Государственное казённое образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ ТАМОЖЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра таможенной статистики

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине «Математический анализ»

Теоремы о существовании и гладкости неявных функций и их геометрическая интерпретация. Формулы для частных производных и дифференциалов неявных функций. Теоремы о существовании и гладкости обратной функции как частный случай теоремы о неявной функции. Экономическая иллюстрации теоремы о неявной функции.

Выполнил: А.А. Чалиенко, студент 1-го курса очной формы обучения экономического факультета, группа Э123-б

План

1. **Функция**
2. **Область определения функции**
3. **Неявная функция**
4. **Теорема о существовании гладкости неявных функций**
5. **Гладкие функции (Геометрические интерпретации)**
6. **Частные производные**
7. **Дифференциал функции**

Понятие функции

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области экономики, области социальных наук или другой области знаний, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.

Переменная величина при выполнении некоторого комплекса условий может принимать различные значения.

Постоянная величина при выполнении некоторого комплекса условий сохраняет одно и то же значение.

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x.,y, z, u, v, w), а постоянные — первыми (a, b, c).

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величии, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Термин «функция» происходит от латинского слова functio — исполнение, осуществление. Задать функцию — значит задать три объекта: 1) множество X, 2) множество У, 3) правило f.

Определение. Соответствие f, при котором каждому значению x из множества X соответствует единственное значение y из множества У называется функцией, заданной на множестве X и принимающей значения из множества *У*.

Область определения функции

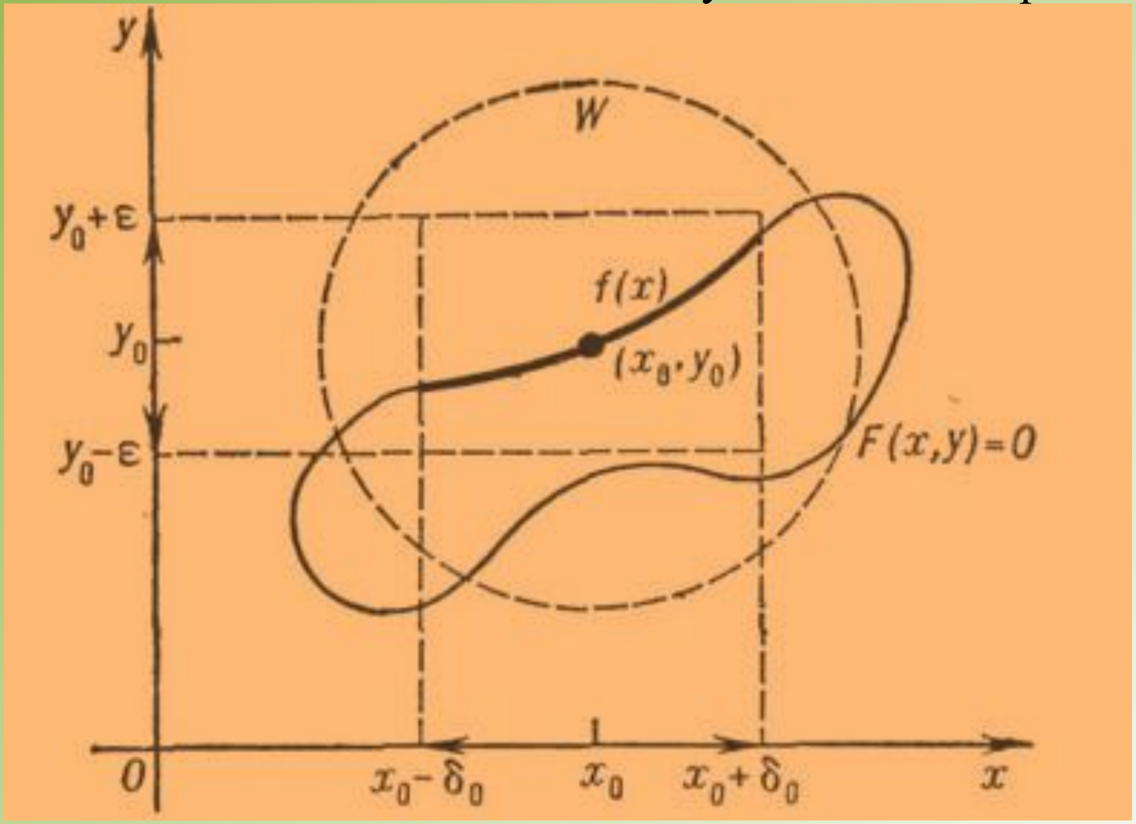
Переменная величина $z = f(x, y)$ называется функцией двух переменных х и у, если для каждой пары значений (х, у) из некоторой области D существует единственное значение z. Аналогично определяются функции трех и большего числа переменных. Под областью определения D функции $z = f(x, y)$ понимается совокупность точек (х, у) плоскости ХОУ, в которых данная функция определена, т.е. для этих точек существует значение выражения $z = f(x,y)$. Область определения функции представляет собой часть координатной плоскости ХОУ, ограниченную одной или несколькими кривыми. Эти кривые образуют границу области

Неявная функция

Пусть имеем уравнение:

$$F(x,y) = 0,$$

Где $F(x,y)$ есть функция двух переменных, заданная в некоторой области G на плоскости xOy. Если для каждого значения x из некоторого интервала $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ существует ровно одно значение y, которое совместно с x удовлетворяет уравнению F(x, y) = 0, то этим определяется функция y = y(x), для которой равенство **F(x,y(x)) = 0** выполняется тождественно по x в указанном интервале.



В этом случае говорят, что уравнение F(x,y) = 0 определяет величину y как неявную функцию x. Иными словами, функция y = y(x), заданная уравнением F(x,y) = 0, не разрешённым относительно y, называется неявной функцией; она становится явной, если зависимость y от x задается непосредственно.

Теорема о существовании и гладкости обратной функции как частный случай теоремы о неявной функции.

Теорема. Пусть функция $F(u, x_1, x_2\ldots)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки Mo (uo, x_1o, x_2o) пространства R, (R’ обозначаем пространство переменных (x_1, $x_2\ldots$) причем частная производная $\partial F/\partial u$ непрерывна в точке M_o. Для удобства геометрической иллюстрации будем рассматривать две переменные x_1 и x_2.
Тогда, если в точке M_o функция F обращается в нуль, а частная производная $\partial F/\partial u$ не обращается в нуль, то для любого достаточно малого положительного числа ε найдется такая окрестность точки M_o'(x_1o, x_2o) пространства R, что в пределах этой окрестности существует единственная функция $u = \phi(x_1, x_2)$, которая удовлетворяет условию $|u-uo|<\varepsilon$ и является решением уравнения:

$$F(u, x_1, x_2)=0, \tag{13}$$

функция $u = \phi(x_1, x_2)$ непрерывна и дифференцируема в указанной окрестности точки M_o’.
Условия, обеспечивающие существование для функции $y=f(x)$ обратной функции.

Гладкая функция

Гладкая функция или непрерывно дифференцируемая функция- это функция, имеющая непрерывную производную на всем множестве определения.

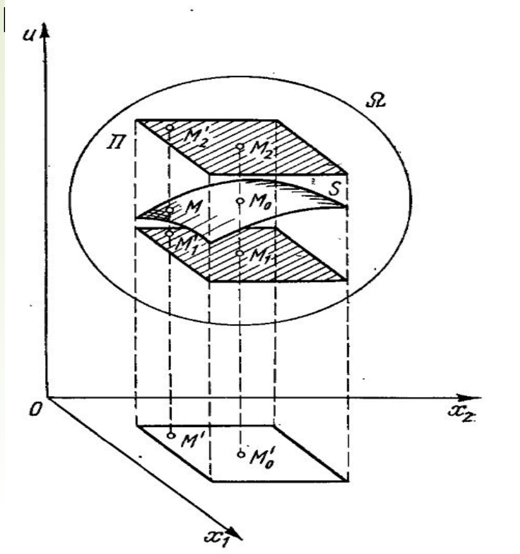
Теорема. Пусть функция $F(u, x1, x2\ldots)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $Mo(uo, x_1o, x_2o)$ пространства R, (R' обозначаем пространство переменных ($x_1, x_2\ldots$) причем частная производная $\partial F/\partial u$ непрерывна в точке M. Для удобства геометрической иллюстрации будем рассматривать две переменные x_1 и x_2.

Тогда, если в точке M_o функция F обращается в нуль, а частная производная $\partial F/\partial u$ не обращается в нуль, то для любого достаточно малого положительного числа ε найдется такая окрестность точки $M_o'(x_1o, x_2o)$ пространства R; что в пределах этой окрестности существует единственная функция $u = \phi(x_1, x_2)$, которая удовлетворяет условию $|u\text{-}uo|<\varepsilon$ и является решением уравнения:

$$F(u, x_1, x_2)=0, \qquad (1)$$

причем эта функция $u = \phi(x_1, x_2)$ непрерывна и дифференцируе

окрестности точки M_o'.



Частные производные

Определение. *Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел от- ношения частного приращения функции к приращению соответствующей независимой переменной, когда это приращение стремится к нулю*

Дифференциал функции

Определение. _Функция $y = f\{x)$ называется дифференцируемой в данной точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y = A\Delta x + a\Delta x$, (5.9) где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α функция. аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$._

Теорема. _Для, того чтобы функция $y = f(x)$ являлась дифференцируемой в данной точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную._

Экономическая иллюстрация

Иллюстрацию теоремы о неявной функции в экономической теории представим с использованием теории бифуркаций. Различают два аспекта теории бифуркаций: статический и динамический. Статическая теория бифуркаций имеет дело с изменениями, возникающими в структуре множества нулей функций при изменении параметров, входящих в эти функции. В случае дифференциальных уравнений равновесные решения являются нулями векторного поля, следовательно, и к ним непосредственно применимы методы статической теории бифуркаций. Динамическая теория бифуркаций изучает изменения, которые возникают в структуре решений дифференциальных уравнений при изменении параметров векторного поля. Изменение качественных свойств может означать и изменение свойства устойчивости исходной системы, и, следовательно, в этом случае система должна обладать еще каким-то состоянием, отличным от исходного.