# Векторное поле

Лекция 2

# Векторное поле. Геометрические характеристики

В некоторой области $D$ задано *векторное поле*, если каждой точке $M \in D$ поставлена в соответствие векторная функция

$$\boldsymbol{A} = A_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

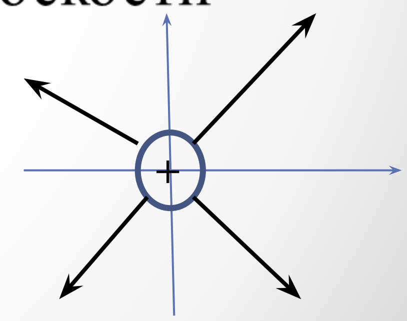
Например, поле скоростей, поле ускорений, поле сил.

Простейшая геометрическая характеристика векторного поля

- *векторная линия,* касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением векторного поля. Векторные линии определяются системой дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{A_x} = \dfrac{dy}{A_y} = \dfrac{dz}{A_z}$.

**Пример .** Электрическое поле точечного заряда на плоскости

$$\boldsymbol{E} = \frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \qquad \mathbf{r} = (x, y)$$




$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Векторные линии – решение уравнения

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \to y = Cx$$

# Дифференциальные операции 1 порядка. Оператор Гамильтона

Дифференциальные операции удобно записывать через векторный оператор « набла» ( оператор Гамильтона):

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial \dots}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \dots}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \dots}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial \dots}{\partial x};\ \frac{\partial \dots}{\partial y};\ \frac{\partial \dots}{\partial z}\right)$$

1. Действие оператора на скалярную функцию $U(x, y, z)$ определяет операцию градиента $\boldsymbol{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$

2. Скалярное произведение оператора и векторного поля определяет **дивергенцию** (расходимость) **векторного поля**

$$div\boldsymbol{A} = (\nabla, \boldsymbol{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Векторное произведение оператора и векторного поля определяют **ротор векторного поля** $\boldsymbol{rotA} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial \dots}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial \dots}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial \dots}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

# Дифференциальные операции 1порядка . Пример.

- $$\boldsymbol{A} = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + zx^2\boldsymbol{k} = (xy^2,\ \ yz^2,\ zx^2)$$

$$A_x = xy^2, \quad A_y = yz^2, \quad A_z = zx^2$$

$$div\boldsymbol{A} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(zx^2)}{\partial x} = y^2 + z^2 + x^2 = f(x,y,z)$$- скалярная функция (характеристика) векторного поля

$$rot\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\ldots}{\partial x} & \frac{\partial\ldots}{\partial y} & \frac{\partial\ldots}{\partial z} \\ xy^2 & yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(zx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz^2)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial(zx^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -2yz\boldsymbol{i} - 2xz\boldsymbol{j} - 2xy\boldsymbol{k} =$$

$(-2yz,\ \ -2xz,\ \ -2xy)$ - векторная характеристика векторного поля

# Дифференциальные операции 2 порядка

1. Дивергенция градиента скалярной функции является суммой вторых частных носит название оператор Лапласа

$$div(grad\ U) = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

2. Ротор градиента скалярной функции равен нулю:

$rot(gradU) = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} U] = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов, или в силу равенства смешанных производных в точках непрерывности:

$$rot(gradU) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \ldots}{\partial x} & \frac{\partial \ldots}{\partial y} & \frac{\partial \ldots}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

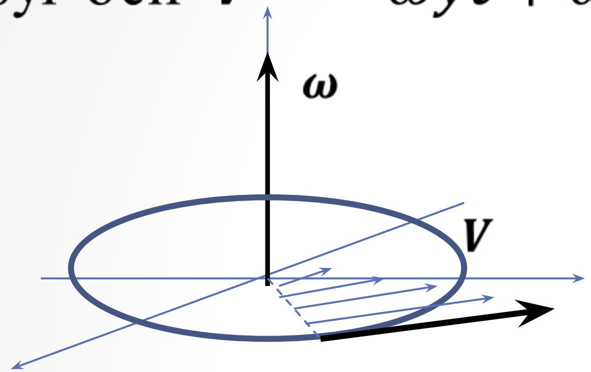
3. $div(rot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}]) = 0$ как смешанное произведение компланарных векторов

4. Также определены $grad(div\boldsymbol{A})$ , $rot(rot\boldsymbol{A})$

# Виды векторных полей .

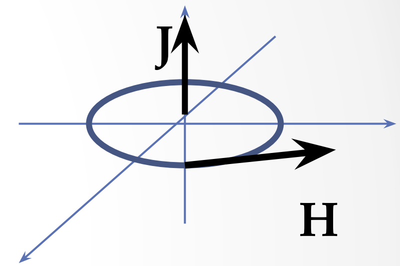
1. Векторное поле $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ называется **вихревым** , если $div\boldsymbol{A}=0$.

<u>Примеры</u>: 1) поле линейных скоростей диска, вращающегося вокруг оси $\boldsymbol{V}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}, \quad \omega=const$




2) Поле магнитной напряженности проводника с током $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{H}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$$



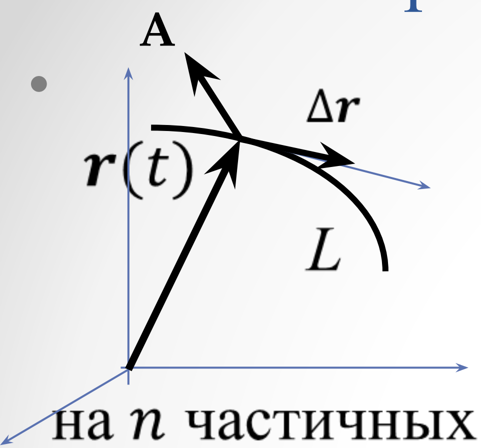

Векторные линии вихревого поля замкнуты или начинаются и заканчиваются на границах области.

2. Векторное поле $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ называется **потенциальным,** если вектор $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ является градиентом некоторой скалярной функции $U(x,y,z)$, называемой **потенциалом поля:** $\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{grad}U(M)$.

**Необходимое и достаточное условие потенциальности поля,** дважды дифференцируемого в односвязной области $rot\boldsymbol{A}=0$.

<u>Пример</u>: электрическое поле $\boldsymbol{E}$ точечного заряда

# Интеграл от векторной функции вдоль кривой.




- Пусть на дуге кусочно-гладкой кривой задано непрерывное векторное поле $\boldsymbol{A}(M)$. **Найдем работу**, которую совершает векторное поле при перемещении вдоль дуги кривой: разделяем дугу на $n$ частичных дуг, и на каждой из них выбираем точку $M_k \in (P_k, P_{k+1})$; *элементарная работа* находится *как скалярное произведение* вектора поля на вектор перемещения $(\boldsymbol{A}(M_k), \Delta\boldsymbol{r})$.

**Полная работа** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (A(M_k), \Delta r_k) = \int (\boldsymbol{A}(M), \boldsymbol{dr}) =$

$$= \int \left(A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + A_z(x,y,z)dz\right).$$

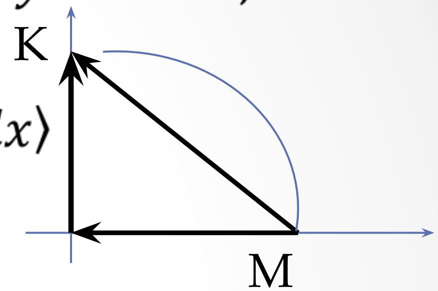
Интеграл изменяет знак на противоположный при изменении направления обхода кривой. Вычисление зависит от способа задания кривой и сводится к вычислению определенного интеграла. Например,

$$L: \quad y = y(x), x \in [a, b)]$$

$$\to \int_a^b (A_x\left(x, y(x)\right)dx + (A_y\left(x, y(x)\right)y^I(x)dx$$

# Работа потенциального поля

Пример. Векторное поле $A(M) = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ является **потенциальным**: непрерывно на всей плоскости $X0Y$, $rot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. **Найдем работу** поля по перемещению материальной точки из $M(1;0)$ в точку $K(0,1)$ по кривым 1) $y = 1 - x$, 2) окружность $x = cost$; $y = sint$, 3) ломаная M0K




**Кривая 1.** Работа $P = \int 2xdx + ydy\ \langle y = 1 - x, dy = -dx \rangle$

$$=\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}(2xdx + (1-x)(-dx)) = \int_1^0 (3x-1)dx = -\frac{1}{2};$$

**Кривая 2.** $P = \int 2xdx + ydy = \left\langle \begin{matrix} x = cost; & dx = -sintdt \\ y = sint; & dy = costdt \end{matrix} \right\rangle =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2cost(-sint)dt + sintcostdt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} costsintdt = -\frac{1}{2};$$

**Кривая 3.** $P = \int_1^0 2xdx + \int_0^1 ydy = -\frac{1}{2}$

**Это общее свойство потенциального поля: интеграл от векторного поля не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала в начале и конце пути интегрирования**

# Свойства потенциального поля. Потенциал.

- 1. $\boldsymbol{A}$(M) непрерывно и дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой односвязной области ;

2. $\boldsymbol{A}(M) = gradU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$; 3. $rot\boldsymbol{A}(M) = 0$

4. $(A, dr) = A_x dx + A_y dy + A_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{\partial U}{\partial x} dz =$
$= dU(x, y, z)$- полный дифференциал функции $U(x, y, z)$

5. $\int_M^K (A, dr) = \int_M^K (gradU, dr) = \int_M^K dU = U(K) - U(M)$

6. Интеграл по любому замкнутому контуру в области непрерывности поля равен нулю.

7. Потенциал можно восстановить по формуле $U(K) = \int_M^K (A, dr) + C$. Здесь $K(x, y, z)$ –произвольная точка пространства, $M(x_0, y_0, z_0)$- точка непрерывности поля. Поскольку можно выбрать любой путь интегрирования, то выбираем ломаную, звенья которой параллельны к координатным осям:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{\bar{x}} A_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{\bar{y}} A_y(\bar{x}, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{\bar{z}} A_z(\bar{x}, \bar{y}, z) dz + C$$