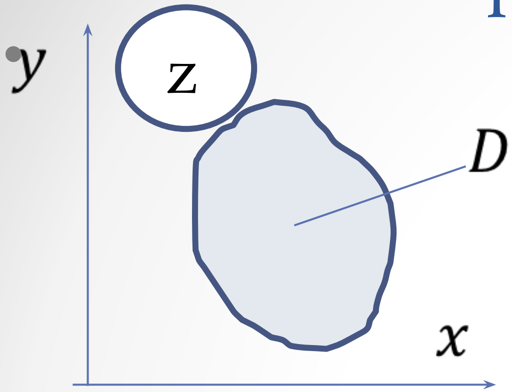
# Понятие функции комплексной переменной. Аналитические функции

Лекция 8

# Понятие функции комплексной переменной

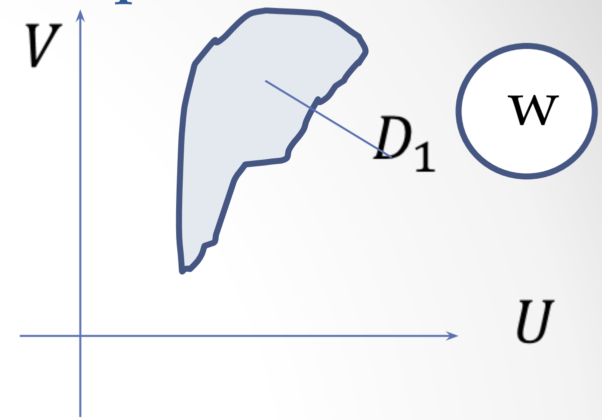



$$w = f(z)$$

$$w = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

$$U(x,y) = Ref(z)$$

$$V(x,y) = Imf(z)$$




Если каждому значению $z \in D$ по определенному правилу $f(z)$ ставится в соответствие комплексное число $w \in D_1$, то в области $D$ задана функция комплексного переменного.

Модуль функции $|w| = \sqrt{U^2(x,y) + V^2(x,y)}$ - рельеф функции изображается как поверхность в пространстве.

# Степенная функция $f(z) = z^n$

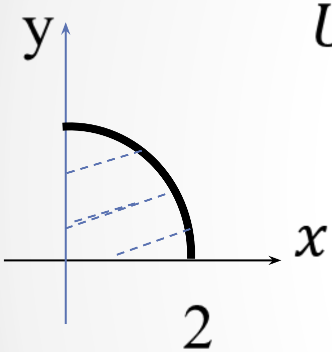
В полярной системе координат: $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n} = \rho e^{\theta i}$.

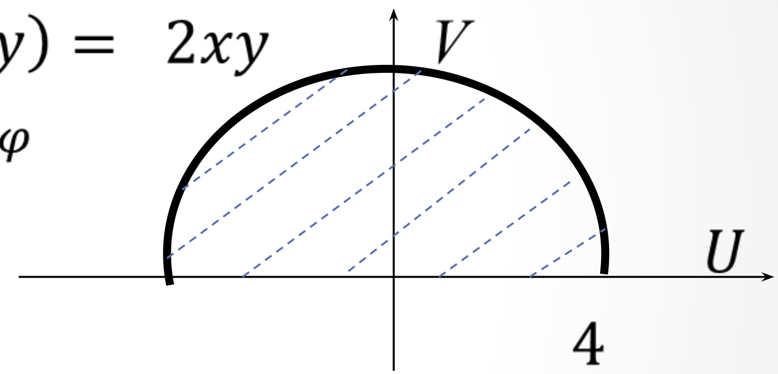
Отображение степенной функцией приводит к повороту на угол $\alpha = (n-1)\varphi$ и растяжению в $r^{n-1}$ раз.

**Пример 1**: $w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + (2xy)i$;

$$U(x,y) = x^2 - y^2; \quad V(x,y) = 2xy$$

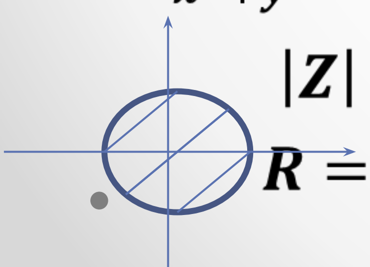
$$z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i2\varphi}$$




**Пример 2.** $\boldsymbol{w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Longrightarrow U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}}$ ;

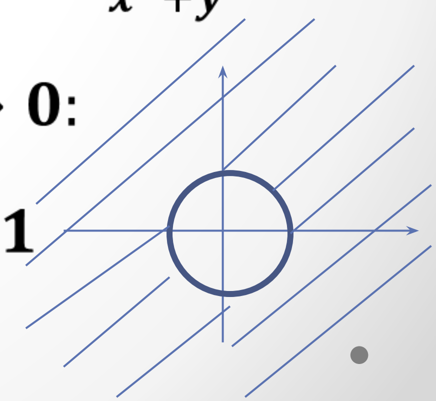
$\boldsymbol{V = -\frac{y}{x^2+y^2}}$ ; $\boldsymbol{|w| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ $\to \infty$ при $\boldsymbol{x \to 0,\ y \to 0}$:



$\boldsymbol{|Z| < 1}$

$\boldsymbol{R = 1}$ $\boldsymbol{(0,0)}$ $\Longrightarrow$ $\infty$

$\boldsymbol{|Z| > 1}$



# Показательная функция. Логарифмическая функция

- $$w = f(z) = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(cosy + isiny);$$
$$U(x,y) = e^{x}cosy\,; \quad V(x,y) = e^{x}siny$$

**Свойства.**

1. Поскольку $e^{2\pi i} = cos2\pi + i\,sin2\pi = 1$, **то функция становится периодической с периодом** $\boldsymbol{T = 2\pi i}$ **:**

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}$$

2. Функция $e^{z}$ может принимать любые комплексные значения.
Уравнение $e^{z} = z_1$ имеет решение $z = Lnz_1$

**Логарифмическая функция,** обратная к показательной функции, является многозначной $Lnz_1 = Ln(|z_1|e^{Argz_1}) = ln|z_1| + (argz_1 \pm 2\pi n)i = lnr + (\varphi \pm 2\pi n)i$

**Пример1:** $\boldsymbol{e^{z} = 2i \quad \rightarrow \quad z = ln2 + \left(\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n\right) i}$

**Пример 2:** $\boldsymbol{(1+i)^{2i} = e^{2iLn(1+i)} = e^{2i(\frac{1}{2}ln2 + \left(\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n\right)i}}$

# Тригонометрические и гиперболические функции

Выражаются через показательную функцию:

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \;;\; cosz = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \;;\; cos^2 z + sin^2 z = 1$$

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \;;\; chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \;;\; ch^2 z - sh^2 z = 1$$

$$siniz = ishz; \quad cosiz = chz; \quad shiz = isinz; \quad chiz = cosz$$

**Новое свойство**. Функции $sinz,\ cosz$ **не являются ограниченными** на всей комплексной плоскости

$$sinz = \sin(x + iy) = sinxcos(iy) + cosxsin(iy) = sinxchy +$$
$$+ icosxshy \;\rightarrow\; U(x,y) = sinxchy; \quad V(x,y) = cosxshy\ .$$

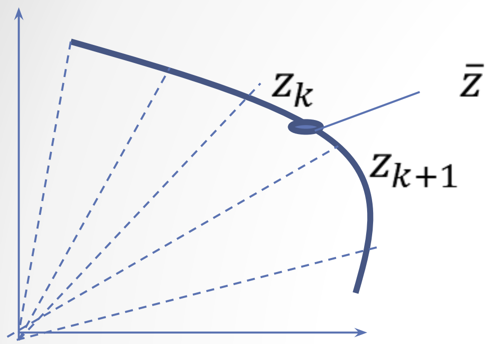
Профиль функции $|sinz| = \sqrt{sin^2xch^2y + cos^2xsh^2y} =$

$$= \sqrt{sin^2xch^2y + (1 - sin^2x)sh^2y} = \sqrt{sin^2x(ch^2x - sh^2x) + sh^2y}$$

$$= \sqrt{sin^2x + sh^2y}\ \langle |sinx| \le 1; \quad shy \to \infty, y \to \infty \rangle \Longrightarrow \infty$$

# Интегрирование функций : интеграл по кривой

Интеграл от функции комплексного переменного вводится как интеграл от векторной функции вдоль кривой:




$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{z}_k)\,\Delta z_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\big(U(\bar{x}_k,\bar{y}_k) + iV(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\big)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$\int f(z)dz = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\int (U(x,y)dx - V(x,y)dy) \ + i\int (V(x,y)dx + U(x,y))dy$$

Если кривая задана параметрически $z = z(t)$, то интеграл вычисляют по формуле $\int f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z^I(t)dt$.

Пример. Найдем интеграл по окружности $z = z_0 + Re^{it}$:

1) $n \neq -1 \rightarrow \quad \int (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} Rie^{it} dt \ = 0$

2) $n = -1 \quad \rightarrow \quad \int \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}dt}{Re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

# Понятие аналитической функции

Однозначную непрерывную функцию $f(z)$ называют **аналитической в области *D*** на плоскости комплексного переменного, если выполняются условия:

1.Сохраняется наиболее важный результат анализа – формула Ньютона – Лейбница $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Интеграл не зависит от контура интегрирования;

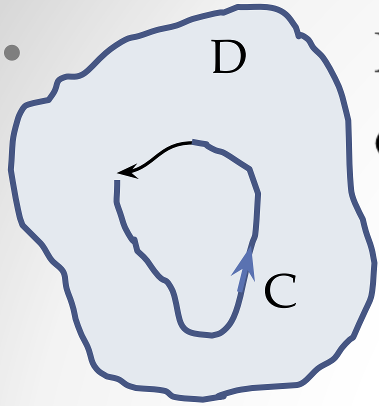
2. Интеграл **по любому замкнутому контуру** $C$, лежащему в односвязной области равен нулю (теорема Коши): $\int f(z)dz = 0$

3. Функция $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$ имеет непрерывные частные производные функций $U(x,y)$, $V(x,y)$, удовлетворяющие **условиям Коши-Римана:** $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$; $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Эти условия равносильны. Взяв одно из них за исходное, можно доказать все остальные

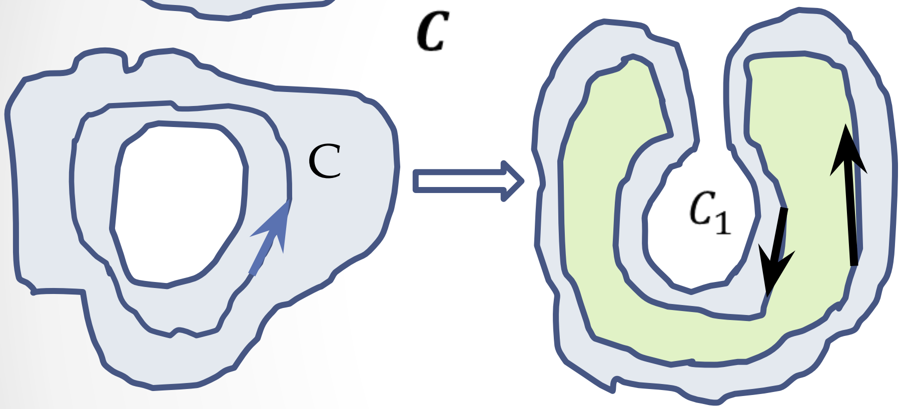
Для аналитических функций сохраняются все формальные правила дифференцирования

# Теорема Коши

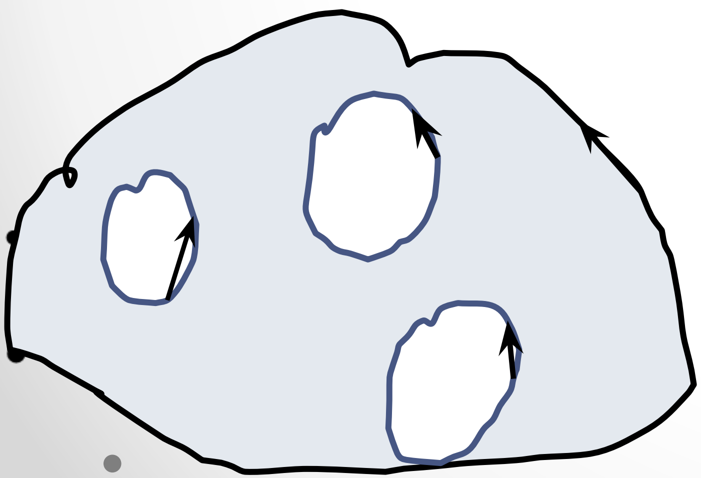



Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области области $D$,то интеграл по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в этой области равен нулю

$$\oint_{C} \boldsymbol{f(z)dz = 0;}$$




$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$



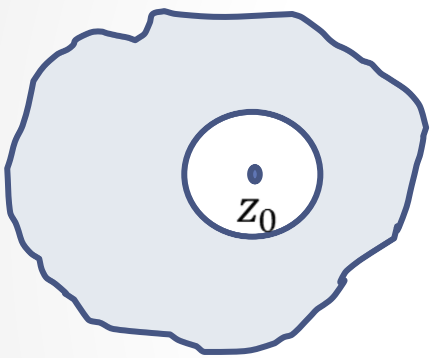
$$\oint_{C} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

# Интегральная формула Коши.

Теорема Коши для односвязной области устанавливает связь между значениями аналитической функции внутри области и на ее границе

Если функция $f(z)$ аналитична в области $D$. Замкнутая кривая $C \in D$ и ориентирована положительно. Тогда справедливо:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o} dz = 2\pi i f(z_0)$$




$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

В точке $z_0$ нарушается аналитичность подынтегральной функции (особая точка)

Дифференцируя последнее выражение $n$ раз по $z_0$ получаем выражение для производной в точке

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$