Комплексные числа. Комплексная плоскость.

Лекция 7

Комплексные числа. Алгебраическая форма

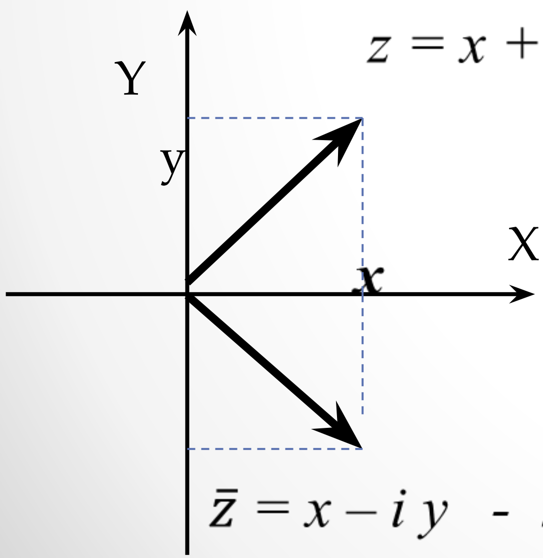
Для обеспечения возможности записывать корни всех алгебраических уравнений множество действительных чисел расширяют введением нового символа – мнимой единицы $\boldsymbol{i}$:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}; \qquad \boldsymbol{\pm\sqrt{-1} = \pm\, i}$$

Комплексное число вводится как упорядоченная пара действительных чисел $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, ***записывается*** $\boldsymbol{z = x + i\, y}$ ***и*** *изображается* ***вектором*** *на комплексной плоскости:*

$x = Rez$ $-$*действительная (реальная) часть комплексного числа*

$z = x + i\, y$



$y = Imz$ $-$*мнимая часть комплексного числа*

$\bar{z} = x - i\, y$ - ***комплексно-сопряженное число***

$$(\boldsymbol{x + iy})(\boldsymbol{x - iy}) = \boldsymbol{x^2 + y^2}$$

Арифметические операции в алгебраической форме

$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + i\,y_2 = x_2 + i\,\,y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \,\,x_2$

$$z_1 \pm z_2 = \,(x_1 + iy_1) \pm \,(x_2 + iy_2) = \,x_1 \pm \,x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \,x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

Пример: $\mathbf{5 + 3i - \,(2 - i)(3 + 2i) + \frac{4 - i}{3 + 4i} = \,5 + 3i - (6 + 4i - 3i + 2) + \frac{(4 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = 5 + 3i - 8 - i + \frac{8 - 19i}{9 + 16} =}$

$\mathbf{= -3 + 2i + \frac{8}{25} - \frac{19}{25}i = \left(-3 + \frac{8}{25}\right) + i\left(2 - \frac{19}{25}\right) = -\frac{67}{25} + \frac{31}{25}i}$

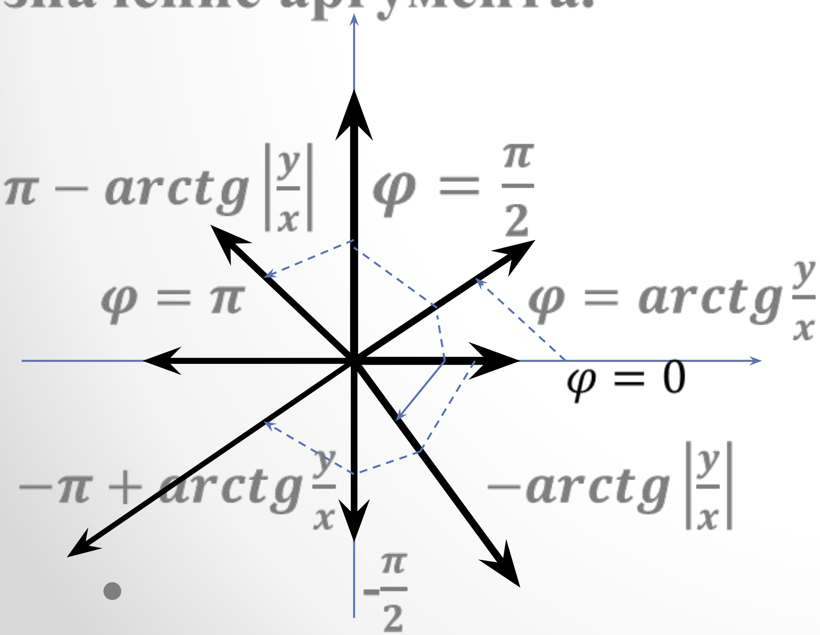
Модуль и аргумент комплексного числа

В полярной системе координат

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ - **модуль** комплексного числа (длина вектора, изображающего комплексное число)

$\Phi = Argz = argz \pm 2\pi n = \varphi \pm 2\pi n$ – **аргумент** комплексного числа **или угол между вектором, изображающим комплексное число и положительным направлением оси $0X$; $-\pi < \varphi \leq \pi$ - главное значение аргумента.**



	2	
-4	4	
	3	

Показательная и тригонометрическая форма комплексного числа

- $$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi \text{ – формула Эйлера}$$

$$z = rcos\varphi + irsin\varphi = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Пример: $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3});$

$$-4 = 4e^{i\pi} = 4(cos\pi + isin\pi);$$

$$-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = 3\left(cos\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Умножение, деление , возведение в степень:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{i\varphi n} = r^n(cos\varphi n + isin\varphi n)$$

Пример

- Выполнить действия $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1-i}\right)^{48}$.

Шаг 1. Записываем числитель и знаменатель в показательной форме: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i;\quad r_1 = 2;\ \varphi_1 = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3};\ z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = -1 - i\,;\quad r_2 = \sqrt{2};\ \varphi = -\pi + arctg1 = -\frac{3\pi}{4}\ ;\ z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Шаг 2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{\frac{13\pi\,i}{12}};$

Шаг3. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{48} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\right)^{48} = 2^{24}e^{52\pi i} = 2^{24}(cos52\pi + isin52\pi) =$

$= 2^{24}(1 - 0) = 2^{24}$

Корень из комплексного числа

- $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, \quad 1, \quad 2 \quad , n-1$$

Корни n- й степени лежат в вершинах правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\boldsymbol{r}}$.

Пример. $\sqrt[6]{-1} = 1\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + \ i \ sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right); \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$k = 0 \ \rightarrow z_1 = cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

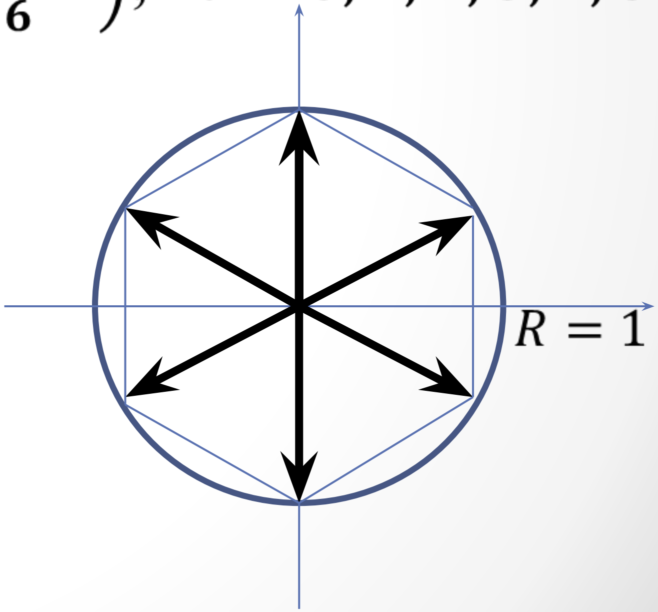
$k = 1 \rightarrow \ z_2 = cos\frac{\pi}{2} + i\ \ sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 2 \rightarrow \ z_3 = cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$k = 3 \rightarrow \ z_4 = cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6} = \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

$k = 4 \rightarrow \ z_5 = cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2} = \ -i$

$k = 5 \ \rightarrow z_6 = cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$



Кривые на комплексной плоскости

Расстояние между точками на комплексной плоскости:

$$|z_2 - z_1| = |x_2 + iy_2 - (x_1 + i\,y_1| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|$$

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Уравнение окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ с центром $\boldsymbol{C(z_o)}$:

$$|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_o}| = \boldsymbol{R}$$

Параметрические уравнения окружности:

$$\boldsymbol{z = z_0 + Re^{it}}, \qquad \boldsymbol{t \in [0, 2\pi]}$$

$$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0| =$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \left|Re^{it}\right| = R\left|e^{it}\right| = R|cost + isint| =$$

$$= R\sqrt{(cost)^2 + (sint)^2} = R \quad \Longrightarrow \quad |z - z_o| = R$$

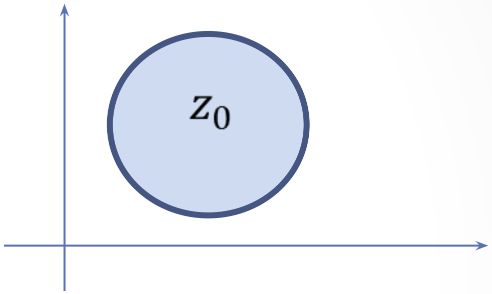
Пример. $\boldsymbol{|z + 4i| = 2}$ **или** $\boldsymbol{z = -4i + 2e^{it}}$ **-** это уравнения окружности радиуса *R=2* с центром в точке $z_0 = -4i$

Области на комплексной плоскости

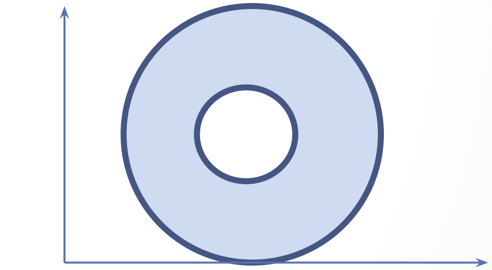
Область – это **связное открытое** множество точек плоскости.

Примеры.

1. $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}|<\boldsymbol{R}$ - внутренняя часть круга, исключая границу, является **односвязной областью**



2. $\boldsymbol{r}<|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}|<\boldsymbol{R}$ – внутренняя часть кольца является **двусвязной областью**



3. $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1}|+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_2}|<\boldsymbol{2a}$ - внутренняя часть эллипса с фокусным расстоянием $|z_1-z_2|=2c$ - является односвязной областью.