# Ряды Фурье. Преобразования Фурье

Лекция 12

# Гармонические колебания (гармоники)

$$x_k(t) = A_k cos\left(\frac{k\pi}{l} \cdot t + \varphi_k\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$ – номер гармоники

$A_k > 0$ – амплитуда $k$- й гармоники

$\varphi_k$ – начальная фаза $k$- й гармоники

$\frac{2l}{k}$ –минимальный период гармоники

$T = 2l$ – общий период гармоник

$\omega_k = \frac{k\pi}{l}$ –циклическая частота $k$- й гармоники

Сложное периодическое движение можно представить как сумму гармонических колебаний разной частоты и амплитуды:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\frac{k\pi}{l}t + b_k sin\frac{k\pi}{l}t\right)$$

# Основная система тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), sin\left(\frac{\pi}{l}x\right), cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \dots cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)..$$

**на интервале $(-l, l)$ является ортогональной:**

**Случай $k \neq n$.**

$$\int_{-l}^{l} cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(cos\left(\frac{(n-k)\pi}{l}x\right) + cos\left(\frac{(n+k)\pi}{l}x\right)\right) dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(cos\left(\frac{(n-k)\pi}{l}x\right) - cos\left(\frac{(n+k)\pi}{l}x\right)\right) dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$$

**Случай $k = n$:** $\int_{-l}^{l} dx = 2l;$ $\int_{-l}^{l} cos^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = l;$

$$\int_{-l}^{l} sin^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = l$$

# Тригонометрический ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ имеет свойства:

*1.* $f(x)$ и $f^{I}(x)$ определены на интервале $(-\infty, +\infty)$

2. Функция является **периодической с периодом $T = 2l$**

3. На симметричном отрезке $[-l, l]$ функция является непрерывной или кусочно гладкой (*сама функция и ее производная имеют на этом отрезке конечное число точек разрыва 1 рода)*

***Тогда функция может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье:*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\frac{k\pi x}{l} + b_k sin\frac{k\pi x}{l}\right)}$,

коэффициенты которого называют **коэффициентами Фурье**

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;} \qquad \boldsymbol{a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx;}$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx;} \qquad \boldsymbol{k = 1, 2, 3 \ldots .}$$

# Ряд Фурье для четных и нечетных функций

**Для четной функции** $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ коэффициент $b_k = 0$ как интеграл от нечетной функции на симметричном интервале:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx; \quad k = 1,2,3\ldots$$

**Для нечетной функции** $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ коэффициенты $a_0 = 0$, $a_k = 0$ как интегралы от нечетных функций на симметричном интервале:

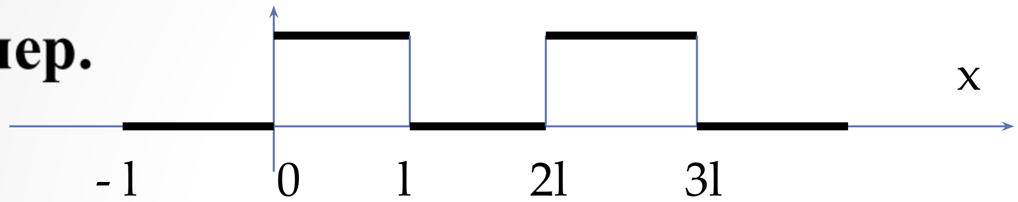
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx; \quad k = 1,2,3\ldots.$$

# Достаточные условия сходимости ряда Фурье

Ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[-l, l]$ функции сходится в **каждой точке непрерывности** к самой функции: сумма ряда $\boldsymbol{S(x) = f(x)}$, а в точках разрыва $S(x) = \frac{1}{2}\{f(x-0) + f(x+0)\}$.

**Пример.**




$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = 0, x \in [-l, 0]} \\ \boldsymbol{f(x) = 1, x \in (0, l]} \end{cases}$$

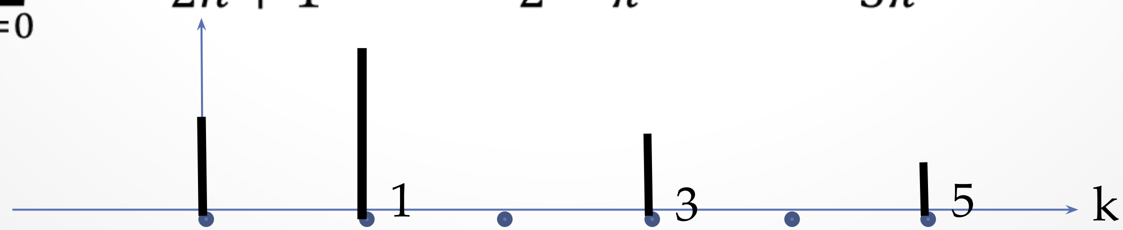
Периодическая кусочно гладкая функция общего вида задана на симметричном интервале и представляется рядом Фурье общего вида:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_0^l dx = 1; \quad a_k = \frac{1}{l}\int_0^l cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^l sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx = \frac{1}{l}\left(-\frac{l}{k\pi}\right)(cos(k\pi) - 1).$$

С учетом того, что $cosk = (-1)^k$, $b_k = 0$, $k = 2n$ и $b_k = \frac{2}{k\pi}, k = 2n+1,$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x\right)}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}sin\omega x + \frac{2}{3\pi}sin3\omega x + \frac{2}{5\pi}sin5\omega x \ldots.$$



# Ряд Фурье в комплексной форме

Выражаем в формуле ряда Фурье функции $cos\frac{k\pi x}{l}$ и $sin\frac{k\pi x}{l}$ через экспоненты с мнимым показателем, получаем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ik\pi x/l}+e^{-ik\pi x/l}}{2} + b_k\frac{e^{ik\pi x/l}-e^{-ik\pi x/l}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\pi x/l} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ik\pi x/l}\right) = \sum_{\boldsymbol{k=-\infty}}^{\infty}\boldsymbol{c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}}},$$ где

$$\mathrm{c}_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\,dx.$$

$$|c_k| = |c_{-k}| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2{}_k + b_k{}^2}$$

**Спектральная плотность** $S(\omega_k) = \frac{c_k}{\Delta\omega_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ik\pi x/l}dx$

**Амплитудный спектр** $|S(\omega_k)|$; **фазовый спектр** $\Phi(\omega_k) = -argS(\omega_k)$

# Преобразования Фурье. Интеграл Фурье.

Свойства функции $f(x)$:

1. $f(x)$ и $f^{I}(x)$ определены на интервале $(-\infty, +\infty)$
2. Функция является непрерывной или кусочно гладкой
3. **Функция не является периодической**
4. Функция абсолютно интегрируема: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ (сходится)

Представляя функцию на любом конечном интервале $(-l, l)$ рядом Фурье ( в комплексной форме) и переходя к пределу при условии: $l \to \infty$; $\Delta\omega_k = \frac{\pi}{l} \to 0$; $\Delta\omega_k \to d\omega$, получаем выражение функции через несобственный интеграл – **интеграл Фурье:**

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega x} d\omega.}$$

$\boldsymbol{S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}$ –прямое преобразование Фурье (спектральная плотность)

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ –обратное преобразование Фурье

# Косинус-и синус-преобразования Фурье

Спектральная плотность $\boldsymbol{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx} =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos\omega x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin\omega x dx\right) = \boldsymbol{U(\omega) + iV(\omega)}$,

где $U(\omega) = ReS(\omega)$; $\quad V(\omega) = -ImS(\omega)$.

Для **четной функции** мнимая часть $V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin\omega x dx$ =0

(как интеграл от нечетной функции на симметричном интервале). Поэтому спектральная плотность $S(\omega) = ReS(\omega) = \boldsymbol{U(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)cos\omega x dx}$

- косинус-преобразование Фурье.

Для **нечетной функции** $S(\omega) = -ImS(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{f(x)sin\omega x dx}$

- синус-преобразование Фурье