ТЕМА 3:
МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

- 3.1. Основные принципы, теоремы и преобразования линейных электрических цепей
- 3.2. Методы анализа резистивных цепей по уравнениям
- 3.2.1. Анализ линейных электрических цепей постоянного тока
- 3.2.2. Метод непосредственно применения законов Кирхгофа
- 3.2.3. Метод контурных токов
- 3.2.4. Метод узловых потенциалов
- 3.2.5. Метод суперпозиции (наложения)
- 3.2.6. Метод эквивалентного генератора
- 3.3. Матричные методы анализа электрических цепей
- 3.3.1. Матрично-топологический метод анализа электрических цепей
- 3.3.2. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа в матрично-топологической форме
- 3.3.3. Матрично-топологическая форма метода контурных токов
- 3.3.4. Матрично-топологическая форма метода узловых потенциалов

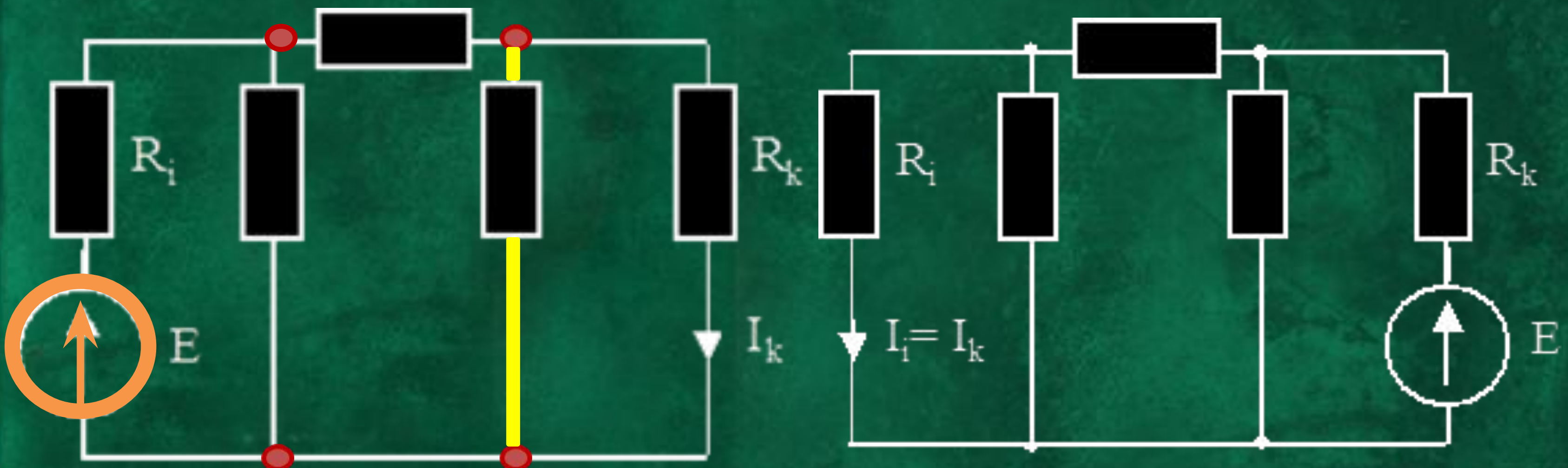
3.1. Основные принципы**,** теоремы и преобразования линейных электрических цепей

Принципы (свойства).

1.Принцип наложения (суперпозиции) – ток в каждой ветви равен алгебраической сумме частичных токов, вызываемых каждым из источников (э.д.с. и токов) схемы в отдельности.

Принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.

2.Принцип взаимности (Максвелла) – ток в каждой ветви Ik вызванный единственным источником э.д.с. E, включенным в i-ю ветвь, равен току в i-ой ветви при включении этого же источника в каждую ветвь.



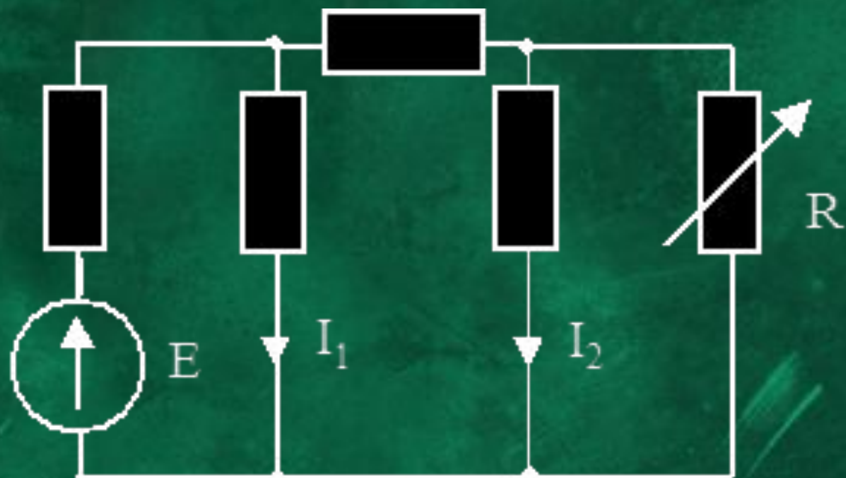
Узел - место схождения трёх и более токов;

Ветвь -это участок электрической цепи (схемы) с последовательно соединёнными элементами, по которому течет один и тот же ток.

Источник э.д.с (Е) - электродвижущая сила;

3.**Принцип линейности** – две любые величины (токи и напряжения) двух любых ветвей связаны друг с другом линейным соотношением вида **y=a+bx** независимо от изменения э.д.с. (тока) источника или сопротивления в какой-либо одной ветви.

Линейное соотношение между двумя любыми величинами двух любых ветвей не зависит от изменения э.д.с., тока источника тока или сопротивления в какой-либо третьей ветви.

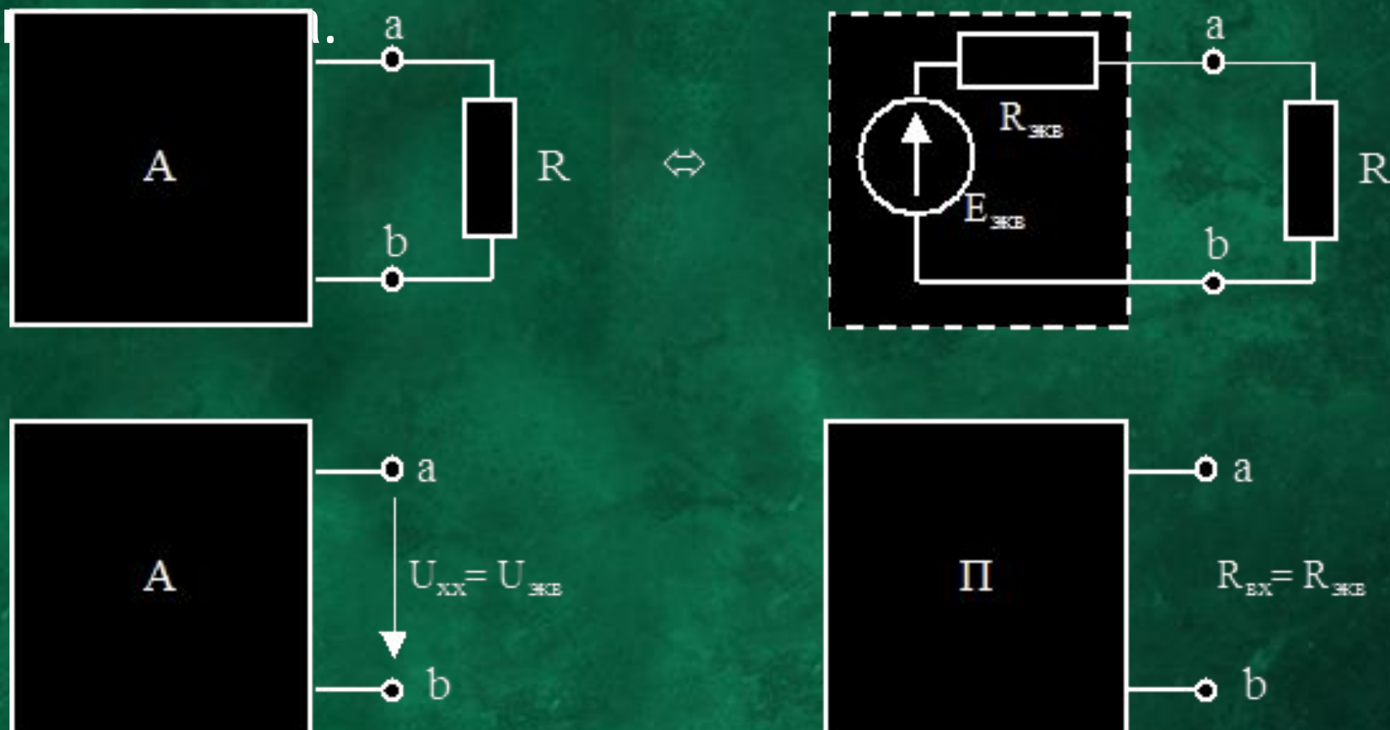


$I_1=a+b\cdot I_2$, при
$R=R_1$ и при

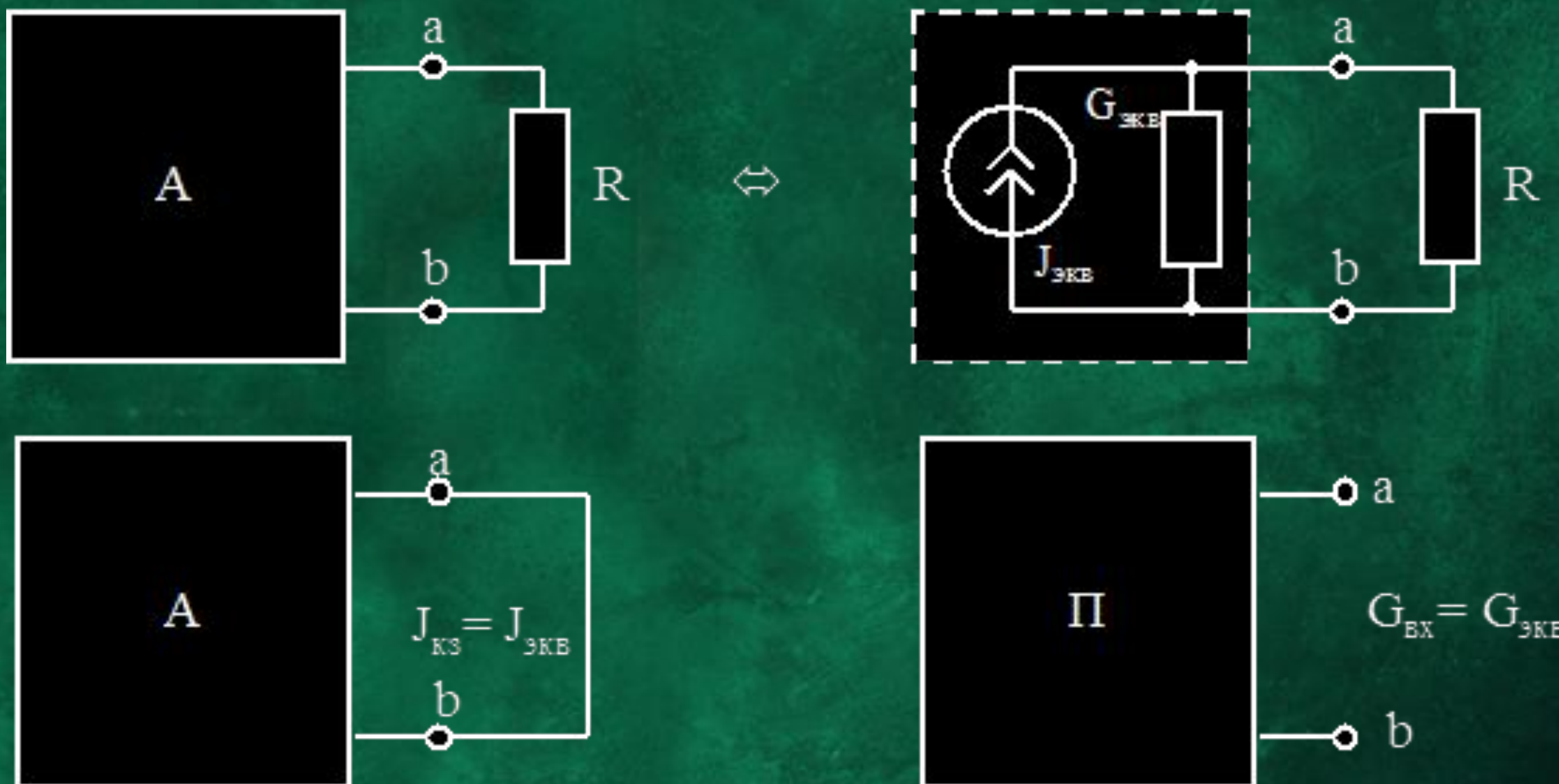
Теоремы

1. Теорема компенсации – токораспределение в электрической цепи не изменится, если любой пассивный элемент цепи заменить источником э.д.с., величина которого равна напряжению на этом элементе, а направление противоположно току в этом элементе.

2. **Теорема об эквивалентном источнике** (теорема об активном двухполюснике) – активный двухполюсник по отношению к рассматриваемой ветви можно заменить эквивалентным источником, э.д.с. которого равна напряжению холостого хода двухполюсника, а внутреннее сопротивление – входному сопротивлению двух… а.

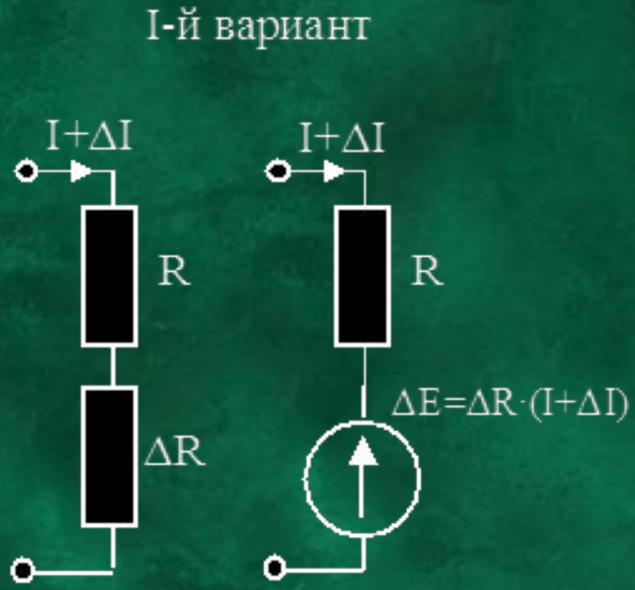


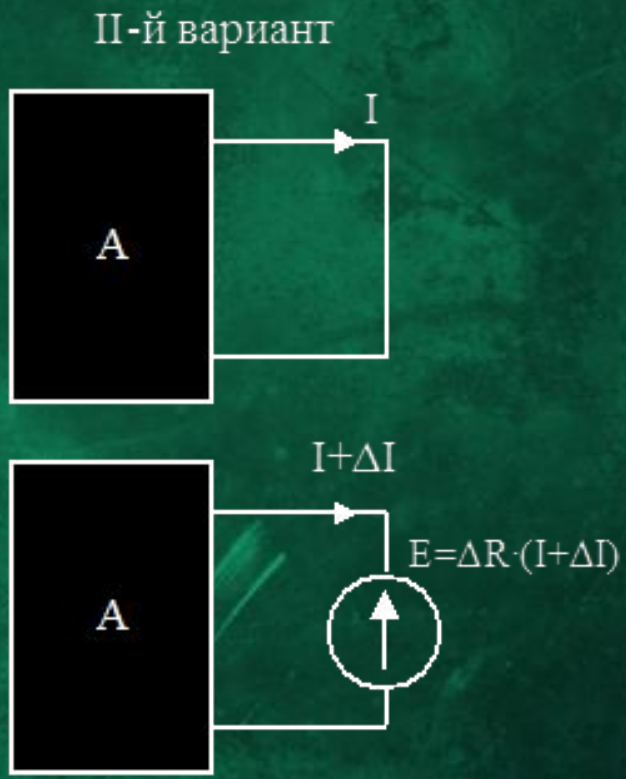
Активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником тока, ток которого равен току короткого замыкания двухполюсника, а внутренняя проводимость – входной проводимости двухполюсника.



3. **Теорема вариации** (теорема о взаимных приращениях)

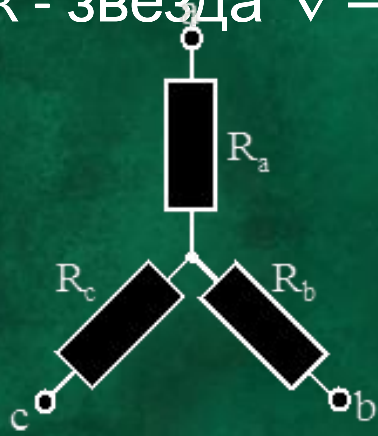
Изменение токов в ветвях, обусловленное изменением сопротивления какой-либо ветви электрической цепи на величину $\pm\Delta R$, будет таким же как при действии в этой ветви э.д.с., направленной противоположно первоначальному току этой ветви и равной по величине и знаку $\pm\Delta R\ (I+\Delta I)$.

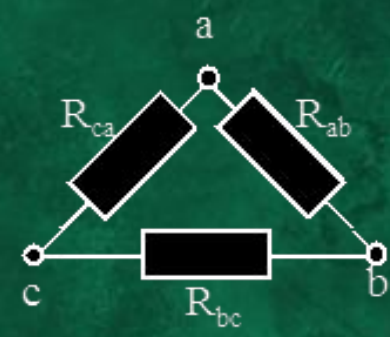




Эквивалентные преобразования

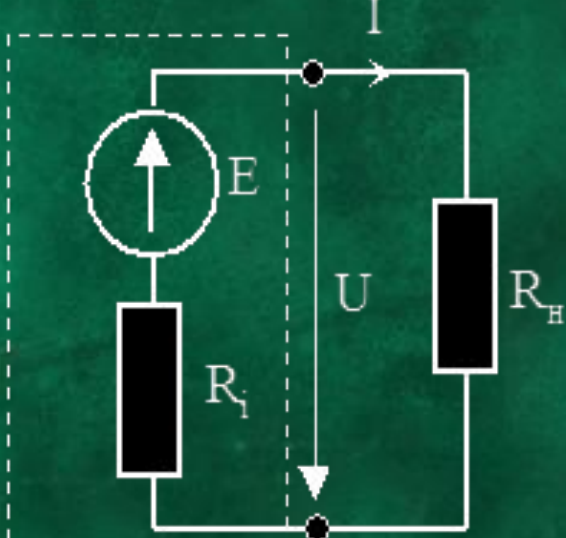
1. Преобразование звезда - треугольник Y⇒∇ и треугольник - звезда ∇⇒Y.



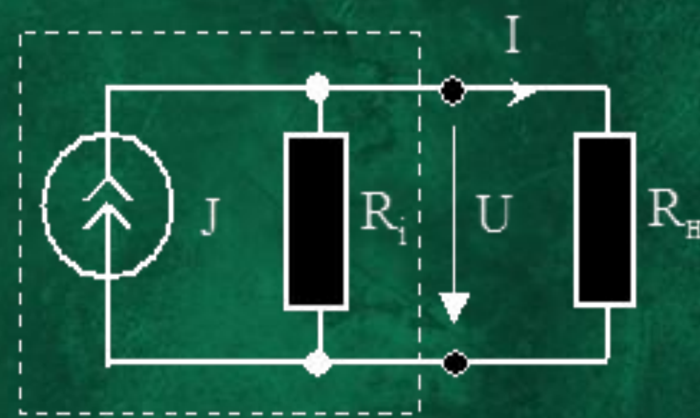


$\nabla \Rightarrow Y$	$Y \Rightarrow \nabla$
$R_a = \dfrac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$	$R_{ab} = R_a + R_b + \dfrac{R_aR_b}{R_c}$
$R_b = \dfrac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$	$R_{bc} = R_b + R_c + \dfrac{R_bR_c}{R_a}$
$R_c = \dfrac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$	$R_{ca} = R_c + R_a + \dfrac{R_cR_a}{R_b}$

2.Преобразования источников электрической энергии.



⇔



$E = R_i \cdot I$

$J = U/R_i$

3.2. Методы анализа резистивных цепей по уравнениям.

Линейные цепи – параметры (R, L, C, M) элементов схемы замещения не зависят от величины и направления протекающих к ним напряжений.

Задачи теории электрических цепей делятся на задачи анализа и задачи синтеза.

Анализ – расчет электрических процессов в заданных электрических цепях, т.е. с заданной структурой и заданными характеристиками всех элементов цепи.

Синтез – отыскание структуры цепи и характеристика ее элементов при которых электрический процесс в цепи будет подчиняться заданным закономерностям.

3.2.1. Анализ линейных электрических цепей постоянного тока.

Постоянный ток – неизменный по величине и по направлению.

Анализ основан на законе Ома и методе эквивалентных преобразований (эквивалентного сопротивления, свертки).

Закон Ома –сила тока в цепи прямо пропорциональна алгебраической сумме падений напряжений и ЭДС, и обратно пропорциональна сопротивлению.

Эквивалентное преобразование – замена группы элементов этого участка одним (или несколькими элементами с другой конфигурацией соединений) при условии, что режим работы в остальной части цепи не меняется.

Алгоритм расчета

1.Путем последовательных упрощений с помощью эквивалентных преобразований рассчитывают эквивалентное сопротивление цепи. В результате получают неразветвленную электрическую цепь с одним источником и эквивалентным сопротивлением цепи.

2.Определяют ток через источник при помощи закона Ома для полной цепи .

$$I = \frac{E}{R_i + R_{экв}}$$

3.Используя полученное значение тока через источник питания определяют токи во всех ветвях цепи.

4.Для проверки правильности расчета цепи составляют энергетический баланс цепи (или строят потенциальную диаграмму для любого контура).

Примечание

1.Если цепь питается от источника тока, то расчет ведут по п.(3, 4).

2.В случае сложно разветвленной цепи необходимо воспользоваться эквивалентным преобразованием: $Y \Rightarrow \nabla$ *и* $\nabla \Rightarrow Y$

Преобразование $Y \Rightarrow \nabla$

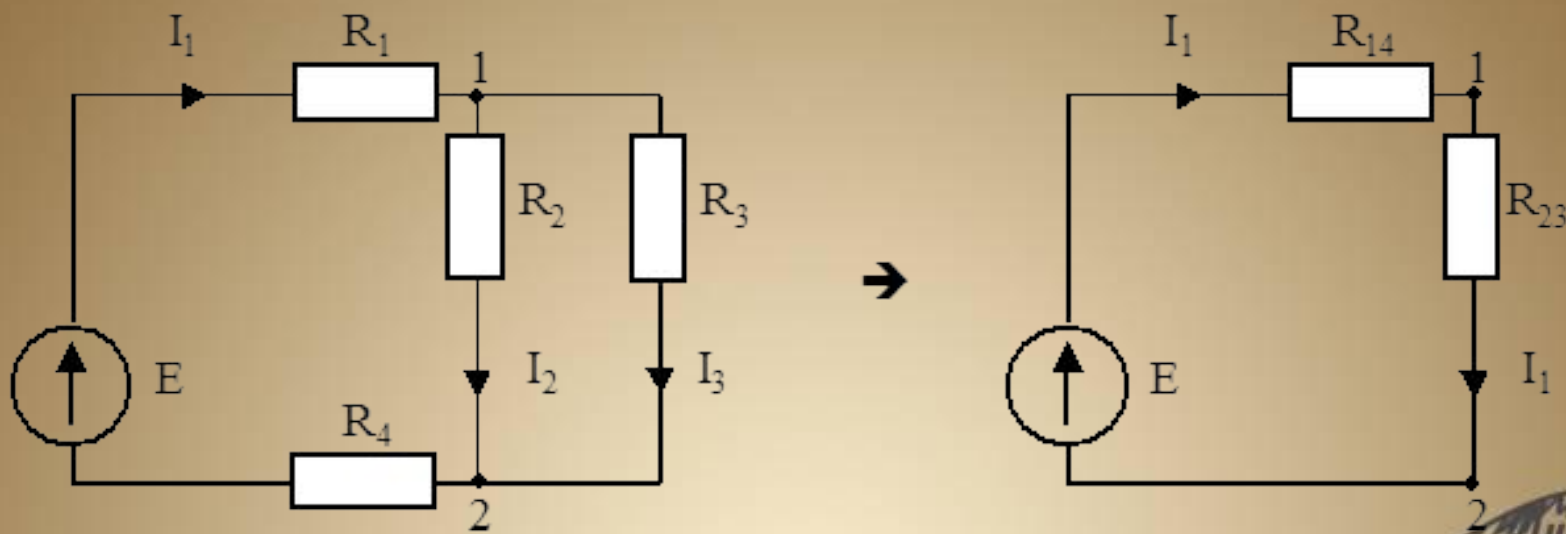
$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c} \qquad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \qquad R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}$$

Преобразование $\nabla \Rightarrow Y$

$$R_a = \frac{R_{ca} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \qquad R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{ac} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

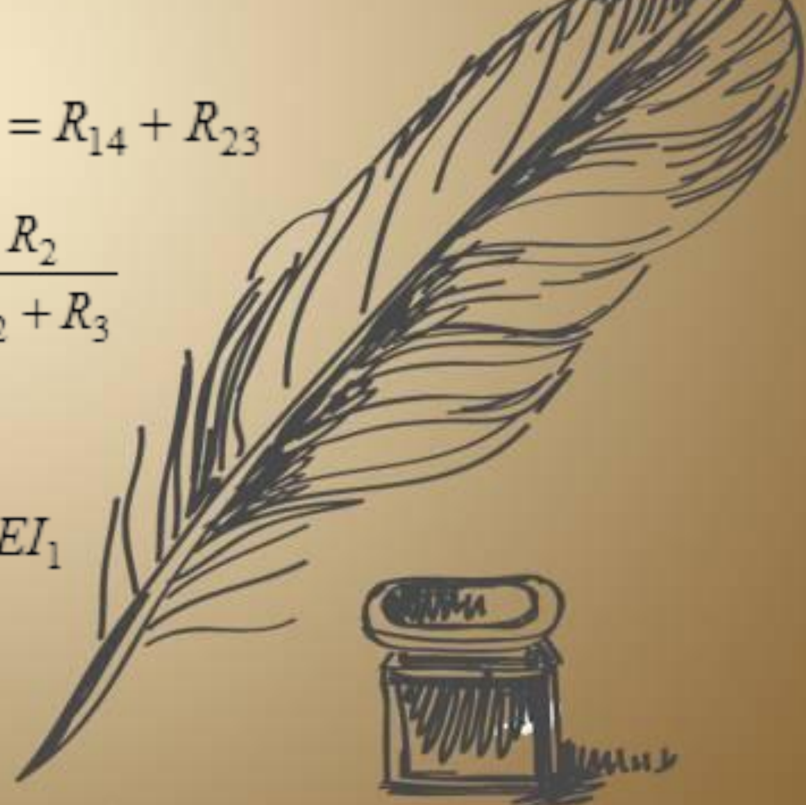
Пример 1



$$R_{14} = R_1 + R_4 \quad ; \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad ; \quad R_{экв} = R_{14} + R_{23}$$

$$I_1 = \frac{E}{R_{экв}} \quad ; \quad I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad ; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Проверка: $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_1^2 R_4 = E I_1$

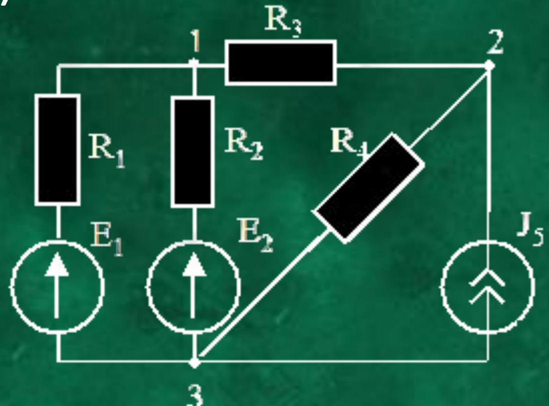


3.2.2. Метод непосредственно применения законов Кирхгофа.

Алгоритм расчета.

Выбирают произвольное положительное направление искомых токов в ветвях и обозначают их на схеме.

Число неизвестных токов равно числу всех ветвей схемы без учета ветвей содержащих источники тока, т.к. токи в ветвях, содержащих источники тока, известны – (в – $в_{ит}$).



- ветвей в=5;
- ветвей с источниками тока $в_{ит}$=1;
- узлов у=3.

2. Составляют уравнение по 1-му закону Кирхгофа для (у-1) узлов схемы, с учетом токов от источников тока, где у – число узлов схемы. Уравнение для последнего узла не составляют, т.к. оно совпало бы с уравнением, полученным при суммировании уже составленных уравнений для предыдущих узлов (т.е. линейно-независимых уравнений – (у-1)). При составлении уравнений следуют правилу: если ток выходит из узла, то его записывают со знаком (+), если входит – то со знаком (-).

В рассматриваемом примере:

$+I_1-I_2-I_3=0$ (для узла 1);

$-I_1+I_2-I_4+J=0$ (для узла 3).

3. Составляют [(в - $в_{ит}$) - (у - 1)] уравнений по 2 закону Кирхгофа для независимых контуров.

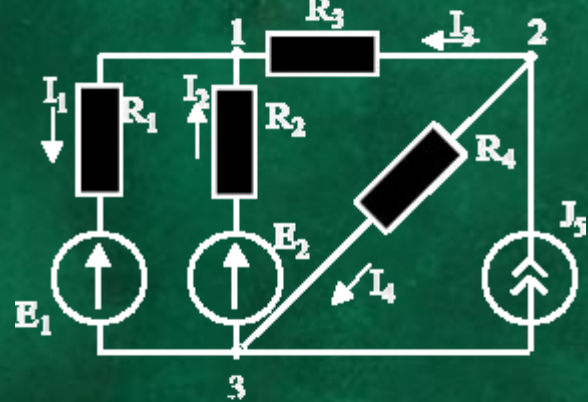
3.1. Выбирают независимые контуры.

а) Их число равно [(в - $в_{ит}$) - (у - 1)];

б) Независимый контур (обход) – контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры.

в) При выборе контуров ветви с источником тока исключаются (в противном случае при составлении уравнений в них вошли бы бесконечно большие слагаемые и они не имели бы смысла ($E=\infty$; $R=\infty$)).

3.2. Выбирают положительное направление обхода контуров (обычно по часовой стрелке).



3.3. При составлении уравнений следуют правилу: если направление тока и э.д.с. на элементе совпадает с направлением обхода, то падение напряжения и э.д.с. записывают со знаком (+), если не совпадает, то со знаком (–).

В рассматриваемом примере:

$-I_1R_1-I_2R_2=E_1-E_2$ (для независимого контура E_1□ R_1□ R_2□ E_2);

$+I_2R_2-I_3R_3+I_4R_4=E_2$ (для независимого контура E_2□ R_2□ R_3□ R_4).

4.Решают тем или иным методом полученную систему линейных алгебраических уравнений.

В рассматриваемом примере:

$$\begin{cases} +I_1-I_2-I_3=0 \\ -I_1+I_2-I_4+J=0 \\ -I_1R_1-I_2R_2=E_1-E_2 \\ +I_2R_2-I_3R_3+I_4R_4=E_2 \end{cases}$$

5.На основании полученного решения проставляют на схеме реальное положительное направление токов в ветвях.

6.Проверяют правильность полученного решения с помощью энергобаланса или (и) потенциальной диаграммы:

$$\sum_i I_i^2 R_i = \sum_j \pm E_j I_j + \sum_k \pm J_k U_k$$

В рассматриваемом примере:

$$I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4= -E_1I_1+E_2I_2+J_5U_{23}$$

3.2.3. Метод контурных токов

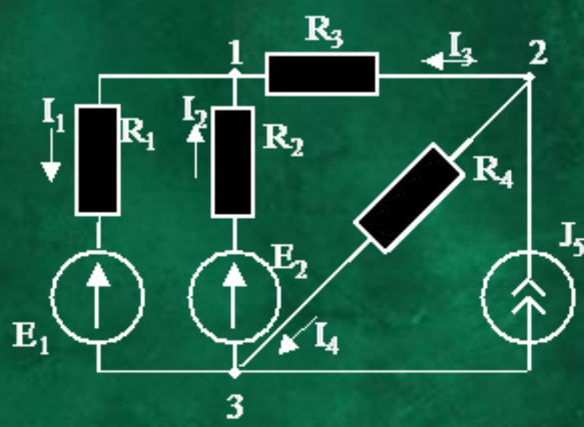
Метод основан на введении промежуточной неизвестной величины – контурного тока и использовании 2 закона Кирхгофа.

Контурный ток – собственный ток каждого независимого контура.

Реальный ток в ветвях определяется как алгебраическая сумма соответствующих контурных токов. Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа, т.е. числу независимых контуров $[(в - в_{ит}) - (у - 1)]$.

<u>Алгоритм расчета</u> (после вывода расчетных уравнений по 2 закону Кирхгофа):

1.Проставляют направления контурных токов на расчетной схеме. Для единообразия в знаках сопротивлений все контурные токи направляют в одну и ту же сторону (например, по часовой стрелке).



2.Для каждого независимого контура (ячейки) составляют расчетное контурное уравнение *согласно правилу:* левая часть равна сумме произведений контурного тока на собственное сопротивление этого контура, взятых со знаком плюс, и контурных токов прилегающих контуров на сопротивления смежных ветвей, взятых со знаком минус: правая часть равна алгебраической сумме э.д.с. этого контура – контурной э. д.с.

Примечание

При наличии ветвей с источниками тока либо источники тока преобразуют в эквивалентные источники э.д.с.; либо рассматривают контурный ток контура, в который входит ветвь с источником тока, как известный и равный току этого источника тока. Уравнения составляют лишь для контуров с неизвестными контурными токами.

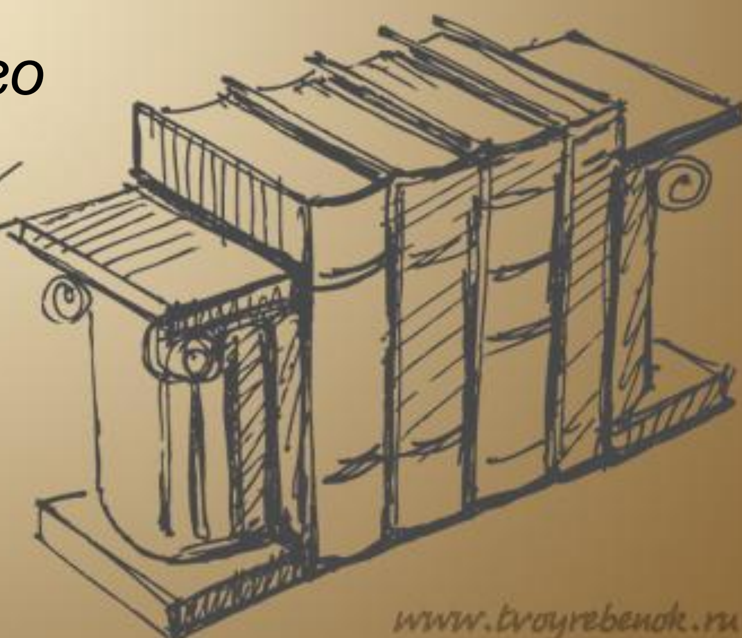
Напряжение на элементе от тока источника тока записывается в правой части уравнения со знаком (+), если направление обхода совпадает с направлением этого контурного тока

(противоположно направлению этого

тока на элементе).

В рассматриваемом примере:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1+R_2)-I_{22}R_2=E_1-E_2 \\ -I_{11}R_2+I_{22}(R_2+R_3+R_4)+JR_4=E_2 \end{cases}$$



для контуров E_1 □ R_1 □ R_2 □ E_2 и E_2 □ R_2 □ R_3 □ R_4

3.Решают тем или иным методом полученную систему линейных алгебраических уравнений.

4.На основании полученного решения определяют величину и направление реальных токов в ветвях, *для чего:*

-в расчетной схеме изменяют на противоположное направление контурного тока, полученного со знаком минус;

-в ветвях внешнего контура расчетной схемы найденный контурный ток является действительным током ветви;

-в смежных ветвях реальный ток ветви определяют алгебраической суммой контурных токов смежных контуров, в том числе и от источников токов: *при этом направление тока в ветви совпадает по направлению с общим по величине контурным током.*

В рассматриваемом примере: $I_1=-I_{11}$; $I_2=-I_{11}+I_{22}$; $I_3=-I_{22}$; $I_4=I_{22}+J$

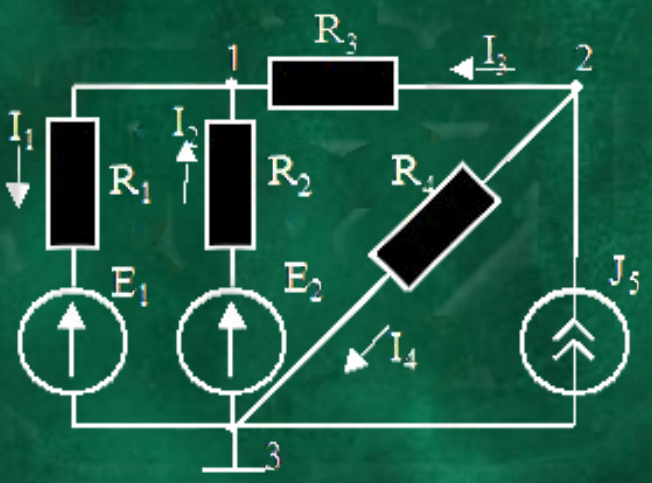
5.Проверяют *правильность полученного решения* с помощью энергобаланса или (и) потенциальной диаграммы.

3.2.4. Метод узловых потенциалов

Метод основан на введении промежуточной неизвестной величины – потенциала узла и использовании 1-го закона Кирхгофа. Если будут известны потенциалы узлов схемы, то ток в любой ветви можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего э.д.с., т.к. *любая точка схемы* может быть заземлена без изменения токораспределения в ней (т.е. её потенциал можно принять равным нулю). В этом случае число неизвестных составляет (у-1) (т.е. равно числу независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа).

Алгоритм расчета (после вывода расчетных уравнений по 1-му закону Кирхгофа):

1.Принимают потенциал одного из узлов равным 0.



2.Составляют уравнение для каждого из оставшихся (у-1) узлов *согласно правилу:* левая часть уравнения равна сумме произведений потенциала рассматриваемого узла на сумму проводимостей всех ветвей, сходящихся в этом узле, взятое со знаком плюс, и потенциалов остальных узлов на сумму проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы с рассматриваемым узлом, взятые со знаком минус;

правая часть уравнения равна алгебраической сумме произведений э.д.с. ветвей, сходящихся в рассматриваемом узле на проводимости этих ветвей (так называемый узловой ток рассматриваемого узла). При этом произведения берутся со знаком плюс, если э.д.с. направлены к рассматриваемому узлу.

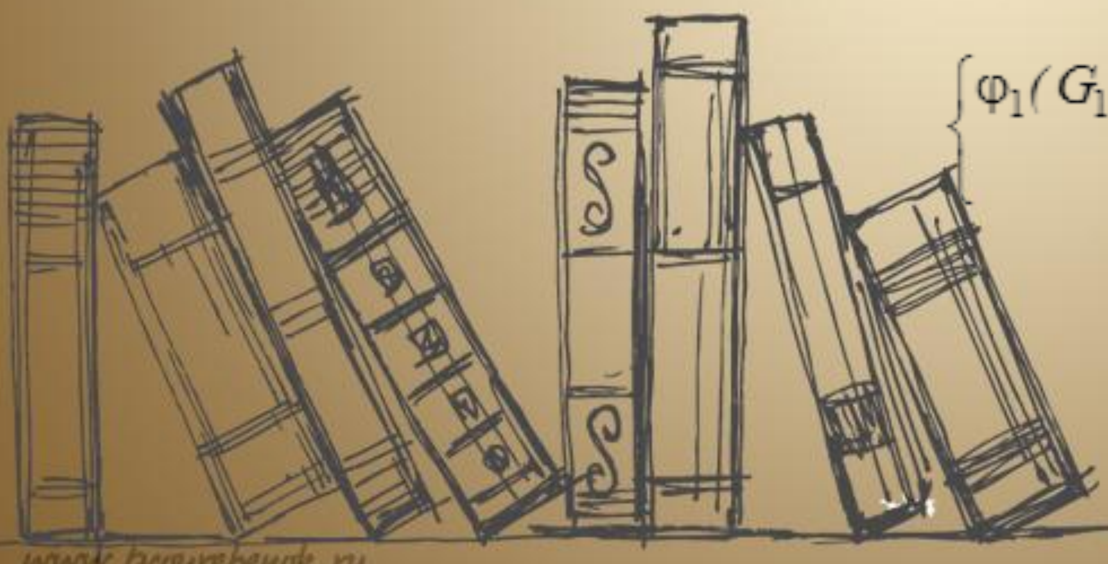
<u>Примечание</u>

При наличии ветвей с источником тока необходимо учесть следующее:

-проводимость ветви с источником тока равна пулю;

-в правую часть уравнения добавляется алгебраическая сумма токов от источников тока в ветвях, сходящихся в рассматриваемом узле. При этом ток источника тока берется со знаком плюс, если он направлен к рассматриваемому узлу.

В рассматриваемом примере:



$$\begin{cases} \varphi_1(G_1+G_2+G_3)-\varphi_2G_3=E_1G_1-E_2G_2 \\ -\varphi_1G_3+\varphi_2(G_3+G_4)=J \end{cases}$$

(для узлов 1 и 2).

3.Решают тем или иным способом полученную систему линейных алгебраических уравнений.

4.На основании полученного решения определяют величину и направление токов в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего э.д.с.

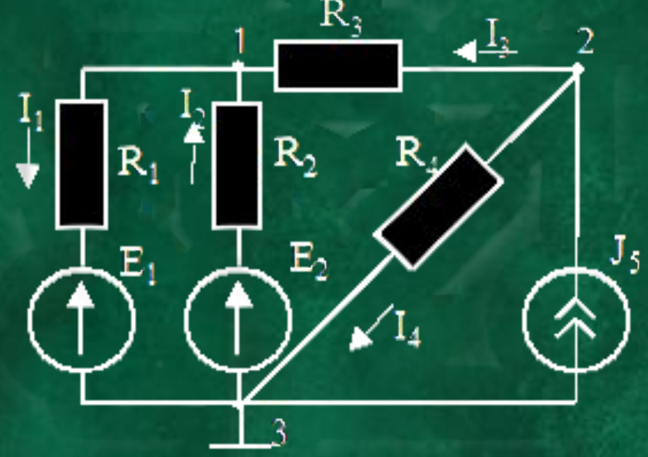
В рассматриваемом примере:

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1};\; I_2 = -\frac{\varphi_1}{R_2};\; I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_3};\; I_4 = \frac{\varphi_2}{R_4}$$

5.Проверяют *правильность полученного решения* с помощью баланса мощностей или (и) потенциальной диаграммы.

Метод двух узлов

Этот метод является частным случаем метода узловых потенциалов.



Алгоритм расчета

1.Принимают потенциал одного из узлов равным нулю. Проставляют условно-положительные направления напряжения между узлами и токов в ветвях.

2.Определяют величину и реальное положительное направление напряжения между узлами *по формуле:*

$$U_{12} = \frac{\pm\sum E_k G_k \pm \sum J_k}{\sum G_k}$$

При этом узловые токи $\Sigma E_k G_k$ и ΣJ_k берутся *со знаком плюс*, если э.д.с. и ток источника тока направлены к узлу с условно взятым большим потенциалом.

3.Определяют величины и направления токов в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего э.д.с.

4.Проверяют правильность полученного решения с помощью энергобаланса или (и) потенциальной диаграммы.

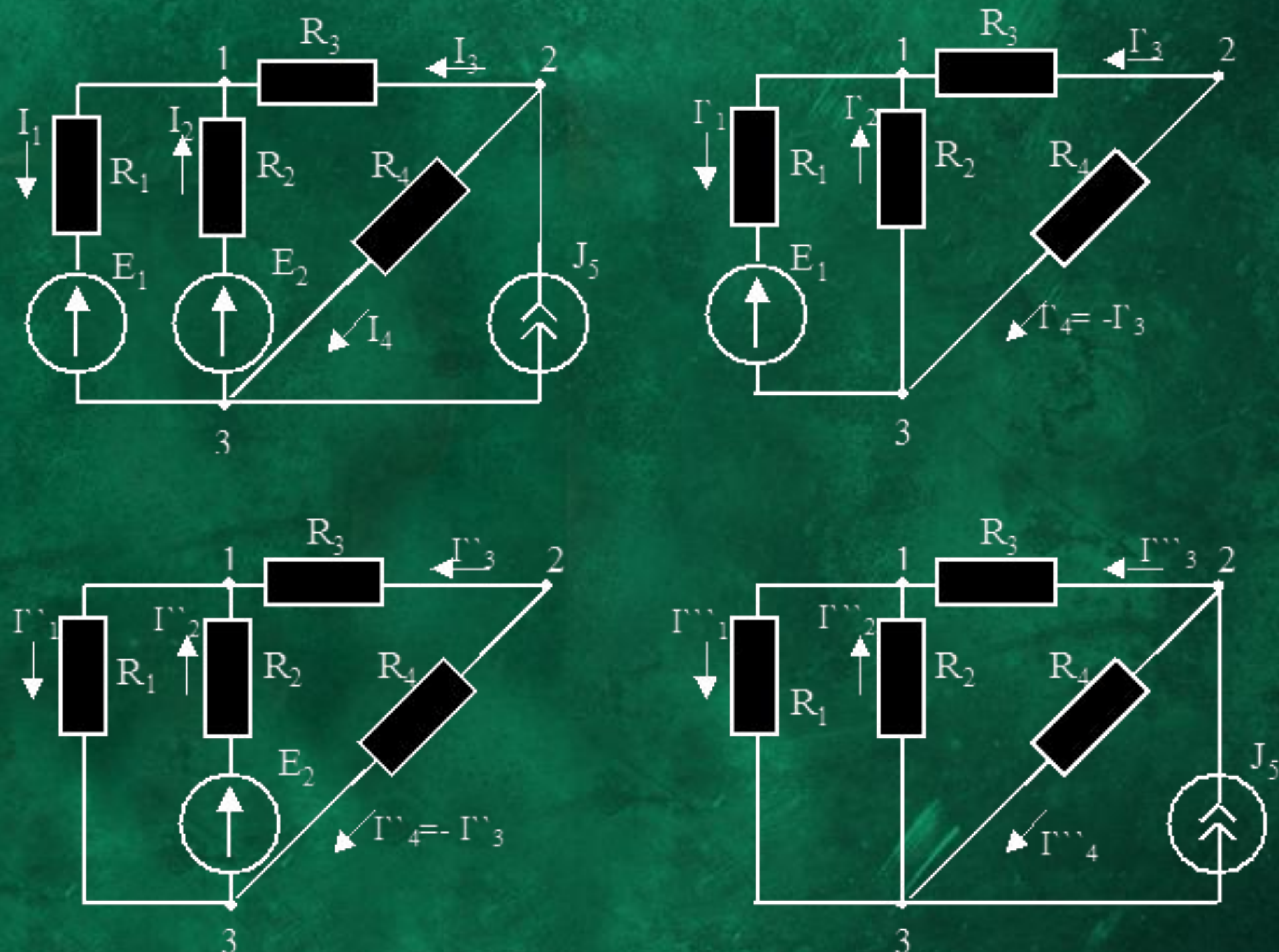
3.2.5. Метод суперпозиции (наложения)

Метод наложения основывается на общефизическом принципе независимости действия сил в линейной системе (принцип наложения).

В частности, для электрических цепей *принцип наложения формулируется так*: ток в каждой ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из источников линейной электрической цепи в отдельности.

Алгоритм расчета

1.Рассчитывают величину и направление *частичных токов во всех ветвях* электрической цепи, возникающих от действия каждого из источников в отдельности при удалении в цепи всех остальных источников (э.д.с. и токов). При этом в расчетной схеме остаются *внутреннее сопротивление* удаленных источников э.д.с. Ветви с источниками токов из схемы исключаются, т.к. их внутреннее сопротивление равно бесконечности.



R3
I3
1
2
I1
R1
I2
R2
R4
E1
E2
J5
I4
3
R3
I`3
1
2
I`1
R1
I`2
R2
R4
E1
I`4= -I`3
3
R3
I``3
1
2
I``1
R1
I``2
R2
R4
E2
I``4=- I``3
3
R3
I```3
1
2
I```1
R1
I```2
R2
R4
J5
I```4
3

2.Находят *величины и направления токов* в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов.

В рассматриваемом примере:

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1'''$$
$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2'''$$
$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3'''$$
$$I_4 = I_4' + I_4'' + I_4'''$$

3.Проверяют *правильность полученного решения* с помощью энергобаланса или (и) потенциальной диаграммы.

3.2.6. Метод эквивалентного генератора

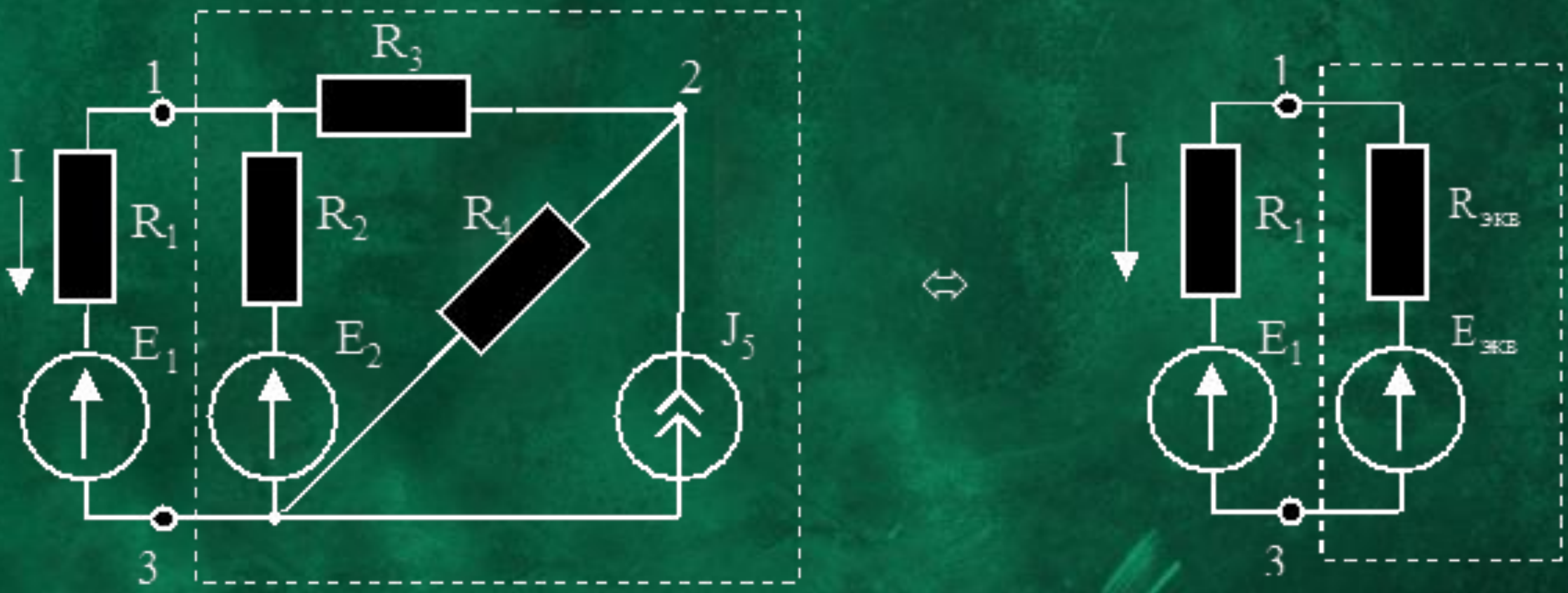
Метод *основан на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором* и служит для расчета тока в отдельной ветви.

В любой электрической цепи можно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы независимо от ее структуры и сложности можно рассматривать по отношению к выделенной ветви как двухполюсник – активный или пассивный.

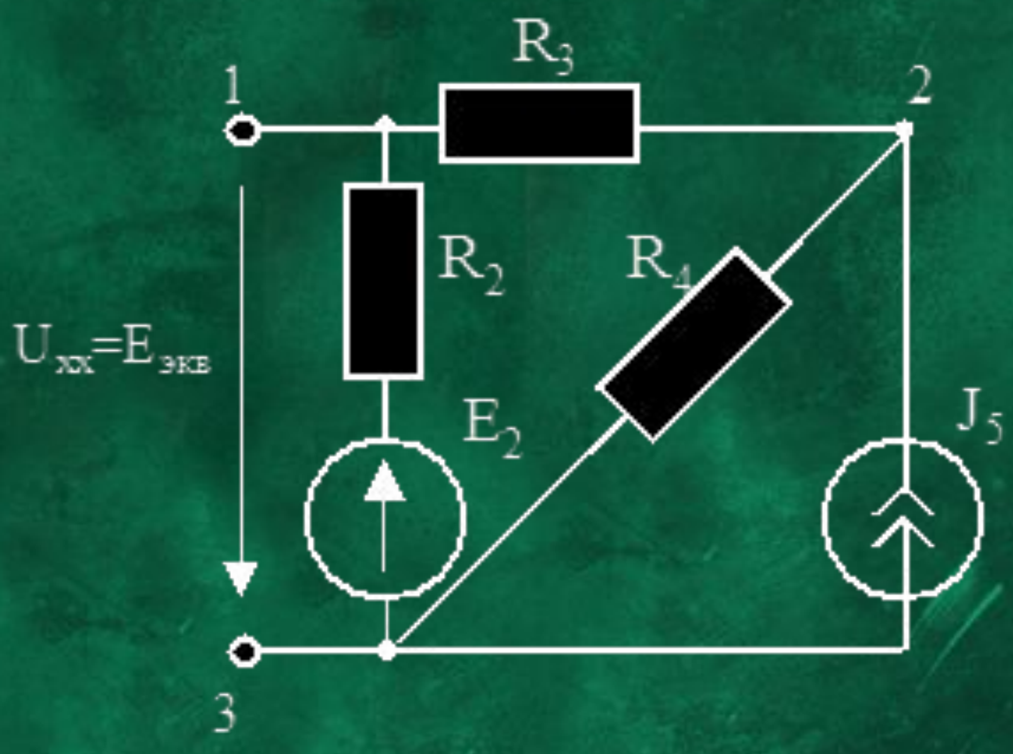
Теорема об активном двухполюснике – по отношению к выделенной ветви двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором, э.д.с. которого равна напряжению холостого хода (на зажимах выделенной ветви двухполюсника), а внутреннее сопротивление равно входному внутреннему эквивалентному сопротивлению двухполюсника.

Алгоритм расчета

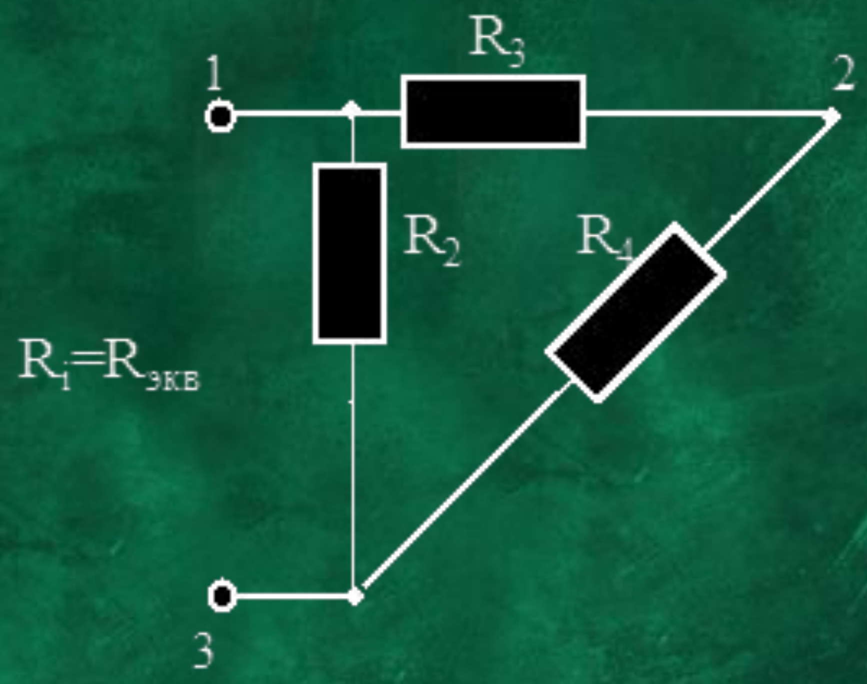
1.Выделяют двухполюсник по отношению к ветви, для которой рассчитывается ток.



2.Тем или иным методом рассчитывают величину и полярность напряжения на зажимах двухполюсника при отключенной рассчитываемой ветви – *напряжение холостого хода двухполюсника* (э.д.с. эквивалентного генератора).



3.Определяют входное (внутреннее) сопротивление двухполюсника при закороченных источниках э.д.с. и разомкнутых ветвях с источниками тока (т.к. внутреннее сопротивление источников тока равно бесконечности) как эквивалентное сопротивление внутренней схемы двухполюсника по отношению к его выходным зажимам.



4.Рассчитывают искомый ток ветви

$$I = \frac{E_{экв} \pm E}{R_i + R}$$

5.Метод эквивалентного генератора эффективен при опытном определении входного внутреннего сопротивления активного двухполюсника.

1.Измеряют Uxx при разомкнутой ветви $U_{XX}=E_{ЭКВ}$

2.Измеряют Iкз при закороченной ветви Iкз =Еэкв/Ri

3.Определяют Ri=Uxx/Iкз

Метод эквивалентного генератора называют также методом ХХ и КЗ (холостого хода и короткого замыкания).

3.3. Матричные методы анализа электрических цепей.

Рассмотренные ранее методы анализа сложных цепей (метод непосредственного применения законов Кирхгофа – МНЗК, метод контурных токов – МКТ, метод узловых потенциалов – МУП) представляют собой методы составления системы уравнений цепи, т.е. методы получения математической модели цепи.

Для выполнения анализа процессов в цепи эта система должна быть решена относительно искомых величин (токов).

В случае традиционного (развернутого) метода составления и записи уравнений системы наиболее распространенными способами решения системы уравнений являются:

–формула Крамера, т.е. непосредственное раскрытие определителей ($n<5$, т.к. число арифметических операций при этом равно $n \cdot n!$; при $n=5$, число операций 600).

–метод исключения по Гауссу ($n<1000$, т.к. число

	Метод Крамера $n \cdot n!$	Метод Гаусса $2 \cdot n^3$
n=2	4	16
n=3	18	54
n=4	96	128
n=5	600	250
n=6	4320	432

Использование метода Гаусса при n>1000 нецелесообразно, т.к.
а) при n=1000 число операций равно 2·109 и ЭВМ с быстродействием 106 операций в секунду будет решать такую задачу 33 мин;
б) метод Гаусса (как и формула Крамера) дает точное решение задачи, однако при использовании ЭВМ неизбежны ошибки округления, а потому при большом числе уравнений полученное решение может заметно отличаться от точного;

в) существенным параметром вычислительного процесса является и число используемых ячеек памяти, которое при n=1000 достигает 106.

Особенность развития современных электрических цепей является:

–увеличение количества элементов в цепях (ЭВМ, преобразовательная техника);

–широкое применение ЭВМ для расчетов электрических цепей, что требует формализации записи уравнений, умения составлять экономичные алгоритмы.

В этом смысле широкое распространение получил матричный метод записи и решения систем линейных алгебраических уравнений.

Матрица – совокупность величин (элементов), расположенных в виде прямоугольной таблицы.

Математическая символика и правила матричной алгебры позволяют:

1) Упростить, сократить запись систем уравнений, получающихся при расчете сложных электрических цепей;

2) Упорядочить решение систем уравнений;

3) Аналитически описать топологические свойства электрической цепи и использовать их для машинного анализа проектирования электрических цепей;

4) Решение системы уравнений в матричной форме сводится *к нахождению обратной матрицы сопротивлений (ее обращению) и умножению ее на матрицу-столбец контурных э.д.с.* (свободных членов уравнений) в соответствии с правилами матричной алгебры;

5) Обращение матрицы есть довольно большой по объему вычислений процесс, однако эффективность нахождения решения системы уравнений в матричной форме резко возрастает, если требуется решить несколько линейных систем уравнений с одной и той же матрицей параметров [A] (сопротивлений) и различными свободными столбцами (меняются источники).

Пример:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \cdots + R_{1n}I_{nn} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \cdots + R_{2n}I_{nn} = E_{22} \\ \qquad\qquad \cdots \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \cdots + R_{nn}I_{nn} = E_{nn} \end{cases} \quad \square \quad \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \cdots \\ I_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \cdots \\ E_{nn} \end{bmatrix}$$

[R] x [I] = [E] □

[I] = $[R]^{-1}$ [E] – метод контурных токов в матрично-топологической форме.

3.3.1. Матрично-топологический метод анализа электрических цепей

Свойства любой электрической цепи определяются ее *структурой и параметрами* ее элементов и изображаются в виде схемы электрической цепи.

Топология занимается изучением свойств цепи в зависимости только от ее структуры.

Структуру исследуемой схемы электрической цепи отражает *граф электрической схемы* – условное изображение схемы электрической цепи, в котором ветви схемы представлены отрезками-ветвями графа, а узлы точками – узлами графа (ГОСТ 19874).

Таким образом, узлы и ветви графа соответствуют узлам и ветвям электрической схемы.

Свойства графа, а, следовательно, свойства структуры электрической цепи, могут быть описаны *аналитическим* или *геометрическим* способами.

Матрично-топологический метод основывается на применении матричной алгебры.

При чисто геометрическом описании топологии цепи используют правила по преобразованию графа и правило Мэзана – топологический метод.

Основные топологические понятия и определения.

Топология – изучение свойств любой электрической цепи в зависимости от ее структуры.

Схема электрической цепи – графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединения этих элементов.

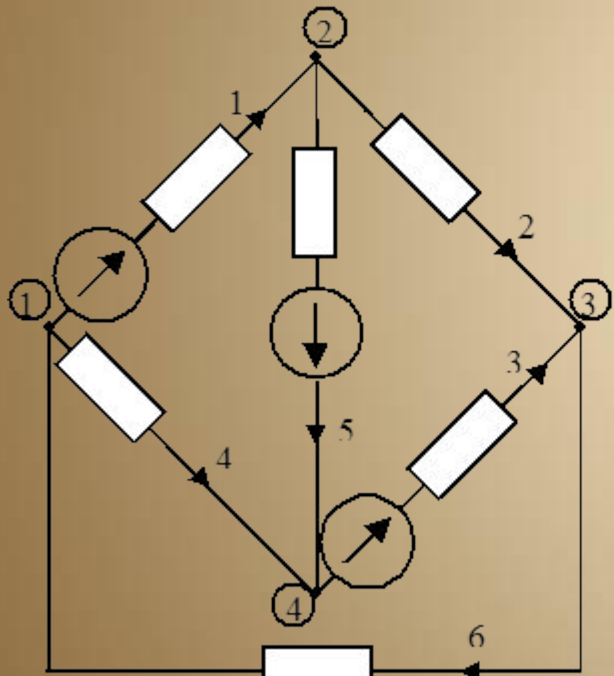
Граф схемы цепи – изображение структуры схемы цепи, в котором ветви схемы представлены отрезками кривых – ветвями графа, а узлы схемы – точками – узлами графа.

Направленный (ориентированный) граф схемы цепи – граф, в котором указаны условно-положительные направления токов ветвей стрелками на ветвях графа.

Примечание

1.При составлении графа ветви, содержащие только идеальные источники э.д.с. или тока, необходимо преобразовывать.

2.Ветвь источника тока в граф не входит.



⇔

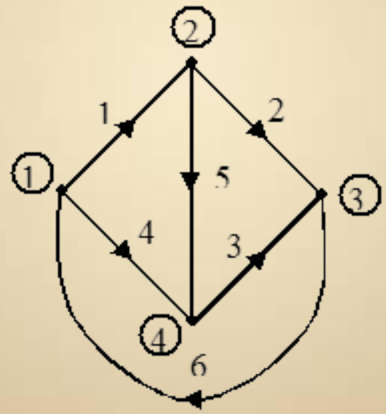
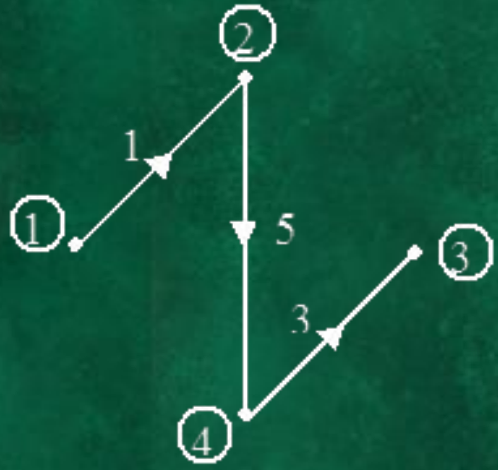


Схема электрической цепи   Граф схемы

Подграф схемы – часть графа схемы: дерево, связи, главный контур, главное сечение.

Дерево графа – любая совокупность ветвей графа, соединяющая все его узлы без образования контура – число ветвей дерева (у–1).



Связь – ветвь графа, не принадлежащая выбранному дереву графа – число связей [в–(у–1)].

Контур – замкнутая цепь из нескольких ветвей.

Главный (независимый) контур – контур, образованный ветвями дерева и только одной ветвью связи.

Ветви связи – 2, 4, 6
Ветви дерева – 1, 3, 5

Нумерация главных контуров определяется нумерацией входящих в них ветвей связи.
За положительное направление обхода главного контура принимается направление ветвей связи, входящей в этот контур.

Сечение графа – поверхность, охватывающая совокупность узлов и ветвей графа и рассекающая граф схемы на два изолированных подграфа (на две части).

Главное сечение – сечение, рассекающее только одну ветвь дерева.

Нумерация главных сечений соответствуют номеру ветви дерева, пересекаемому сечением.

За положительное направление сечения принимается направление ветви дерева, пересекаемой сечением.

Путь графа – непрерывная последовательность ветвей, проходящих не более одного раза через любой узел графа.

Топологические матрицы

Структура графа может быть описана в алгебраической форме, в виде таблиц чисел – топологических матриц.

Используют матрицы соединений, контурную матрицу, матрицу главных сечений – топологические матрицы.

Зная матрицы графа можно легко построить сам граф цепи, а, следовательно, и саму цепь.

Такое построение графа цепи и, соответственно, определение её структуры может быть произведено с помощью ЭВМ, в память которой заложены топологические матрицы.

Если при этом машинное описание цепи содержит такие параметры элементов цепи, то по заданной программе ЭВМ может производить любые расчеты для цепи заданной структуры.

Матрица соединений (узловая, структурная)

Для описания структуры графа в алгебраической форме, составим прямоугольную матрицу, у которой:

–строки матрицы соответствуют узлам графа;

–столбцы матрицы соответствуют ветвям графа;

–элементы матрицы:

(+1), если ветвь направлена от узла;

(–1), если ветвь направлена к узлу;

(0), если ветвь не соединяется с узлом

$A_n =$

узлы / ветви	1	2	3	4	5	6
1	+1	0	0	+1	0	−1
2	−1	+1	0	0	+1	0
3	0	−1	−1	0	0	+1
4	0	0	+1	−1	−1	0

– это полная матрица соединений направленного графа схемы

Узел, соответствующий вычеркнутой строке – базисный.
Полученная матрица – узловая, независимая

$$
A = \begin{array}{c|cccccc}
\text{узлы} / \text{ветви} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\
2 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1
\end{array}
$$

– узловая матрица (независимая матрица соединений, структурная матрица).

3.3.2. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа в матрично-топологической форме

Запись 1-го закона Кирхгофа с помощью топологических матриц

С помощью топологических матриц можно описывать не только структуру цепи, но и основные законы токопрохождения, связанные с топологическими свойствами цепи (законы Кирхгофа).

Для описания этих законов в топологической форме вводят понятия матриц-столбцов токов и напряжений, а также нулевой матрицы-столбца:

$$\underset{в\times1}{[I]} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_в \end{bmatrix}; \quad \underset{в\times1}{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_в \end{bmatrix}; \quad \underset{в\times1}{[0]} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_в \end{bmatrix}$$

Если перемножить узловую матрицу и матрицу токов, то получил новую матрицу-столбец, у которой каждая строка равна алгебраической сумме токов, сходящихся в узлах 1,2,3:

$$\underset{(y-1)\times в}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}} \times \underset{в\times1}{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_в \end{bmatrix}} = \underset{(y-1)\times1}{\begin{bmatrix} I_1 + I_4 - I_6 \\ -I_1 + I_2 + I_5 \\ -I_2 - I_3 + I_6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Согласно 1-му закона Кирхгофа эта сумма равна 0, т. е. полученное матричное произведение можно приравнять нулевой матрице.

Или в матричной форме:

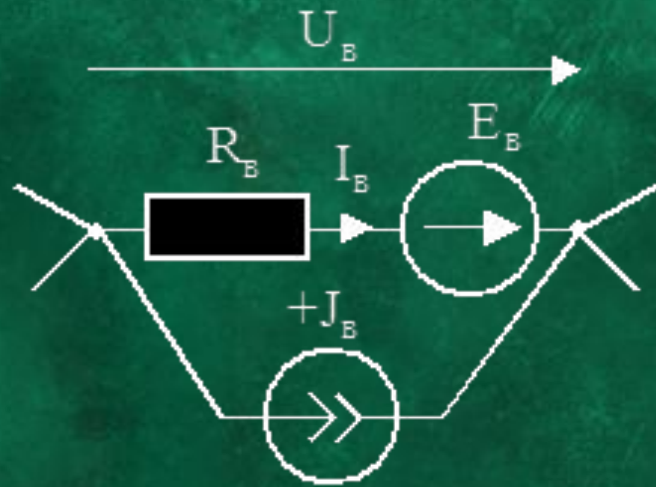
$$\underset{(y-1)\times \text{в}}{[A]} \cdot \underset{\text{в}\times 1}{[I]} = \underset{(y-1)\times 1}{[0]}$$

Однако, в общем случае необходимо *учесть наличие источников тока* в схеме электрической цепи.

Для этого к матрице-столбцу токов ветвей необходимо прибавить матрицу-столбец токов источников тока.

Матрица источников тока – столбцовая, число строк которой равно числу ветвей графа. Токи источников маркируют по номерам ветвей, параллельно которым подключены источники этих токов. Знак тока берут положительным (+), если он ориентирован одинаково с параллельной ему ветвью графа:

$$\underset{в\times 1}{[J]} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_в \end{bmatrix}$$



Обобщенная ветвь

Тогда $\underset{(y-1)\times в}{[A]} \cdot \left\{ \underset{в\times 1}{[I]} + \underset{в\times 1}{[J]} \right\} = \underset{(y-1)\times 1}{[0]}$ или

$$\underset{(y-1)\times в}{[A]} \cdot \underset{в\times 1}{[I]} = - \underset{(y-1)\times в}{[A]} \cdot \underset{в\times 1}{[J]}$$

– 1-й закон Кирхгофа в матрично-топологической форме.

Контурная матрица.

Независимые контуры – контуры, в каждый из которых входит только по одной ветви связи.

Нумерация и направления обхода независимых контуров соответствуют нумерации и направлению входящих в них ветвей связи.

Ветви связи – 2, 4, 6

Контурные матрицы контуров составляют для независимых контуров выбранного дерева.

Число строк контурной матрицы [C] равно числу [в–(у–1)] независимых контуров.

Число столбцов контурной матрицы [C] равно числу ветвей [в].

При составлении матрицы [C] независимые контуры обходят в направлении ветви связи, входящей в этот контур.

При обходе контура в ячейках матрицы [C]:

– ставят (+1), если направление стрелки на какой-либо ветви этого контура совпадает с направлением обхода контура;

– ставят (-1), если направление стрелки на какой-либо ветви этого контура не совпадает с направлением обхода контура;

– ставят 0, ветвь не входит в этот контур.

$$C_{[в-(у-1)]\times в} =$$

независимые контуры / ветви	1	2	3	4	5	6
2	0	+1	−1	0	−1	0
4	−1	0	0	+1	−1	0
6	+1	0	+1	0	+1	+1

Контурная матрица – таблица коэффициентов уравнений, составленных по 2-му закону Кирхгофа.

Запись 2-го закона Кирхгофа с помощью топологических матриц.

Если перемножить контурную матрицу и матрицу напряжений, то получим матричное уравнение, описывающее <u>второй закон Кирхгофа в матричной топологической форме</u>:

$$[C]_{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times \text{в}} \cdot [U]_{\text{в}\times 1} = [0]_{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times 1}$$

Матрица э.д.с. – столбцовая матрица, число строк которой равно числу ветвей графа.

Э.д.с. Е записывают с положительным знаком, если её направление совпадает с выбранным направлением ветви (токи ветвей):

$$\underset{в\times 1}{[E]} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_в \end{bmatrix}$$

Произведение [C]x[E] – алгебраическая сумма э.д.с.

Матрица сопротивлений ветвей – квадратная, по её диагонали записывают собственные сопротивления ветвей:

$$\underset{в\times 1}{[R]}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_в \end{bmatrix}$$

Если же выразить напряжения на участках как произведения токов ветвей на сопротивления этих ветвей, то получим запись 2-го закона Кирхгофа в матрично-топологической форме:

$$\underset{[в-(y-1)]\times в}{[C]}\cdot\underset{в\times в}{[R]}\cdot\underset{в\times 1}{[I]}=\underset{[в-(y-1)]\times в}{[C]}\cdot\underset{в\times 1}{[E]}$$

Алгоритм расчета электрической цепи по законам Кирхгофа в матрично-топологической форме:

1.Выбирают произвольное положительное направление искомых токов в ветвях и обозначают их на схеме.

2.Составляют матрицы параметров схемы электрической цепи.

Матрицу э.д.с.: $$\underset{в\times 1}{[E]} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_в \end{bmatrix}$$

Матрицу токов источников тока:

$$\underset{в\times1}{[J]} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_в \end{bmatrix}$$

Матрицу сопротивления ветвей:

$$\underset{в\times1}{[R]} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_в \end{bmatrix}$$

3.Изображают граф схемы электрической цепи и одно из деревьев графа и составляют для них *узловую* и *контурную* топологические матрицы [A] и [C].

4.Подставляют полученные матрицы в матричное топологическое уравнение по законам Кирхгофа и решают его относительно искомых токов:

$$\begin{bmatrix} \underset{(y-1)\times \text{в}}{[A]} \\ \underset{[\text{в}-(y-1)]\times \text{в}}{[C]} \cdot \underset{\text{в}\times \text{в}}{[R]} \end{bmatrix} \times \underset{\text{в}\times 1}{[I]} = \begin{bmatrix} -\underset{(y-1)\times \text{в}}{[A]} \cdot \underset{\text{в}\times 1}{[J]} \\ \underset{[\text{в}-(y-1)]\times \text{в}}{[C]} \cdot \underset{\text{в}\times 1}{[E]} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{в}\times 1}{[I]} = \begin{bmatrix} \underset{(y-1)\times \text{в}}{[A]} \\ \underset{[\text{в}-(y-1)]\times \text{в}}{[C]} \cdot \underset{\text{в}\times \text{в}}{[R]} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\underset{(y-1)\times \text{в}}{[A]} \cdot \underset{\text{в}\times 1}{[J]} \\ \underset{[\text{в}-(y-1)]\times \text{в}}{[C]} \cdot \underset{\text{в}\times 1}{[E]} \end{bmatrix}$$

5.Проверяют *правильность полученного решения* с помощью баланса мощности или (и) и топографической диаграммы.

3.3.3. Матрично-топологическая форма метода контурных токов

Для одного из деревьев графа вводятся контурные токи независимых контуров.

Направление контурных токов берут совпадающим с направлением связей графа.

Ветви связи – 2, 4, 6

Можно показать, что матрица-столбец токов ветвей [I] может быть записана через матрицу-столбец контурных токов [$I_{кк}$] и транспонированную контурную матрицу [C] ^{T}:

$$\underset{\text{в}\times 1}{[I]} = \underset{\text{в}\times[\text{в}-(\text{у}-1)]}{[C]^{T}} \cdot \underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times 1}{[I_{kk}]} - \underset{\text{в}\times 1}{[J]}$$

При этом:

$$\left\{\underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times\text{в}}{[R]} \times \underset{\text{в}\times[\text{в}-(\text{у}-1)]}{[C]^{T}}\right\} \times \underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times 1}{[I_{kk}]} = \underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times 1}{[E]} + \underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times\text{в}}{[R]} \times \underset{\text{в}\times 1}{[J]}$$

$$\underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times 1}{[I_{kk}]} = \left\{\underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times\text{в}}{[R]} \times \underset{\text{в}\times[\text{в}-(\text{у}-1)]}{[C]^{T}}\right\}^{-1} \times \left\{\underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times 1}{[E]} + \underset{[\text{в}-(\text{у}-1)]\times\text{в}}{[C]} \times \underset{\text{в}\times\text{в}}{[R]} \times \underset{\text{в}\times 1}{[J]}\right\}$$

или $\underset{[в-(у-1)]\times 1}{[I_{kk}]} = \underset{[в-(у-1)]\times[в-(у-1)]}{[R_{kk}]}^{-1} \times \underset{[в-(у-1)]\times 1}{[E_{kk}]}$

где $\underset{[в-(у-1)]\times[в-(у-1)]}{[R_{kk}]} = \underset{[в-(у-1)]\times в}{[C]} \times \underset{в\times в}{[R]} \times \underset{в\times[в-(у-1)]}{[C]^T}$

– квадратная матрица контурных сопротивлений: по диагонали собственные сопротивления контуров, остальные элементы – смежные сопротивления соответствующих контуров:

$$\underset{[в-(у-1)]\times[в-(у-1)]}{[R_{kk}]} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix}$$

$\underset{[в-(у-1)]\times 1}{[E_{kk}]} = \underset{[в-(у-1)]\times в}{[C]} \times \underset{в\times 1}{[E]} + \underset{[в-(у-1)]\times в}{[C]} \times \underset{в\times в}{[R]} \times \underset{в\times 1}{[J]}$ – матрица-столбец контурных э.д.с.

Алгоритм расчета электрической цепи по методу контурных токов в матрично-топологической форме:

1.Выбирают произвольное положительное направление токов в ветвях и обозначают их на схеме.

2.Составляют матрицы параметров [R], [E], [J].

3.Изображают граф схемы контурных токов [Ikk] и одно из деревьев графа и составляют для них контурную топологическую матрицу [C].

4.Подставляют полученные матрицы в матрично-топологическое уравнение по методу контурных токов и решают его.

5.Определяют токи в ветвях.

6.Проверяют правильность полученного решения с помощью баланса мощности и (или) топографической диаграммы.

3.3.4. Матрично-топологическая форма метода узловых потенциалов.

Можно показать, что матрица напряжений обобщенных ветвей [U] равна матричному произведению транспонированной узловой матрицы $[A]^T$ и матрицы-столбца потенциалов узлов [ϕ]:

$$\underset{в\times 1}{[U]} = \underset{в\times(y-1)}{[A]^T} \times \underset{(y-1)\times 1}{[\varphi_y]}$$

При этом $$\underset{(y-1)\times 1}{[I_y]} = \underset{(y-1)\times(y-1)}{[G_y]} \times \underset{(y-1)\times 1}{[\varphi_y]}$$

где [Gу] – *квадратная матрица узловых проводимостей*

$$\underset{(y-1)\times(y-1)}{\left[G_y\right]} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(y-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2(y-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{(y-1)1} & G_{(y-1)2} & \cdots & G_{(y-1)(y-1)} \end{bmatrix}$$

[Iу] – *матрица–столбец узловых токов*.

Тогда, по закону Ома: $\underset{в\times 1}{[I]} = \underset{в\times в}{[G_в]} \times \left\{ \underset{в\times(y-1)}{[A]^T} \times \underset{(y-1)\times 1}{[\varphi_y]} + \underset{в\times 1}{[E]} \right\}$

где [Gв] – *квадратная матрица проводимостей ветвей*:

$$\underset{в\times 1}{[G_в]} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_в \end{bmatrix}$$

При этом

$$\left\{ \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times e}{[G_e]} \times \underset{e\times(y-1)}{[A]^T} \right\} \times \underset{(y-1)\times 1}{[\varphi_y]} = -\left\{ \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times e}{[G_e]} \times \underset{e\times 1}{[E]} + \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times 1}{[J]} \right\}$$

$$\underset{(y-1)\times 1}{[\varphi_y]} = -\left\{ \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times e}{[G_e]} \times \underset{e\times(y-1)}{[A]^T} \right\}^{-1} \times \left\{ \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times e}{[G_e]} \times \underset{e\times 1}{[E]} + \underset{(y-1)\times e}{[A]} \times \underset{e\times 1}{[J]} \right\}$$

Алгоритм расчета электрической цепи по методу узловых потенциалов в матрично-топологической форме:

1. Выбирают произвольное положительное направление токов в ветвях и обозначают их на схеме.
2. Составляют матрицы параметров [Gв], [E], [J].
3. Изображают граф и составляют матрицу [A].
4. Решают уравнение в матрично-топологической форме по методу узловых потенциалов.
5. Определяют токи в ветвях.
6. Проверяют правильность полученного решения с помощью баланса мощности и (или) топографической диаграммы.