Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Лекция 6

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

- $y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \; P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$

$P_{n-1},\; P_{n-2},\; P_{n-3} \dots \dots P_{1,} \quad P_0$ - постоянные коэффициенты.

$f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$

Если правая часть уравнения равна нулю $f(x) = 0$, то уравнение называют **однородным**:

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \; P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют **неоднородным.**

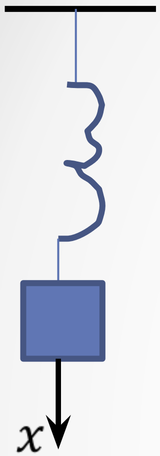
Уравнение порядка $\boldsymbol{n = 2}$ имеет вид

$$y^{II} + P_1 y^I + P_0 y = f(x).$$

Уравнение затухающих колебаний

$$x^{II} + 2\gamma x^{I} + \omega^2 x = 0$$

Механические колебания



x – смещение

x^I - скорость

K – коэффициент упругости пружины

k – коэффициент трения

Второй закон Ньютона:

$$ma = F_1 + F_2$$

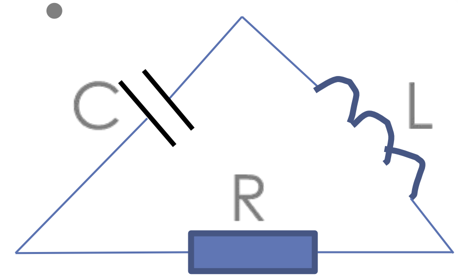
$$mx^{II} = -kx^{I} - Kx$$

$$x^{II} + \frac{k}{m}x^{I} + \frac{K}{m} = 0$$

$2\gamma = \frac{k}{m}$ - *коэффициент затухания*

$\omega^2 = \frac{K}{m}$ – квадрат *частоты собственных колебаний*

Электрические колебания



Закон Кирхгофа: $U_R + U_L + U_C = 0$

$$RI + LI^{I} + \frac{1}{C}\int I(t)dt = 0$$

$$LI^{II} + RI^{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$I^{II} + \frac{R}{L}I^{I} + \frac{1}{RC}I = 0$$

$2\gamma = \frac{R}{L}$ - *коэффициент затухания*

$\omega^2 = \frac{1}{LC}$ – *квадрат частоты собственных колебаний*

Структура **общего решения однородного уравнения**

- $$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = 0.$$

Совокупность линейно – независимых решений уравнения

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x) \ldots \ldots \quad y_n(x)$$

образуют *фундаментальную систему решений (базис)*.

Общее решение однородного уравнения *записывается как линейная комбинация базисных решений*

$$\boldsymbol{y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \cdots . . + C_n y_n(x)}$$

Решения уравнения подбирают в виде $y(x) = e^{\lambda x}$. С учетом того, что $y^I(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y^{II}(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots \ldots y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$ и $e^{\lambda x} \neq 0$,

получают ***характеристическое уравнение для параметра λ:***

$$\lambda^{\boldsymbol{n}} + P_{n-1}\lambda^{\boldsymbol{n-1}} + P_{n-2}\lambda^{\boldsymbol{n-2}} \ldots\ldots + P_1\lambda + P_0 = 0.$$

Вид базисных решений определяется видом корней этого характеристического уравнения.

Виды корней многочленов

- $$\boldsymbol{P_n(x)} = \lambda^{\boldsymbol{n}} + P_{n-1}\lambda^{\boldsymbol{n-1}} + P_{n-2}\lambda^{\boldsymbol{n-2}} + \ldots\ldots + P_1\lambda \;+\; P_0 = 0.$$

1. Действительный корень кратности $r = 1 \quad \lambda = a$, если

$P_n(x) = (\lambda - a)Q_{n-1}(x), \quad Q_{n-1}(a) \neq 0$

Пример: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0; \; \lambda_1 = -4; \; \lambda_1 = -1.$

2. Действительный корень кратности $r \quad \lambda = b$, если

$P_n(x) = (\lambda - b)^r Q_{n-r}(x), \quad Q_{n-r}(b) \neq 0$

Пример: $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \longrightarrow (\lambda + 5)^2 = 0; \lambda = -5$ кратности $r = 2$

3. Комплексные корни кратности r.

Вводим мнимую единицу $\pm\sqrt{-1} = \pm i \;; \quad i^2 = -1$

$(a\lambda^2 + b\lambda + c)^r = 0 \longrightarrow D = b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{-D}\,i}{2a}.$

Обозначим $\alpha = -\dfrac{b}{2a}; \quad \beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2a} \longrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Пример: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \longrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i; \; r = 1$

Общее решение однородного уравнения. Примеры

- Уравнению порядка $n = 2$ $y^{II} + P_1 y^{I} + P_0 y = 0$ соответствует **характеристическое уравнение** $\boldsymbol{\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 = 0}$ **:**

Вид корней	**Базисные решения**		**Пример**

Структура решения неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + P_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots . + P_1 y^I + P_0 = f(x)$$

Общее решение неоднородного уравнения определяется суммой общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{00}(x)$ и какого-либо *частного решения* неоднородного уравнения $y_{чн}(x)$:

$$\boldsymbol{y(x) = y_{00}(x) + y_{чн}(x).}$$

Одним из способов нахождения частного решение неоднородного уравнения является подбор по виду правой части $f(x)$ специального вида. При этом частное решение в общих чертах повторяет вид правой части. Кроме того, в каждом случае требуется следить за контрольным числом. Если это контрольное число является корнем характеристического уравнения кратности r для соответствующего однородного уравнения, то частное решение умножают на $\boldsymbol{x^r}$.

	Контрольное число	**Общий вид частного решения**

Подбор частного решения по правой части специального вида. Пример.

- $$y^{III} + y^{II} = f(x)$$

Шаг 1. Записываем характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) = 0$ **и** находим его корни: $\lambda = 0$ кратности $r = 2$ **и** $\lambda = -1$ кратности $r = 1$ **.**

	$\lambda = 2$ не является корнем характ. уравнения	

Шаг 3. Коэффициенты $A, \; B$ находим прямой подстановкой $\boldsymbol{y}_{\text{чн}}$ в исходное уравнение

Шаг 4. Записываем решение. Например,

$y = C_1x + C_2 + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}(cosx - sinx)$ для $f(x) = sinx$

Шаг 5. По начальным условиям находим C_1, C_2, C_3