_n = = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}$
- Частичные суммы образуют монотонно возрастающую последовательность : $S_1 < S_2 < S_3 \ldots\ldots. S_{n-1} < S_n$.
- **Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$, то его называют *суммой ряда S*, а ряд называют *сходящимся.***
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называют расходящимся.

Ряд из членов геометрической прогрессии

- $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots . + \ aq^{n-1} + \ldots \quad ; \quad q$ – знаменатель
- Сумма первых n членов геометрической прогрессии:
- $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$. Находим сумму ряда согласно определению:
- $\mathbf{S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}}$ **при условии** $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$
- **Пример 1.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots . \left\langle a = 1, q = \frac{1}{3} \right\rangle = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$
- **Пример 2.** Над сходящимися рядами можно выполнять арифметические операции – умножение на число и сложение:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 3\frac{1}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots . \right)$
- $+3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ \ldots . \right) = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + 3\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

Необходимый признак сходимости

- **Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$**
- Док-во: из сходимости ряда следует, что
- $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 \dots \dots . a_{n-1} + a_n) = S$
- $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 \dots \dots . a_{n-1}) = S$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$
- ***Если необходимый признак не выполняется ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует или существует, но отличен от нуля) , то ряд расходится.***
- **Пример 1.** Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+4}$; $a_n = \frac{n^2-1}{3n^2+4}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+4} = \frac{1}{3} \neq 0$
- Ряд расходится
- **Пример 2. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится . Доказательство при помощи интегрального признака !!!**

Критерий сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$

- **Ряд с неотрицательными членами сходится тогда только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, т.е. существует число $M > 0$, такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство**
  - $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + \ldots . + a_n \leq M}$
- Док-во. <u>Необходимость:</u> из сходимости ряда следует существование предела
- $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и ограниченность последовательности $S_n < S$.
- <u>Достаточность.</u> Последовательность частичных сумм является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. По признаку существования предела справедливо: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится.
- На основе этого критерия доказываются **достаточные признаки сходимости:** *признак сравнения, интегральный признак Коши, а также признак Даламбера и радикальный признак Коши, которые доказываются на основе признака сравнения.*

Признак сравнения

- **Если существует номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$, то**

✓ ***из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;***

✓ ***из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$***

Примеры исследования рядов на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ сравниваем со сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$: $\frac{1}{n3^n} < \frac{1}{3^n}$. Оба ряда сходятся.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{5^n}$. Сделав оценку $(\sin n)^2 \leq 1$, сравниваем с геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$: $\frac{(\sin n)^2}{5^n} \leq \frac{1}{5^n}$.

Оба ряда сходятся.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$. Сделав оценку $\frac{\ln(1+n)}{n} > \frac{1}{n}$, делаем вывод о расходимости обоих рядов.

Признак Даламбера. Признак Коши.

- Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ существует предел

➢ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (признак Даламбера)

➢ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (радикальный признак Коши)

Тогда при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ расходится.

При $l = 1$ эти признаки не работают *(примените такие признаки как необходимый, сравнения, интегральный, асимптотические оценки)*

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$.По признаку Даламбера $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)2^n 2n^n}{(n+1)(n+1)^n n!2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$

$\frac{2}{e} < 1$. Ряд сходится. ***Пример 2.*** $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ *расходится по признаку Коши* : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$

Интегральный признак сходимости ряда

- **Если функция $f(x) \geq 0$ и убывает на $[a, \infty)$, где $a \geq 1$,**
- **то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.**
- ***Пример 1.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ и интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **сходятся при $\alpha > 1$**
- **Расходятся при $\alpha \leq 1$.**
- ***Пример 2.*** Иногда удается получить при помощи формулы Тейлора асимптотическую формулу вида $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ $, n \to \infty, c > 0.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} arctg \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Используя оценку $arctg \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}, n \to \infty,$
- получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, который расходится $(\alpha = 1)$.
- ***Пример 3.*** Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ *и* $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$ сходятся.