Преобразования Лапласа. Свойства. Восстановление функции по изображению

Лекция 10

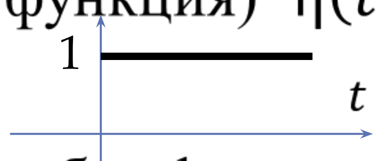
Оригинал и изображение по Лапласу

Функцией –оригиналом $f(t)$ называют комплексную функцию действительного аргумента, которая обладает свойствами:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$; 2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале; 3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции: существуют такие числа $M > 0$; $\sigma_0 > 0$, что для всех t справедливо $|f(t)| < Mexp(\sigma_0 t)$.

Простейшая функция- оригинал – единичная функция Хевисайда (ступенчатая функция) $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$

и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$:



При умножении на $\eta(t)$ любая функция, удовлетворяющая условиям 2 и 3, будет удовлетворять первому условию. Например, $sint \cdot \eta(t) = sint$ для $t \geq 0$ и $sint \cdot \eta(t) = 0$ для $t < 0$.

Производная $\frac{d\eta}{dt} = \delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и равна нулю при $t \neq 0$

(**импульсная функция Дирака**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$

Оригинал и изображение по Лапласу

Преобразованием Лапласа для функции-оригинала $f(t)$ называют несобственный интеграл $\mathbf{F(p)} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = L\{f(t)\}$.

Соответствие между функцией – оригиналом и ее изображением обозначают: $f(t) \Longleftrightarrow F(p)$

Здесь $p = \sigma + i\omega$ –комплексная переменная. **Теорема**: для всякого оригинала изображение по Лапласу $\mathbf{F(p)}$определено при условии $Rep = \sigma > \sigma_0$ и является в этой области аналитической функцией: $|F(p)| \to 0$ при $p \to \infty$ равномерно относительно аргумента и имеет конечную производную.

Примеры: 1) $L\{\eta(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{p}$;

2) $L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt = -\frac{1}{p-a}(e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{p-a}$

3) $L\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}(\text{при } t = 0) = 1$

Свойства преобразований Лапласа

1. Линейность следует из свойств интеграла:

$f(t) \Leftrightarrow F(p);\ g(t) \Leftrightarrow G(p) \Rightarrow \alpha f(t) + \beta g(t) \Leftrightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$

Примеры: 1) $\boldsymbol{1 + e^{-5t} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p+5}}$;

2) $\boldsymbol{cos\omega t = \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+i\omega} = \frac{p+i\omega+p-i\omega}{2(p^2+\omega^2)} = \frac{p}{p^2+\omega^2}}$

2. Подобие: $\boldsymbol{f(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}$

3. Дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на $\boldsymbol{p}$

с учетом начальных условий: $L\{f^I(t)\} = \int_0^\infty f^I(t)e^{-pt}dt =$
$\langle u = e^{-pt};\quad du = -pe^{-pt}dt;\quad dv = f^I(t)dt;\quad v = f(t)\rangle =$
$pF(p) - f(0)$.

$$f^I(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0)$$

$$f^{II}(t) \Leftrightarrow pF(p) - pf(0) - f^I(0)$$

Свойства преобразований Лапласа

4.**Дифференцирование изображения** сводится к умножению оригинала на $(-t)$: $F^I(p) = -\int_0^\infty (tf(t))e^{-pt}dt \Leftrightarrow -tf(t)$

$$\boldsymbol{tf(t) \Leftrightarrow -F^I(p)}$$

Пример. Доказали ранее $e^{at} \Leftrightarrow \frac{1}{p-a}$. Тогда $te^{at} \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{p-a}\right)^I = \frac{1}{(p-a)^2}$.

5. **Интегрирование** оригинала **сводится к делению изображения на p :** $\boldsymbol{\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}}$

6. Интегрирование изображения: $\boldsymbol{\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_p^\infty F(p)dp}$

Пример. $\boldsymbol{L\left\{\int_0^t \frac{1-cost}{t}\right\}dt = \frac{1}{p}\int_p^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = \frac{1}{p}ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}}$.

Свойства преобразований Лапласа

7. **Смещение изображения**. Умножение оригинала на экспоненту равносильно смещению изображения : $e^{\lambda t} f(t) \Longleftrightarrow F(p-\lambda)$

Пример. $e^{\lambda t} \cos\omega t \Longleftrightarrow \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

8. Запаздывание оригинала. Запаздывание оригинала на $\tau > 0$ равносильно умножению изображения на экспоненту:

$f(t-\tau)\eta(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$

Пример. $\cos(t-3)\eta(t-3) \Longleftrightarrow \frac{pe^{-3p}}{p^2+1}$

9. Умножение изображений (изображение свертки)**:**

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \Longleftrightarrow F(p)G(p) .$$

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau)dt \langle t-\tau = z\rangle = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \cdot \int_0^\infty g(z)e^{-pz}dz$$

Пример: $\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cos\tau d\tau \Longleftrightarrow \frac{1}{p+2}\cdot\frac{p}{p^2+1}$

Восстановление функции –оригинала по изображению (обратное преобразование Лапласа)

Пусть функция-оригинал $f(t)$ непрерывна и имеет в этой точке непрерывные конечные производные: $f(t) \Longleftrightarrow F(p)$. Тогда

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp}$$

Этот интеграл можно непосредственно вычислить, используя вычеты:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp} = \sum_{n=1}^{N} res\{F(p_n)e^{p_n t}\}.$$

Непосредственно из этой формулы следуют **теоремы разложения ,**

которые затем используют на практике для восстановления оригинала.

Кроме того, оригинал может быть восстановлен по таблице изображений непосредственно или после тождественных преобразований. **Примеры:**

$$\frac{p}{(p-2)(p+5)} = \frac{2/7}{p-2} + \frac{5/7}{p+5} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{7}e^{2t} + \frac{5}{7}e^{-5t};$$

$$\frac{p+3}{p^2+2p+2} = \frac{p+3}{(p+1)^2+1} = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{2}{(p+1)^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-t}cost + 2e^{-t}sint$$

Теоремы разложения

Первая теорема разложения. Пусть изображение Лапласа $\boldsymbol{F(p)}$ является **аналитической функцией в окрестности $\boldsymbol{p = \infty}$:**

$\boldsymbol{F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}}$. Тогда оригиналом является функция

$$\boldsymbol{f(t)\eta(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}\right)\eta(t).}$$

Пример. $\boldsymbol{F(p) = e^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{2!p^2} + \frac{1}{3!p^3} \ldots \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} \ldots}$

Вторая теорема разложения. Если изображение Лапласа является **правильной** дробно-рациональной функцией $F(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$; $n < m$,

то **оригиналом является функция**

$$\boldsymbol{f(t)\eta(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} res\left\{\frac{P_n(p_k)}{Q_m(p_k)} e^{p_k t}\right\}\right)\eta(t)}$$

Вычеты берутся по всем особым точкам $P_k \neq \infty$.

Примеры восстановления оригинала по изображению

Пример 1. $F(p)=\frac{p}{(p-2)(p+5)} \Longleftrightarrow \left\langle \begin{matrix}\text{Особые точки простые полюсы} \\ p=2; \quad p=-5\end{matrix}\right\rangle$

$$=\lim_{p\to 2}\left((p-2)\frac{pe^{pt}}{(p-2)(p+5)}\right)+\lim_{p\to -5}\left((p+5)\frac{pe^{pt}}{(p-2)(p+5)}\right)=$$

$$=\frac{2}{7}e^{2t}+\frac{5}{7}e^{-5t}$$

Пример 2. $F(p)=\frac{p-5}{p+2}=\frac{(p+2)-7}{p+2}=1-\frac{7}{p+2} \Longleftrightarrow \delta(t)-7e^{-2t}$

Пример 3.

$F(p)=\frac{p+2}{p^2(p^2+4p+5)} \quad \left\langle \begin{matrix}\text{Особые точки} - \text{полюсы} \quad p=0 \quad m=2 \\ p=-2\pm i \quad m=1\end{matrix}\right\rangle \Longleftrightarrow$

$$\lim_{p\to 0}\left(p^2\frac{(p+2)e^{pt}}{p^2(p^2+4p+5)}\right)^{I}+2Re\lim_{p\to -2+i}\left(\frac{(p-(-2+i))(p+2)e^{pt}}{p^2(p-(-2+i))(p-(-2-i))}\right)$$

$$=\lim_{p\to 0}\left(\frac{(e^{pt}+(p+2)te^{pt})(p^2+4p+5)-(2p+4)(p+2)e^{pt}}{(p^2+4p+5)^2}\right)+Re\left(\frac{(3+4i)e^{it}e^{-2t}}{25}\right)=$$

$$\frac{10t-3}{25}+e^{-2t}\left(\frac{3cost}{25}-\frac{4sint}{25}\right)$$