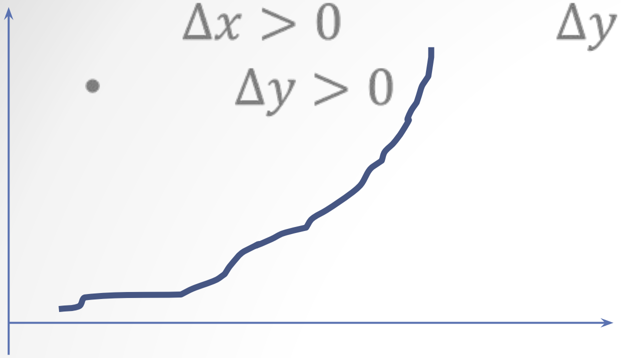
Применение производной к исследованию функций. Локальные экстремумы.

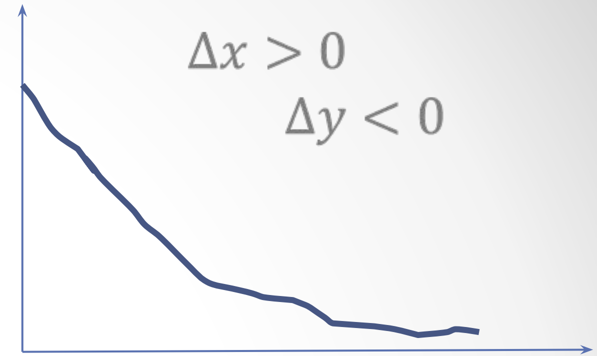
Точка перегиба.

Лекция 9

Критерий возрастания (убывания) функции



$\Delta y = y^{I}(x)\Delta x + o(\Delta x)$



Для того, чтобы функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b), была *возрастающей* (*убывающей*)на этом интервале , необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (a, b)$ выполнялось

$$f^{I}(x) \geq 0 \quad (f^{I}(x) \leq 0)$$

Локальные экстремумы (максимумы, минимумы)

Точка локального экстремума функции x_0 - это точка непрерывности функции, для всех точек окрестности которой выполняется неравенство:

$f(x) \leq f(x_0) \Longrightarrow \Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0$ - локальный максимум

$f(x) \geq f(x_0) \Longrightarrow \Delta y = f(x) - f(x_0) \geq 0$ - локальный минимум

Точки локального экстремума. Необходимые условия существования. Критические точки

Касательная параллельна оси абсцисс

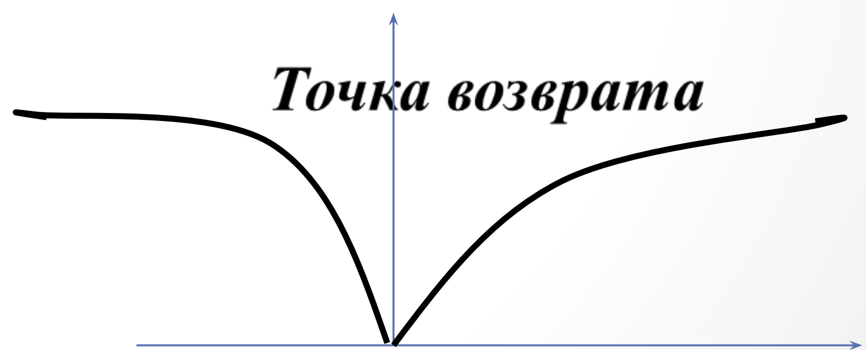
$$f^I(x_0) = 0$$

- **Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$,**
- **то $f^I(x_0) = 0$ или не существует**

- ***Угловая точка***

Нельзя провести касательную

Точка возврата



Вертикальная касательная

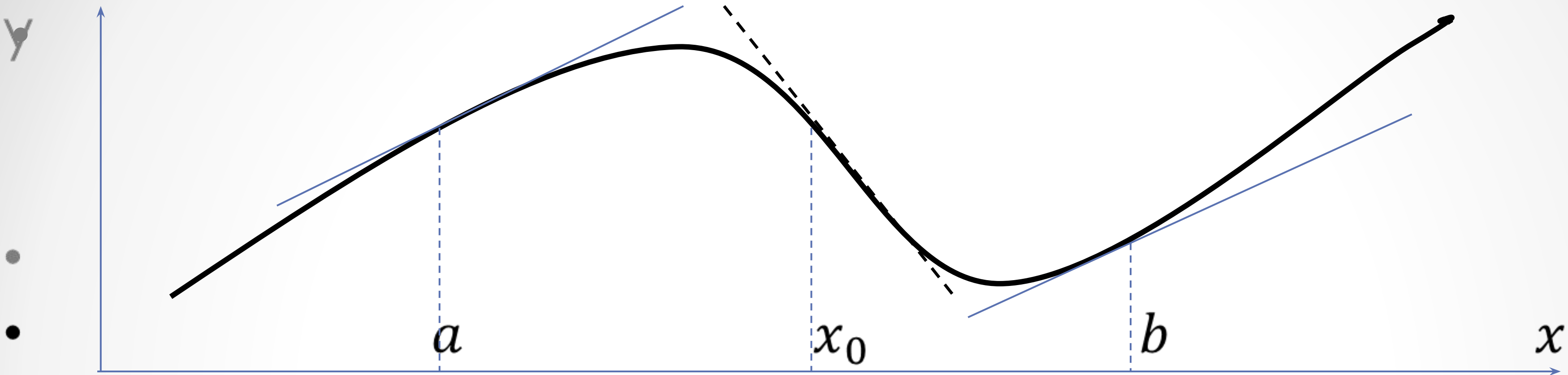
Бесконечно большая производная

Точки локальных экстремумов. Достаточные условия существования

- 1. Пусть точка x_0 - критическая точка первой производной, где выполняются необходимые условия существования экстремума функции $f(x)$. Тогда , если ***при переходе через эту точку производная функции меняет знак***, то x_0 - точка локального экстремума: 1)при изменении знака производной с **плюса** на **минус** точка является точкой **максимума** 2) при изменении знака производной с *минуса* на *плюс* точка является точкой *минимума*

- 2. Пусть в точке выполняются условия: $f^{I}(x_0) = 0, f^{II}(x_0) \neq 0$:
- $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$
- Тогда в точке максимума $f^{II}(x_0) < 0,$
- а в точке минимума $f^{II}(x_0) > 0$.
- Экстремумы.doc

Характер выпуклости графика функции. Точка перегиба.



- График функции в точке $y = f(x)$ в точке $x = a$ обращен *выпуклостью вверх* : существует окрестность точки, в каждой точке которой *касательная лежит выше графика функции.*
- График функции в точке $y = f(x)$ в точке $x = b$ обращен *выпуклостью вниз* : существует окрестность точки , в где *касательная лежит ниже графика функции.*
- Знак превышения графика над касательной определяется знаком второй производной: $\Delta y = f(x) - \left(f(a) + f^{I}(a)(x-a)\right) = \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(x-a)^2 + \ldots.$
- 1) $\Delta y < 0$, $\boldsymbol{f^{(2)}(a) < 0}$ **(выпуклость вверх)**,
- **2)** $\boldsymbol{\Delta y > 0,\ f^{(2)}(b) > 0}$ **(выпуклость вниз)**

Точка перегиба

- Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции, если удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $f(x)$ определена в точке x_0 или ближайшей ее окрестности и *непрерывна* в самой точке
2. Функция имеет в точке x_0 конечную или бесконечную производные (в точке можно провести касательную)
3. При переходе через x_0 изменяется направление выпуклости графика функции (касательная переходит с одной стороны графика на другую)

Необходимые условия существования точки перегиба (критические точки второй производной): $\boldsymbol{f^{(2)}(x_0) = 0}$ **или** $\boldsymbol{f^{(2)}(x_0)} = \infty$

Достаточные условия существования точки перегиба:

вторая производная изменяет знак при переходе через точку

Асимптоты графика функции

Если при $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) функцию можно представить в виде

$f(x) = g(x) + O\left(\frac{1}{x}\right)$, то $g(x)$ – асимптота графика функции.

Асимптоту можно найти следующими способами:

1. Разложить функцию по формуле Маклорена по степеням $\frac{1}{x}$
2. Если функция является дробно-рациональной, то можно путем деления углом выделить целую часть – асимптоту
3. Линейную асимптоту $y = kx + b$ можно найти по формулам

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Пример: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}}$ **.** **1)** $\boldsymbol{\frac{x^3}{(x+1)^2} = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2} = x - 2 + \frac{3}{x} \ldots .}$

2) $\boldsymbol{\frac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}}$ **,** **3)** $\boldsymbol{k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2} = 1,}$

$\mathrm{b} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2$ **[Асимптоты графика функции.docx]()**

План исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции. Проверить является ли функция четной, нечетной, периодической
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, интервалы знакопостоянства. Найти точки разрыва функции
3. Найти асимптоты графика функции: найти односторонние пределы в точках разрыва и на границах области определения, проанализировать поведение функции при бесконечно больших значениях аргумента
4. Сделать набросок графика, отразив полученные результаты
5. Найти первую производную, промежутки возрастания, убывания, экстремумы.
6. Найти вторую производную, точки перегиба интервалы выпуклости вверх или вниз
7. Окончательно построить график функции

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a (за исключением, может быть, самой точки), являются обе либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими, *существует конечный* $\lim_{x\to a}\frac{f^I(x)}{g^I(x)}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^I(x)}{g^I(x)}$
- ***Пример.*** $\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x/(x^2-8)}{4x-5} = \frac{6}{7}$
- **При раскрытии неопределенности $[0\cdot\infty]$ следует преобразовать в $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.** ***Пример:*** $\lim_{x\to+0} x\ln x\ [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)^I}{(\frac{1}{x})^I} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$
- ***Неопределенность*** $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\ [\infty^0] = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$ ***сводится к неопределенности*** $\left[0\cdot\infty;\ \ \frac{\infty}{\infty}\right]$