Функциональный степенной ряд. Область сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

Лекция 8

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n+1} a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
- $|(-1)^{n+1} a_n| = |a_n| = a_n \geq 0$
- Если члены ряда *монотонно убывают по абсолютной величине*
- $a_1 > a_2 > a_3 \ldots . a_{n-1} > a_n \ldots .$, *а общий член ряда стремится к нулю* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Остаток суммы ряда при этом не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член ряда $|R_N| = |S - S_n| < |a_{N+1}|$.
- Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, но выполняется признак Лейбница, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится условно.
- **Примеры:** 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ сходится абсолютно (ряд из модулей – сходящаяся геометрическая прогрессия)
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, но признак Лейбница выполняется

Функциональный ряд. Область сходимости

- Пусть члены функциональной последовательности $\{u_n(x)\}$ определены в области D. Функциональным рядом называют ряд
- $u_1(x) + u_2\ (x) + \ldots. + u_n(x)\ \ldots = \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
- Функциональный ряд сходится в точке $x_0 \in D$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, и сходится в области G, если сходится в каждой точке этой области.
- *Частичная сумма ряда* $S_n\ (x) = u_1(x) + u_2\ (x) + \ldots. + u_n(x)$
- *и сумма ряда* $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.
- **Область сходимости – множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится.**
- **Примеры:** 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \ldots = \frac{1}{1-x}$ сходится при условии $|x| < 1$ (условие сходимости геометрической прогрессии) и расходится на границах $x = 1$,
- $x = -1$.

Равномерная сходимость функционального ряда

- Сходящийся функциональный ряд называют <u>сходящимся равномерно</u> в области G, если остаток суммы ряда
- $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ стремится к нулю сразу для всех $x \in G$: $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$
- **Пример:** $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} = S(x)$; $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$;
- $|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \to 0$ для $x \in (-q, q)$, где $|q| < 1$.

Признак равномерной сходимости: Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно указать сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такой, что для всех $x \in G$ и $n \geq N$: $|u_n(x)| \leq a_n$, то функциональный ряд сходится равномерно и абсолютно в G.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg(nx)}{3^n}$; $\left|\frac{arctg(nx)}{3^n}\right| < \frac{\frac{\pi}{2}}{3^n}$; область равномерной сходимости: $x \in (-\infty, \infty)$.

Сумма равномерно сходящегося ряда – непрерывная функция, а над рядами можно выполнять арифметические операции, дифференцирование, интегрирование

Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости

- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_1(x-x_0)^2 + \ldots\ldots$
- Общий член ряда $u_n(x) = c_n(x-x_0)^n$
- c_n - числовой коэффициент степенного ряда.
- Для каждого степенного ряда существует **радиус сходимости - число $R \geq 0$ или $R = \infty$** такое, что ряд абсолютно и равномерно сходится внутри интервала $x \in (x_0 - R, \;\; x_0 + R)$, называемого интервалом сходимости.
- **Пример.** Для исследования можно применить любой признак, доказанный ранее для рядов с неотрицательными членами, например, признак Даламбера:
- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = \frac{|x-x_0|}{R} < 1$ –требуем выполнения условий сходимости, где $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Решая неравенство $|x-x_0| < R$, находим область сходимости.
- На границах $x = x_0 \pm R$ каждый раз требуется дополнительное исследование.

Действия со степенными рядами

- 1. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_1$ равен R_a,
- Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_2$ равен R_b
- Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S_1 + \beta S_2$ и ряда
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_1 \cdot S_2$ равен $\min(R_a, R_b)$
- 2. При дифференцировании и интегрировании рядов область сходимости не меняется (доказать самостоятельно)
- $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)^I = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n x^{n-1} = S^I(x)$
- $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(x) dx$

Пример 1: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)^I = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^I = \frac{1}{(1-x)^2}$, $R = 1$

Пример 2. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots.. = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$

$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \int_0^x x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$

$\boldsymbol{R = 1}$

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

- Если функция определена в окрестности некоторой точки x_o и имеет в этой точке производные всех порядков, то она представляется степенным рядом – **рядом Тейлора:**
- $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$
- При $x_0 = 0$ ряд называют **рядом Маклорена** :
- $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$
- Для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд Тейлора сходится абсолютно и равномерно и имеет своей суммой непрерывную функцию.
- **Остаток суммы ряда** может быть представлен в форме Лагранжа:
- $$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad x^* \in (x_0, x)$$

Разложение функций в ряд Маклорена

- $\boldsymbol{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}} \quad \dots\dots\dots \qquad \boldsymbol{R = \infty}$**,** поскольку
- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{n!(n+1)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$ для любых x.
- Пример: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = e^3$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\dots = e$
- Точность вычисления $R_n = \frac{e^{0,5}}{5!} \approx 0{,}014$ для числа е.
- Ряды для функций $\boldsymbol{\sin x, \cos x, chx, shx}$ имеют $\boldsymbol{R = \infty}$
- **Для *следующих* рядов радиус сходимости $\boldsymbol{R = 1}$:**
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ \dots \ = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ \dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Приемы разложения функций в ряд Маклорена

- **Пример1.** $\ln(12 - x - x^2) = \ln\big(-(x-3)(x+4)\big) =$
- $\ln\big((3-x)(x+4)\big) = \ln 3\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 4\left(1 + \frac{x}{4}\right) =$

$\ln 3 + \ln 4 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{4}\right) = \ln 12 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n} +$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n4^n}\right) = \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^n} - \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$

Радиус сходимости $R = min(3,4) = 3$, интервал сходимости $(-3,3)$

Пример 2. $\frac{x}{x^2-4x+3} = \frac{3/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} =$

$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{2}.$

Радиус сходимости $R = min(1,3) = 1$, интервал сходимости $(-1,1)$