Дискретные случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики

Лекция 14

Случайные величины. Законы распределений.

Случайной называют величину $\boldsymbol{X}$, которая принимает свое значение в опыте со случайным исходом. **Случайная величина** – это действительная функция, определенная на множестве элементарных событий : $\boldsymbol{X = X(\omega)}$. Если случайная величина принимает только **целочисленные значения** $\boldsymbol{X = k = 0, 1, 2, 3 \ldots}$,

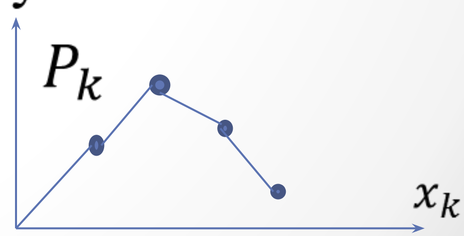
то случайную величину называют **дискретной (Д.С.В.).**

Закон распределения случайной величины – правило, которое ставит в соответствие значению случайной величины $X = x_k$ ее вероятность P_k : $x_k \Longleftrightarrow P_k$. Закон может быть задан таблицей, которую называют **рядом распределения,** графиком

(**многоугольником распределения)** или формулой.

			…	
			…	

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} P_k = 1;}$$



Биномиальное распределение (схема Бернулли)

Пусть опыт имеет **2 противоположных исхода** $\boldsymbol{A}, \ \overline{\boldsymbol{A}}$:

$P(A) = p$; $P(\overline{A})$ $=q$; $\boldsymbol{p + q = 1}$ (герб или решетка, попадание или промах, работа или отказ и т.д.). Опыт **повторяется $\boldsymbol{n}$ раз.** При этом вероятности p и q не зависят от номера испытания.

Пространство элементарных событий **$\boldsymbol{\Omega}$ содержит $\boldsymbol{2^n}$** исходов – последовательностей $\boldsymbol{AA\overline{A}AAA\overline{A}\ \overline{A} \ldots \overline{A}A}$ по n элементов.

Вероятность каждого исхода, когда событие $\boldsymbol{A}$ наблюдается **$\boldsymbol{k}$ раз,** а событие $\bar{A}$ наблюдается $(\boldsymbol{n-k})$ **раз :** $\boldsymbol{P(n,k,p) = p^k q^{n-k}}$**.**

С учетом числа вариантов вероятность того, что при $\boldsymbol{n}$ *испытаниях событие* $\boldsymbol{A}$ *наблюдается* $\boldsymbol{k}$ ***раз,*** *а событие* $\bar{A}$ *наблюдается* $(\boldsymbol{n-k})$ ***раз :*** $\boldsymbol{P(n,k,p) = C^k{}_n\, p^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}$

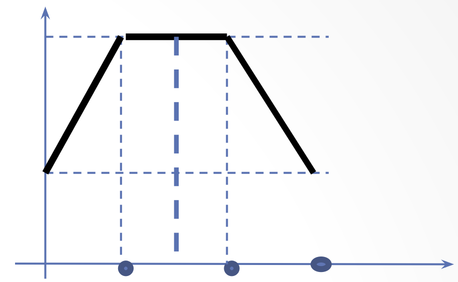
При этом выполняется $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} P(n,k,p) = 1}$

Дискретные случайные величины. Пример.

Пример 1. Трехкратное подбрасывание симметричной монеты. Случайная величина $X = 0, 1, 2, 3$ *–число выпавших гербов:*

$\boldsymbol{p = q = 1/2; n = 3}$

	0	1	2	3 3	Сумма
	1/8	3/8	3/8	1/8	1
	0	3/8	6/8	3/8	3/2
	0	3/8	12/8	9/8	3



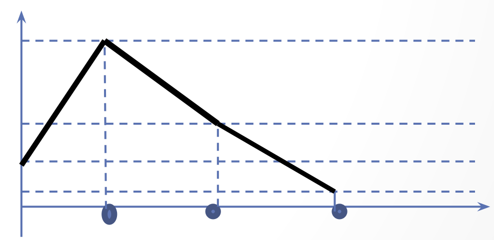
$$M[X] = \sum_{k=0}^{3} x_k P_k = 3/2$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Пример 2. В урне 2 белых и 3 черных шара. Наугад **с возвращением** достаем 3 шара. Случайная величина $X = 0, 1, 2, 3$ *–число белых шаров в выборке:*

$\boldsymbol{p = \frac{2}{5}; q = \frac{3}{5}; n = 3}$

	0	1	2	3	сумм
	27/125	54/125	36/125	8/125	1
	0	54/125	72/125	24/125	6/5
	0	54/125	144/125	72/125	54/25



$$M[X] = \sum_{k=0}^{3} x_k P_k = 6/5$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{54}{25} - \frac{36}{25} = \frac{18}{25}$$

Распределение Пуассона

В условиях, когда число повторений опыта $n \to \infty$, вероятность события А $\boldsymbol{p \to 0}$, **но** $\boldsymbol{np = \lambda = const}$ биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона (редкие события):

$$P(n,0,p) = C^0{}_n p^0 (1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$lnp(n,0,p) = nln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim n\left(-\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} \dots\right) \sim -\lambda, \qquad n \to \infty$$

$p(n,0,p) \approx e^{-\lambda}$. С учетом $\frac{P(n,k,p)}{P(n,k-1,p)} = \frac{pn-p(k-1)}{k(1-p)} = \frac{\lambda - \frac{\lambda}{n}(k-1)}{k(1-\frac{\lambda}{n})} \approx \frac{\lambda}{k}$ получаем

$$p(n,1,p) \approx \lambda p(n,0,p) \approx \lambda e^{-\lambda}; \quad p(n,2,p) \approx \frac{\lambda}{2} p(n,1,p) \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \quad \dots\dots$$

$$\boldsymbol{p(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\ ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} p(k,\lambda) = 1}$$

Кроме того, распределение Пуассона является *моделью простейшего потока событий (последовательности событий, происходящих в случайные моменты времени). Вводится* ***интенсивность потока μ*** *- число событий в единицу времени. Параметр* ***λ = μτ – среднее число событий за время τ.***

Геометрическое распределение

Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие **A** появляется с вероятностью p. Опыты ведутся до первого появления события **A.** Случайная величина $\boldsymbol{X}$– число проведенных опытов. Ряд распределения:
$q = 1 - p$

	1	**2**	**3**	**…**	**m**	**…**
				…		…

$$M[X] = \frac{1}{p}\ ;\ \ D[X] = \frac{q}{p^2}$$

Пример. Вероятность наладить схему с одной попытки p. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число попыток .

Гипергеометрическое распределение (схема извлечения без возвращения)

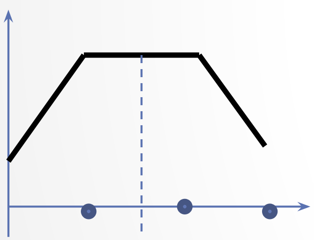
Имеется $\boldsymbol{n}$ объектов, среди которых $\boldsymbol{l}$ вида **C** и $(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{l})$ вида **B.** Случайным образом отбирается $\boldsymbol{r}$ объектов. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число объектов вида **C** среди отобранных: $P(X = x) = \dfrac{C^x{}_l C^{r-x}{}_{n-l}}{C^r{}_n}$.

Пример. Среди 7 микросхем 3 неисправные. Наугад берут 4 схемы. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число исправных схем в выборке из $r = 4$.

Числовые характеристики. Математическое ожидание

Математическое ожидание (среднее по распределению) – это число, определяемое для дискретной случайной величины формулой $\boldsymbol{M[X] = \sum_k x_k p_k}$. Эта сумма может быть как конечной, так и рядом. $M[X]$ существует, если ряд сходится.

Геометрически математическое ожидание $M[X]$ – **абсцисса координаты центра** масс под графиком – многоугольником распределения. Для *симметричных распределений* $M[X]$ *совпадает с абсциссой центра симметрии.*



$M[X] = 1{,}5$

Основные свойства M[X]:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой постоянной $M[C] = C$
2. Для **независимых** случайных величин $M[XY] = M[X]M[Y]$
3. $M[CX] = CM[X]$
4. Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$

Математическое ожидание. Примеры вычислений.

1. Биномиальное распределение

Для случая $n = 1$

	0	**1**
P	q	p

$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

Для случая $n > 1$ $\boldsymbol{M[X] = \sum_{k=1}^{n} p = np}$

2. Геометрическое распределение

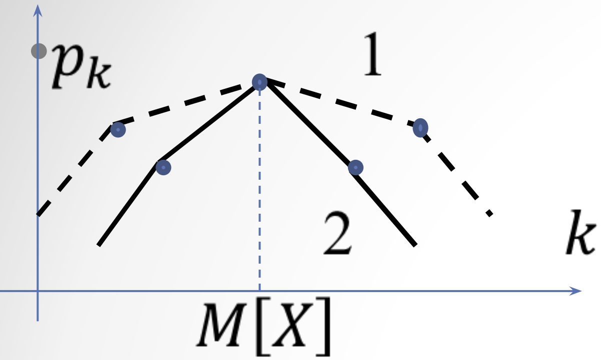
$$\boldsymbol{M}[X] = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^m)$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

3. **Распределение Пуассона.**

$\boldsymbol{M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\ e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda}$ **- среднее число событий**

Числовые характеристики. Дисперсия.



$(X - M[X])$ – отклонение от среднего

$M[X - M[X]] = M[X] - M[X] = 0$ – среднее отклонение равно нулю.

Дисперсия характеризует меру разброса значений случайной величины $\boldsymbol{X}$ около математического ожидания $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]$ и вводится как математическое ожидание квадрата отклонения от математического ожидания (усредненный квадрат отклонения от среднего):

$$\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{M}\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}])^2\} = \sum_k (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}])^2 \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}^2] - \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X}]^2 =$$

$$= \sum_k \boldsymbol{x}_k{}^2 \boldsymbol{p}_k - \left(\sum_k \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{p}_k\right)^2$$

Свойства дисперсии: 1) $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{0}$; **2)** для **независимых** случайных величин $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}]$; 3) $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$

4) $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{C}^2 \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}]$; **5)** $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{X}] + \boldsymbol{D}[\boldsymbol{Y}]$