Обыкновенные дифференциальные уравнения: основные понятия, обзор основных методов решений уравнений первого порядка

Лекция 4

Дифференциальные уравнения. Пример.

Закон остывания тела. Пусть в момент $t = 0$ тело, имеющее температуру $T(0) = T_0$, помещено в среду с температурой $T_1 > T_0$. Опытным путем установлено, что скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

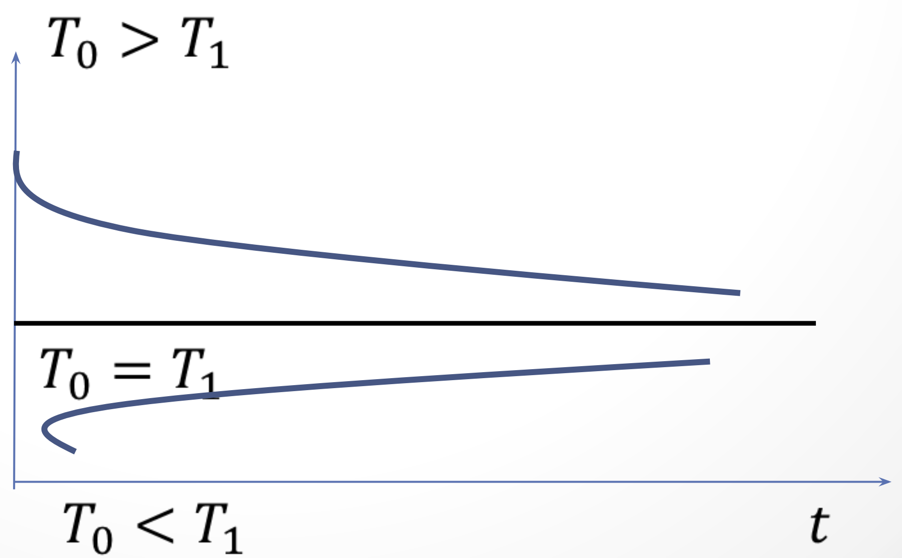
Математическое описание закона: $\boldsymbol{T(t)}$ - искомая зависимость температуры тела от времени; производная $\boldsymbol{\frac{dT(t)}{dt}}$ - скорость изменения температуры; k = коэффициент пропорциональности

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T_1).$$

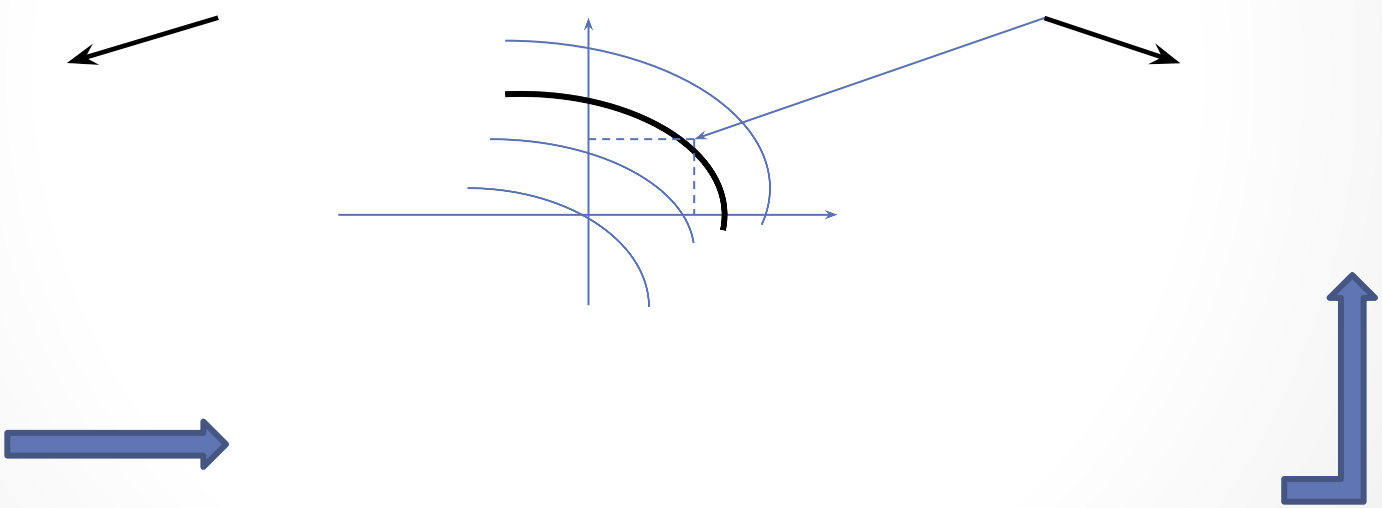
Решение уравнения – зависимость $T(t)$ зависит от начального условия $T(0) = T_0$:

Другие задачи по составлению дифференциальных уравнений смотрите

В приложении [Задачи.docx]



Дифференциальные уравнения. Основные понятия



Уравнения с разделяющимися переменными

- $\boldsymbol{y^I = \frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)}$ $\quad$ $\boldsymbol{M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0}$

$$\int f_1(x)dx = \int \frac{dy}{f_2(y)} + C \qquad \int \frac{M(x)}{P(x)} dx = -\int \frac{Q(y)}{N(y)} dy + C$$

Примеры.

1. $y^I = -2xy \longrightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \longrightarrow lny - lnC = ln\frac{y}{C} = -x^2 \longrightarrow$

$y = Ce^{-x^2}$ - общее решение

2. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0 \longrightarrow xdx = -\frac{ydy}{y^2-4} \longrightarrow -\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}ln(y^2 - 4)$-

\- $\frac{1}{2}lnC \longrightarrow -x^2 = ln\frac{y^2-4}{C} \longrightarrow y^2 = 4 + Ce^{-x^2}$ - общее решение

3. $x^2y^2\frac{dy}{dx} + 1 = y \longrightarrow x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1 \longrightarrow \frac{y^2dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2} \longrightarrow$

$$\int \frac{(y^2-1)+1}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2} + C \longrightarrow \frac{y^2}{2} + y + ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C$$

Уравнения, приводящиеся к разделению переменных

- $y^I = f(ax + by + c) \longrightarrow z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$

Пример. $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x + 1) \longrightarrow z = y - x + 1 \longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$

$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 1 \longrightarrow \frac{dz}{dx} = -(1 - cosz) \longrightarrow -\int \frac{dz}{2sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} = \int dx + C$

$ctg\left(\frac{z}{2}\right) = x + C \Rightarrow ctg\left(\frac{y-x+1}{2}\right) = x + C$

- **Однородные уравнения:** $y^I = f\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow u = \frac{y}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$

Пример. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$. **Шаг1. Явно выражаем производную**

$xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \longrightarrow$

Шаг 2. $\frac{du}{dx}x + u = u + \sqrt{1 + u^2} \longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = lnCx$

$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx$

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $\boldsymbol{y^I} + P(x)\boldsymbol{y} = f(x)$, линейное по переменной y сводится к разделению переменных подстановкой $y = u(x)v(x)$ $\Longrightarrow$

$y^I = u^I v + u v^I = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dy}$ **Пример**: $\boldsymbol{(xy^I - 1)\ln x = 2y}$ $\Longrightarrow$

Приводим уравнение к стандартному виду линейного уравнения

$$xy^I - 1 = \frac{2y}{\ln x} \Longrightarrow xy^I - \frac{2y}{\ln x} = 1 \longrightarrow \boldsymbol{y^I - \frac{2y}{x\ln x} = \frac{1}{x}}$$

<u>Шаг1.</u> $\boldsymbol{u^I v} + v^I u - \boldsymbol{\frac{2uv}{x\ln x}} + v^I u = \frac{1}{x} \Rightarrow v \cdot \left[\boldsymbol{u^I - \frac{2u}{x\ln x}}\right] + v^I u = \frac{1}{x}$

<u>Шаг 2.</u> Находим $u(x)$, решая уравнение $\left[u^I - \dfrac{2u}{x\ln x}\right] = 0$ $\Longrightarrow$

$\int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dx}{x\ln x} \longrightarrow \ln u = 2\ln(\ln x) \longrightarrow u = \ln^2(x)$ **<u>Шаг 3.</u>** Находим

$v(x)$, решая уравнение $v^I u = \dfrac{1}{x} \longrightarrow \dfrac{dv}{dx}\ln^2(x) = \dfrac{1}{x} \longrightarrow$

$\int dv = \int \frac{dx}{x\ln^2 x} \Longrightarrow v = -\frac{1}{\ln x} + C$ **<u>Шаг 4.</u>** $\boldsymbol{y = uv = C\ln^2(x) - \ln x}$

ОТВЕТ

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $\boldsymbol{x^I} + P(y)\boldsymbol{x} = f(y)$, линейное по переменной x сводится к разделению переменных подстановкой $y = u(y)v(y)$

$$y^I = u(y)^I v(y) + u(y)v^I(y) = \frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy}$$

Пример. $\boldsymbol{y^I = \frac{y}{x+y^3}}$. Уравнение не является линейным по переменной y, поскольку оно содержит y^3. Выражаем $x^I = \frac{1}{y^I}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/_{dx}} \longrightarrow x^I = \frac{x+y^3}{y} \longrightarrow x^I - \frac{x}{y} = y^2 \longrightarrow$$ уравнение линейно по x

<u>Шаг 1.</u> $u^I v + v^I u - \frac{uv}{y} = y^2 \longrightarrow v\left[\frac{du}{dy} - \frac{u}{y}\right] + v^I u = y^2$

<u>Шаг2.</u> $\boldsymbol{\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0} \longrightarrow \int \boldsymbol{\frac{du}{u}} = \int \boldsymbol{\frac{dy}{y}} \longrightarrow ln u = ln y \longrightarrow \boldsymbol{u = y}$

<u>Шаг3.</u> $\frac{dv}{dy}y = y^2 \longrightarrow \int dv = \int y dy + C \longrightarrow v = \frac{y^2}{2} + C$

<u>Шаг4.</u> Ответ $\boldsymbol{x = uv = \frac{y^3}{2} + Cy}$

Уравнения Бернулли

- $\boldsymbol{y^I} + P(x)\boldsymbol{y} = f(x)y^m, \quad m \neq 0, \quad m \neq 1 \longrightarrow z = y^{1-m}$
- $\boldsymbol{x^I} + P(y)\boldsymbol{x} = f(y)x^m, \quad m \neq 0, \quad m \neq 1 \longrightarrow z = x^{1-m}$

Пример 1. $\boldsymbol{y^I + 2y = e^x y^2} \longrightarrow m = 2 \longrightarrow z = y^{-1} \longrightarrow y = \frac{1}{z} \longrightarrow$

$$y^I = -\frac{z^I}{z^2} \longrightarrow -\frac{z^I}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{e^x}{z^2} \Longrightarrow z^I - 2z = -e^x \longrightarrow z = u(x)v(x)$$

$$\longrightarrow v[u^I - 2u] + v^I u = -e^x \longrightarrow u^I - 2u = 0 \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2dx \longrightarrow$$

$$u = e^{2x} \longrightarrow \frac{dv}{dx} e^{2x} = -e^x \longrightarrow \int dv = -\int e^{-x} dx \longrightarrow v = e^{-x} + C$$

$$\longrightarrow z = e^{2x}(e^{-x} + C)$$ **Ответ:** $y = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}$.

Пример 2. $\boldsymbol{y^I x^3 \sin y = xy^I - 2y} \Longrightarrow y^I(x^3 \sin y - x) = -2y \Longrightarrow$

$$y^I = \frac{-2y}{x^3 \sin y - x} \longrightarrow x^I = \frac{x^3 \sin y - x}{-2y} = -\frac{\sin y}{2y} x^3 + \frac{x}{2y} \longrightarrow x^I - \frac{x}{2y} = -\frac{\sin y}{2y} x^3$$

$$\Longrightarrow z = x^{1-m} = x^{-2} \longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-1/2} \longrightarrow z^I = -\frac{z^I}{2z\sqrt{z}} \Longrightarrow$$ и т. д.

Понятие о численном решении дифференциальных уравнений

Приближенные численные методы решения применяют в тех случаях, когда дифференциальное уравнение нельзя свести к интегрированию. **Метод Эйлера:** $y^I = f(x, y) = k = tg\varphi$; $y(a) = y_0$. Отрезок интегрирования $[a, b]$ делим на n частей $h = \frac{b-a}{n}$ и в каждой точке деления, начиная с (a, y_0), функцию заменяем на касательную $y_{k+1} \approx y_k + f(x_k, y_k)h$:

Пример: $\boldsymbol{y^I = x + y^2}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$

Найдем приближенное решение на отрезке $[0;\ 0{,}3]$: $h = 0{,}1$

$y(0) = 0$

$y_1 \approx y_0 + f(0{,}0)h \approx 0 + 0 \cdot 0{,}1 = 0$

$y_2 \approx y_1 + (0{,}1+0)0{,}1 \approx 0{,}01$

$y_3 \approx y_2 + (0{,}2+0{,}0001) \cdot 0{,}1 \approx 0{,}01+0{,}02 \approx 0{,}03$