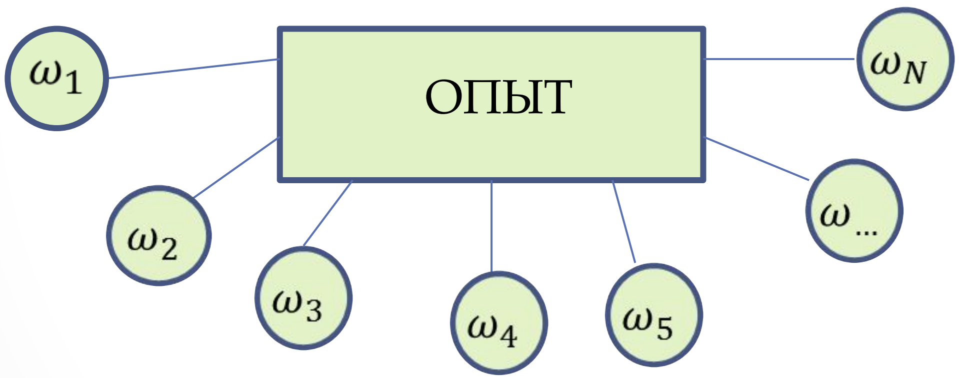
Основные понятия теории вероятностей. Алгебра событий.

Лекция 13

Случайные события

Теория вероятностей – часть математики, изучающая **закономерности в случайных** явлениях (надежность технических устройств, случайные сигналы в передающих системах, случайные погрешности при измерениях, контроль качества продукции и т.п.).

Основные понятия – **опыт** (эксперимент, испытание) и **случайное событие** как результат (исход) опыта:



Пространство элементарных событий Ω – множество всех неразложимых (элементарных) исходов опыта : $\boldsymbol{\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots . \omega_N}$.

Ω – достоверное событие (всегда происходит при данных условиях)

$\varnothing$ - невозможное событие (никогда не происходит при данных условиях)

Вероятность случайного события. Классическое определение. Геометрическая вероятность

Вероятность – число, которое характеризует степень объективной возможности наступления случайного события. При этом количественное измерение вероятности возможно только для событий, которые появляются в результате опытов, допускающих многократное повторение (хотя бы теоретически) или опыт проводится одновременно с многими объектами.

Если опыт приводит к **конечному** числу $\boldsymbol{N}$ **равновозможных** исходов, а событие A при этом происходит в $\boldsymbol{n}$ случаях, то **вероятность события** $\boldsymbol{P(A) = \frac{n}{N}}$.

В случае, когда пространство элементарных событий включает **бесконечное число** элементарных исходов (непрерывное пространство элементарных исходов), вероятность определяют по формуле $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{Мера } \boldsymbol{\omega}}{\text{Мера } \boldsymbol{\Omega}} \left[\frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}\right]; \left[\frac{\text{Площадь } s}{\text{Площадь } S}\right]; \left[\frac{\text{объем } v}{\text{объем } V}\right].$

$$0 \le P(A) \le 1$$

Основные формулы комбинаторики

- $\boldsymbol{n}$ – число элементов множества

1. Число **упорядоченных** k-элементных подмножеств - **размещения из *n элементов по k элементов:***

$$A_n^k = n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Размещения из ***n*** элементов по ***n*** элементов называют **перестановками:** $P_n = n!$

3. Число **неупорядоченных** k-элементных подмножеств (отличаются только составом или схема выбора без возвращения и без упорядочения) – **сочетания из *n элементов по k элементов:***

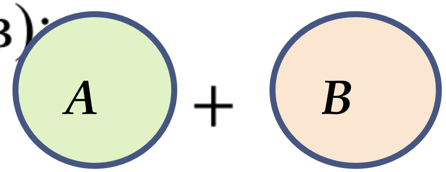
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Алгебра событий

Сумма (объединение) событий $\boldsymbol{A+B=A\cup B}$ – это событие, которое состоит в том, что **происходит хотя бы одно из событий**: **или** событие *A*, **или** *B*, **или** оба события вместе (*логическое «или»)*

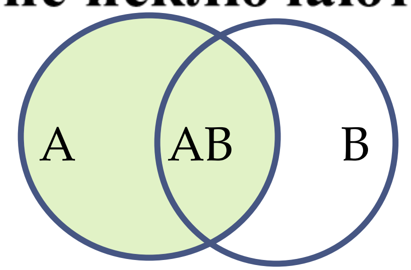
Произведение (пересечение) событий $\boldsymbol{AB=A\cap B}$ - это событие, состоящее в совместном осуществлении *A* **и** *B (логическое «и»)*

Несовместные события исключают друг друга (не имеют общих элементарных исходов):



$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Совместные события не исключают друг друга (имеют общие элементарные исходы)



$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Аксиоматическое определение вероятности события

Вероятность случайного события $\boldsymbol{P(A)}$ – числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий $\mathbf{\Omega}$ для всех $\boldsymbol{A \in \Omega}$ и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам):

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$ (*вероятность достоверного события равна 1*) и $P(\cancel{0}) = 0$ (*вероятность невозможного события равна 0);*
3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей

$$P\big(A_1 + A_2 \ldots . A_i + A_j \ldots \ldots A_n \ldots .\big) = P(A_1) + P(A_2) \ldots P(A_n) \ldots$$

$$A_i A_j = \cancel{0}$$

Противоположные события : $\boldsymbol{A + \overline{A} = \Omega}$

$$\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Примеры: орел и решка; попадание и промах; работа и отказ

Условная вероятностью. Независимые и зависимые события.

События A и B наблюдаются в одном эксперименте. **Условной вероятностью** события B *при условии, что событие* A *произошло*, называют величину $P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Если осуществление события A ***влияет на вероятность события*** B, то **события зависимы** и для вероятности произведения справедливо

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B).$$

События A и B называются **независимыми,** если появление одного из них не влияет на вероятность другого (условная вероятность равна безусловной). Для **независимых событий** вероятность произведения равна произведению вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Формула полной вероятности.

События $\boldsymbol{A_1}, \ \boldsymbol{A_2}, \ldots \boldsymbol{A_n}$ образуют **полную группу событий**, если выполняются условия $\boldsymbol{A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega}$

$$\boldsymbol{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$$

Пусть в эксперименте событие $\boldsymbol{B}$ может наблюдаться только вместе с одним из событий A_j***, образующих полную группу:***

$$\boldsymbol{B = A_1B + A_2B + \cdots + A_nB.}$$

Тогда вероятность сложного события $\boldsymbol{B}$ находят по формуле

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

События $\boldsymbol{A_1}, \ \boldsymbol{A_2}, \ldots \boldsymbol{A_n}$ называю *гипотезами*. Вероятности $\boldsymbol{P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)}$ называют *априорными (доопытными)* вероятностями гипотез.

Формула Байеса

Пусть эксперимент (опыт) произведен и событие ***B*** осуществилось.

Тогда ***послеопытные** (апостериорные) **вероятности гипотез*** определяются по формуле:

$$\boldsymbol{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{P(B)}} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\boldsymbol{P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)}}$$

Пример. *В первой урне 4 белых шара и 6 черных, а во второй урне 6 белых и 4 черных. Наугад выбираем урну и наугад выбираем шар. Какова вероятность того, что он белый ?*

Решение. Гипотезы – выбор урны: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$; условные вероятности $P_{A_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $P_{A_2}(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

Продолжение задачи. *Наугад выбрали урну и шар из нее. Шар оказался белым. Какова вероятность того, что до опыта шар находился в первой урне?*

По формуле Байеса $P_B(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$.