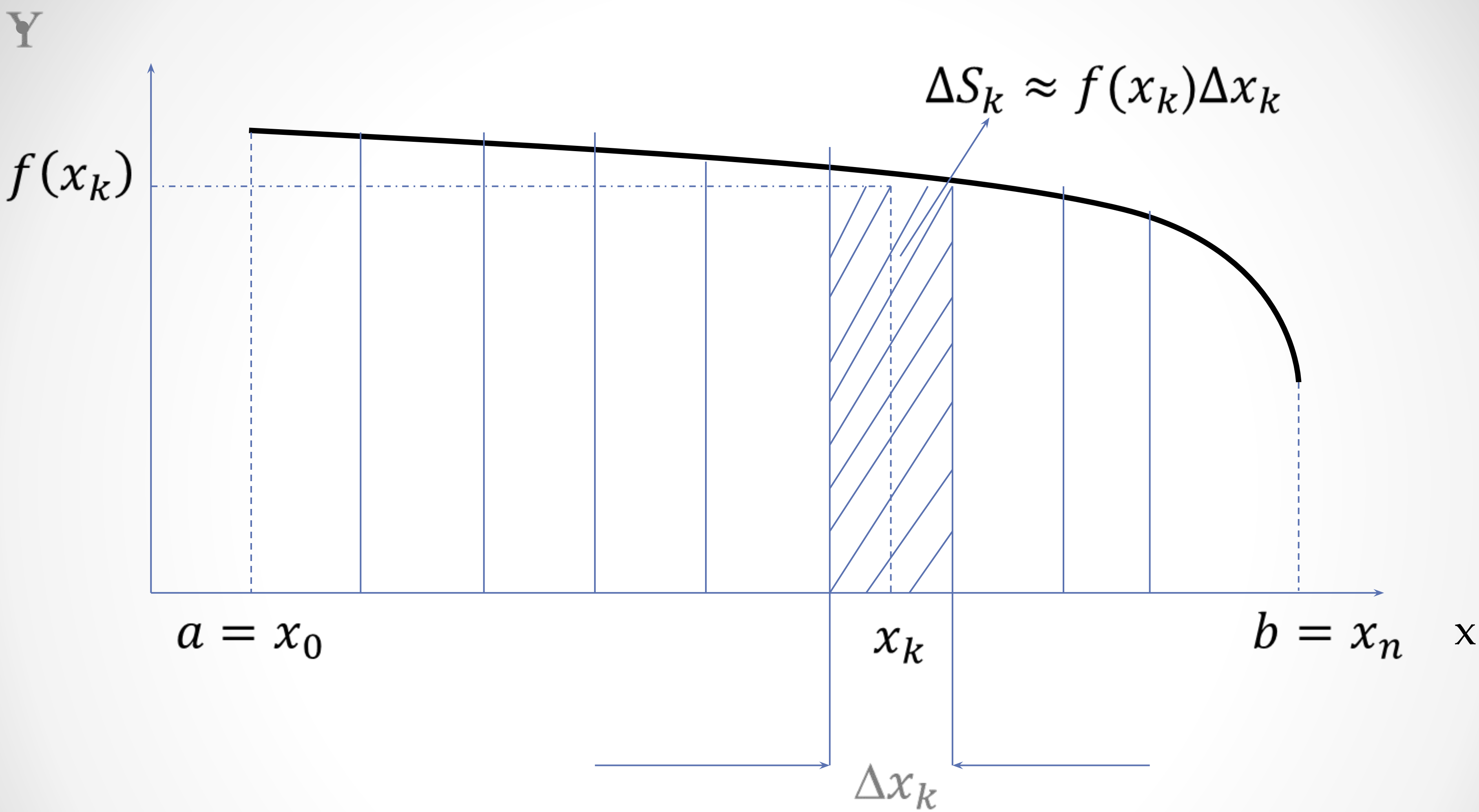
Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Свойства.

Лекция 4

Определенный интеграл. Задача о площади.



Определенный интеграл. Задача о площади.

Функция $y = f(x)$ **непрерывна** на $[a,\ b]$ и поэтому имеет следующие свойства:

1. **Ограничена** на отрезке
2. Принимает на этом отрезке **наибольшее M** и **наименьшее m** значения: $m \leq f(x) \leq M$
3. Принимает все **промежуточные значения** между наибольшим и наименьшим: если $m < C < M \leftrightarrow f(x^*) = C,\ x^* \ni [a,\ b]$

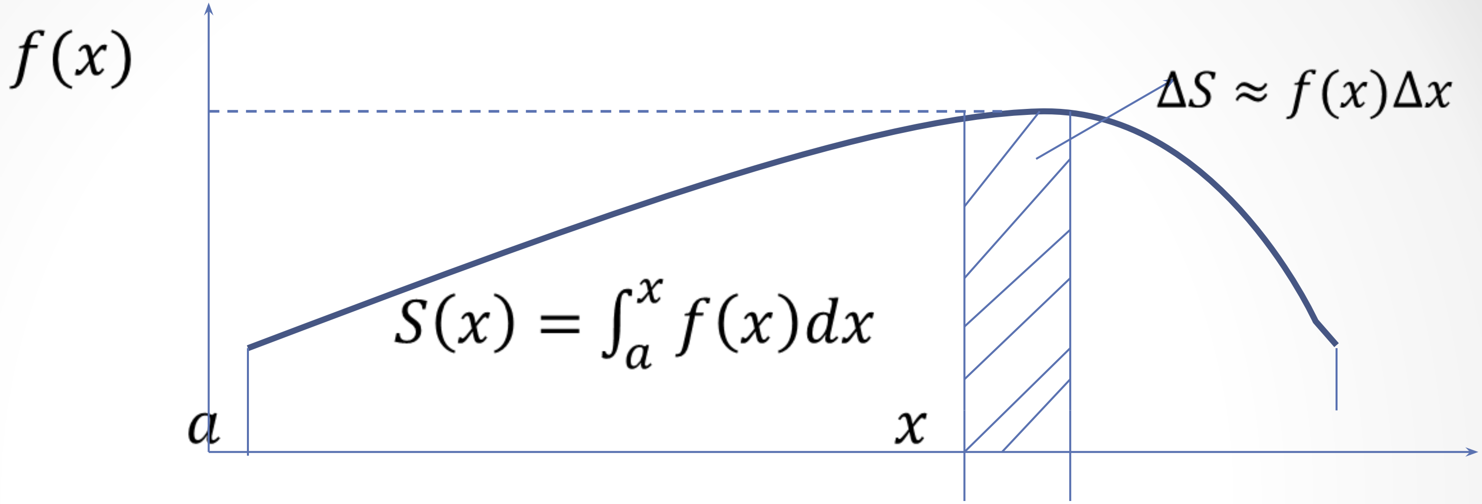
Для **вычисления площади** разбиваем отрезок $[a,\ b]$ на n частей шириной Δx_k . Произвольным образом на каждом интервале выбираем точку x_k, вычисляем значение функции $f(x_k)$. Элементарную площадь приближенно представляем как площадь прямоугольника $\Delta S_k \approx f(x_k)\Delta x_k$. А полную площадь представляем как сумму элементарных площадей.

Определенный интеграл. Интегральная сумма.

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма.
- Интегральные суммы образуют последовательность:
- $S_1 < S_2 < S_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots S_n$.
- **Определение.** Если существует предел последовательности интегральных сумм при условии $n \to \infty$, $\max\Delta x_k \to 0$ и этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точки x_k , то его называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, \ b]$:
- $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx = S$$
- **Геометрический смысл**: определенный интеграл – это число, равное площади под графиком функции при условии $f(x) \geq 0$.
- Если $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx = -S(x)$.

Интеграл с переменным верхним пределом

- Найдем первообразную для функции, непрерывной на $[a, b]$:



- $$S^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

- $\left(\int_a^x f(t)dt\right)^{/} = f(x),$ $\int_a^x f(x)dx = F(x) + C$

Формула Ньютона-Лейбница

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Пределы интегрирования – конечные величины
- $f(x)$ – непрерывна на $[a,\ b]$
- **Пример**: $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2 x} = tg(\frac{\pi}{4}) - tg0 = 1 - 0 = 1$
- **Пример:** $\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{cos^2 x} = \langle u = x, \quad v = tgx \rangle = \frac{\pi}{4} tg\frac{\pi}{4} - 0\mathrm{tg}0 -$
$- \int_0^{\pi/4} tgxdx = \frac{\pi}{4} + \ln\left|cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln|cos0| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$
- [Площадь.docx]

Замена переменной

- Если функция $f(x)$непрерывна на $[a,\ b]$, а функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема и имеет непрерывную $\varphi^{/}(t)$ на $[\alpha,\ \beta]$, где $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$, то
- $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi^{/}(t)dt$
- **Пример:** $\mathbf{I} = \int_{ln2}^{ln6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2} dx$ $\left\langle \begin{matrix} e^x - 2 = t^2, t = \sqrt{e^x - 2} \\ x = ln(t^2+2),\ dx = \frac{2tdt}{t^2+2} \end{matrix} \right\rangle$
- → Перерасчет пределов: $\boldsymbol{x = ln2}$ соответствует $t = \sqrt{e^{ln2} - 2} = \sqrt{2-2} = \mathbf{0}.$ $\boldsymbol{x = ln6}$ соответствует $\boldsymbol{t = 2}$.→
- $\int \frac{2t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt = 2\left(t - 2arctg\frac{t}{2}\right) = F(t).$
- $\boldsymbol{I = F(2) - F(0) = 2(2 - 2arctg1 - 0) = 2(2 - 2\frac{\pi}{4}) = 4 - \pi}$

Свойства определенного интеграла

- 1. **Линейность** следует из свойств первообразных и формулы Ньютона – Лейбница:
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- 2. **Аддитивность:** $\boldsymbol{c \in (a,\ b)}$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- 3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- **4. Свойство знака**: $f(x) \geq 0, x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $f(x) \leq 0,\ x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- 5. Интеграл от **нечетной** функции на **симметричном** интервале равен **нулю**: $\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$
- 6. Интеграл от **четной** функции на **симметричном интервале**
- $$\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx}$$

Оценки и приближенное вычисление

Интегралы бывают «неберущимися», то есть первообразные не могут быть выражены через элементарные функции. Например:

$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{sinx}{x}dx$

1. **Монотонность:** $x\epsilon[a,b], \quad (x) > g(x) \to \int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$
2. **Оценки:** $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$, где **наибольшее *M*** и **наименьшее *m*** значения $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
3. **Теорема о среднем:** функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

   $x^* \in (a,\ b) \quad \to \qquad \int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a).$

   Среднее значение функции на интервале интегрирования:

   $$f(x^*) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

4. Способы приближенного вычисления интегралов при помощи приближенной замены интеграла интегральной суммой (формулы прямоугольников, трапеций и парабол (метод Симпсона))выучить самостоятельно.