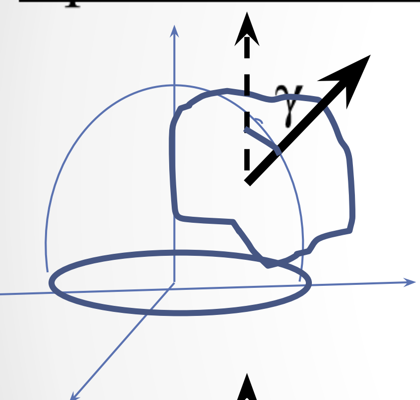
Поток и циркуляция векторного поля

Лекция 3

Ориентированная поверхность. Вектор нормали

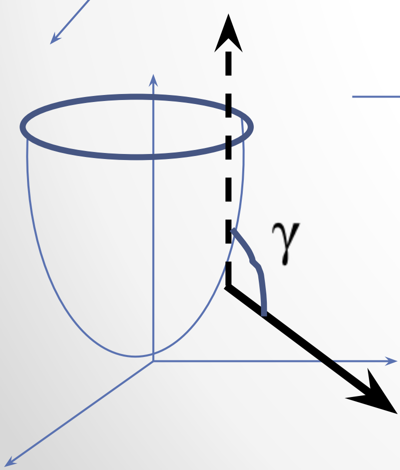
Пусть $\Sigma:\quad z = f(x,y)$– кусочно-гладкая двусторонняя ориентированная поверхность (в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость и указать нормаль к поверхности).

Ориентация поверхности задается выбором направления нормали:



$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1\right)$$

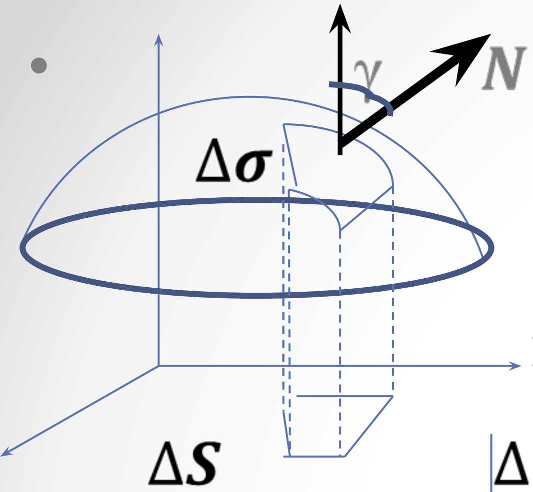
$$cos\gamma = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0$$



$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ -1\right)$$

$$cos\gamma = \frac{-1}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} < \ 0$$

Поток векторного поля



Поверхность разбиваем на n частей площадью $\Delta\sigma_k$. Выбираем M_k и находим нормаль $\boldsymbol{N}(M_k)$.

Каждому элементу поверхности ставим в соответствие **векторный элемент поверхности**

$$\Delta\boldsymbol{\sigma_k} = \boldsymbol{n}(M_k)\Delta\sigma_k = \frac{\boldsymbol{N}(M_k)}{|\boldsymbol{N}(M_k)|}\cdot\frac{\Delta \boldsymbol{S_k}}{|\boldsymbol{cos\gamma}|} = \boldsymbol{N}(M_k)\Delta S_k$$

$$\boxed{\Delta S_k = \Delta\sigma_k|cos\gamma|}$$

Пусть на поверхности задано непрерывное векторное поле $\boldsymbol{A}(\ A_x,\ \ A_y,\ \ \ A_z)$.

Элементарный поток - число векторных линий, проходящих через элемент поверхности в единицу времени в направлении нормали:

$$\Delta P_k = (\boldsymbol{A}(M_k),\boldsymbol{n}(M_k))\Delta\sigma_k == (\boldsymbol{A}(M_k),\boldsymbol{N}(M_k))\Delta S_k$$

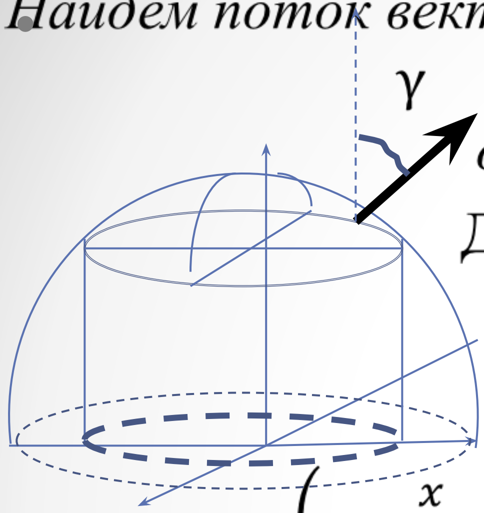
Полный поток – интегральная сумма : $\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{A}(M_k),\boldsymbol{n}(M_k))\,\Delta\sigma_k$

Поток $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\geq\infty}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M_k}),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{M_k}))\Delta\boldsymbol{\sigma_k} = \iint(\boldsymbol{A},\boldsymbol{n})d\sigma = \iint(\boldsymbol{A},\boldsymbol{N})ds$

- поверхностный интеграл 2 рода.

Пример вычисления потока

Найдем поток векторного поля $\boldsymbol{A} = (xz,\ z,\ y)$ *через часть сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,



отсекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1;\quad z \geq 0.$

Для верхней полусферы $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$\cos\gamma > 0, \qquad \boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y},\ 1\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right);\ (\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{N}) = \frac{x^2 z}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + \frac{yz}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + y.$$

Переменную z выражаем через уравнение поверхности: $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}) = x^2 + 2y$.
Тогда поток находим как двойной интеграл по проекции сферического сегмента на плоскость $X0Y$ в круг $x^2 + y^2 \leq 1$. В цилиндрической системе координат:

$$P = \iint (A, n) d\sigma = \iint (A, n) ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 \cos^2\varphi + 2r\sin\varphi) r dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 2r^2 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Поток через замкнутую поверхность

Пусть пространственная область V является **односвязной, замкнутой** и **ограниченной**, а замкнутая поверхность Σ является границей области. Для вычисления потока поля через такую поверхность объем разбивают на элементарные объемы ΔV_k. Элементарный поток через границы ΔV_k в направлении нормали, внешней по отношению к объему, равен дивергенции векторного поля: $\Delta P_k = divA(M_k)\Delta V_k = \iint (A,n)d\sigma$.

Определение дивергенции: $div\boldsymbol{A}(M_{\boldsymbol{k}}) = \lim_{\Delta V_k \to \infty} \frac{\iint (\boldsymbol{A},\boldsymbol{n})\boldsymbol{d\sigma}}{\Delta \boldsymbol{V_k}} \to$

дивергенция – мощность потока, приходящаяся на единицу объема.

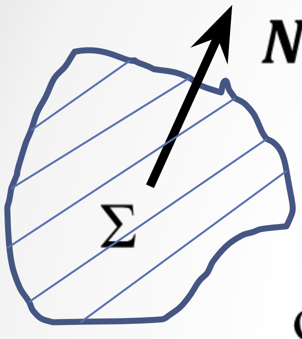
Поток через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали – $\sum_{k=1}^{n} \iint (\boldsymbol{A},\boldsymbol{n})\boldsymbol{d\sigma} = \sum_{k=1}^{n} div\boldsymbol{A}(M_{\boldsymbol{k}})\,\Delta V_k, \quad n \to \infty$

$$\iint (\boldsymbol{A},\boldsymbol{n})d\sigma = \iiint div\boldsymbol{A}dv$$

Теорема Остроградского- Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{A}$ называют интеграл векторного поля **по замкнутой кривой** $\int(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{dr})$, которая

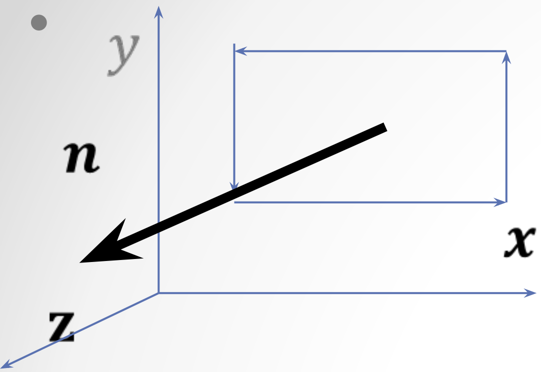


$\boldsymbol{N}$ ограничивает некоторую односвязную поверхность Σ. Интеграл зависит от направления обхода. За положительное направление обхода принимают такое, когда область Σ остается слева (из конца вектора нормали $\boldsymbol{N}$ кажется , что движение по кривой идет против часовой стрелки).

Найдем циркуляцию (работу) поля по бесконечно малому замкнутому прямоугольному контуру со сторонами Δx_k, Δy_k, ориентированному параллельно координатной плоскости $X0Y$. При положительном направлении обхода контура нормаль к поверхности (части плоскости), охваченной контуром $\boldsymbol{n}(0,0,1)$, $|cos\gamma| = 1$, элемент площади поверхности $\Delta\sigma_k = \Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

При этом работу можно находить как скалярное произведение вектора поля на вектор перемещения вдоль границы области.

Ротор. Теорема Стокса



$$\int (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{dr}) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta\sigma = (rot\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n})\Delta\sigma =$$

$= (\text{Пр}_{\boldsymbol{n}} rot\boldsymbol{A})\Delta\sigma$ - поток вектора $rot\boldsymbol{A}$

Это соотношение справедливо при любой ориентации контура.

Определение ротора . Ротором векторного поля называется вектор, проекция которого в каждой точке дифференцируемости поля на направление нормали к поверхности, охваченной контуром, равна плотности циркуляции

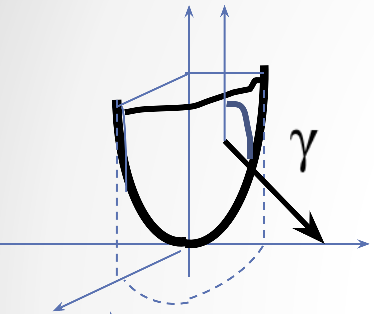
$$(\text{Пр}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{rotA}) = (\boldsymbol{rotA}, \boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\int (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{dr})}{\Delta\sigma} \quad .$$

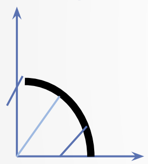
Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля по произвольному кусочно – гладкому замкнутому контуру равна потоку вектора $rotA$ через какую-либо поверхность, ограниченную этим контуром

$$\int (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{dr}) = \iint (\boldsymbol{rotA}, \boldsymbol{n}) d\sigma$$

Пример вычисления циркуляции

Найдем циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{A} = (y^2; xy;\ \ x^2 + y^2)$ по линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = Rz,\ z = R,\ x = 0, y = 0$





Шаг 1. Сложный замкнутый контур из трех кривых ограничивает часть поверхности параболоида

Нормаль образует тупой угол с осью $0z$; $cos\gamma < 0$

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ -1\right) \quad \to \boldsymbol{N} = \left(\frac{2x}{R}; \ \frac{2y}{R}; \ -1\right);$$

Шаг 2. $rot\boldsymbol{A} = (2y; -2x; -y)$

Шаг 3. Находим поток ротора через поверхность параболоида : $(rot\boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{N}) = \frac{4xy}{R} - \frac{4xy}{R} + y = y$

$$\int (A, dr) = \iint (rot\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}) d\sigma = \iint (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}) ds = \iint y ds =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r sin\varphi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3}$$

Уравнения Дж. Максвелла (уравнения классической электродинамики)

- 1. Закон Гаусса $div\boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, где ρ – плотность электрических зарядов
- 2. $div\boldsymbol{B} = 0$ – магнитных зарядов не существует
- 3. $rot\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ - закон Фарадея
- 4. $rot\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J}\frac{4\pi}{c}$ - закон Био-Савара