Сложение колебаний

- Сложение коллинеарных колебаний
- Биения
- Сложение ортогональных колебаний

Основные характеристики гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Амплитуда ***A*** **–** это максимальное отклонение тела от положения равновесия

Циклическая частота $\boldsymbol{\omega}$ ***;***

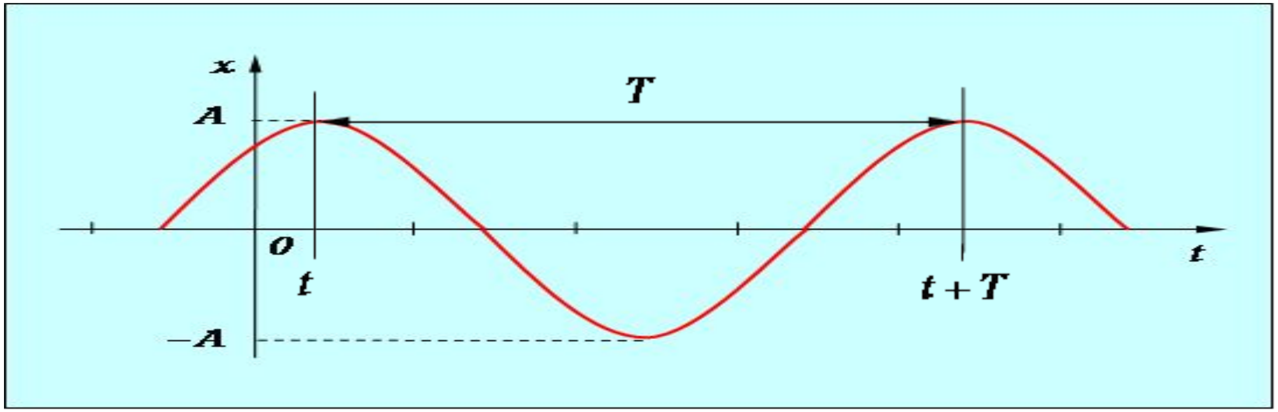
Фаза колебания $\boldsymbol{\omega t + \phi_0}$

Начальная фаза $\boldsymbol{\phi_0}$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\phi}_0$ являются начальными условиями,

$\boldsymbol{\omega}$ определяется параметрами системы

Плоская диаграмма



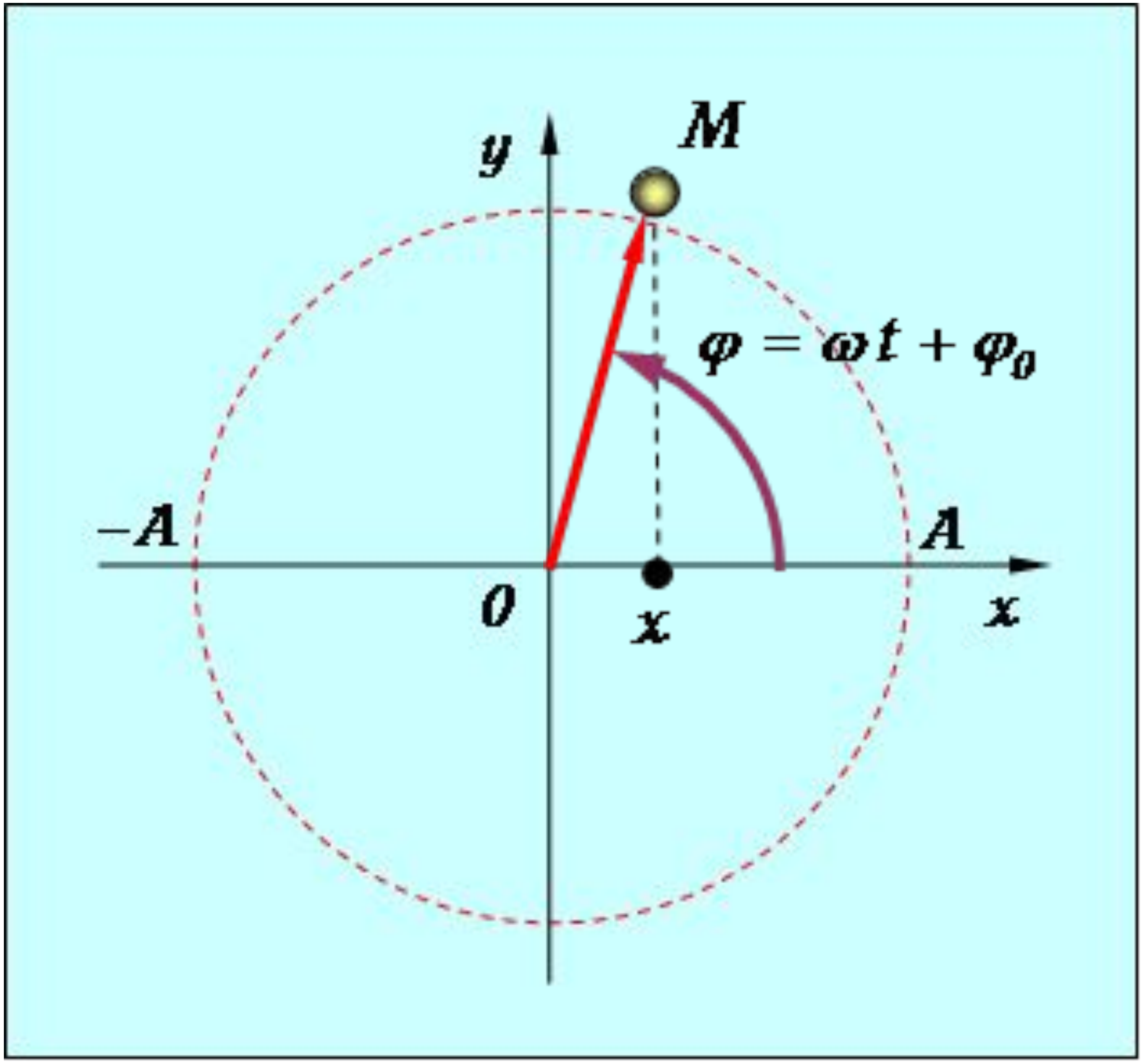
Период колебаний – это время одного полного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

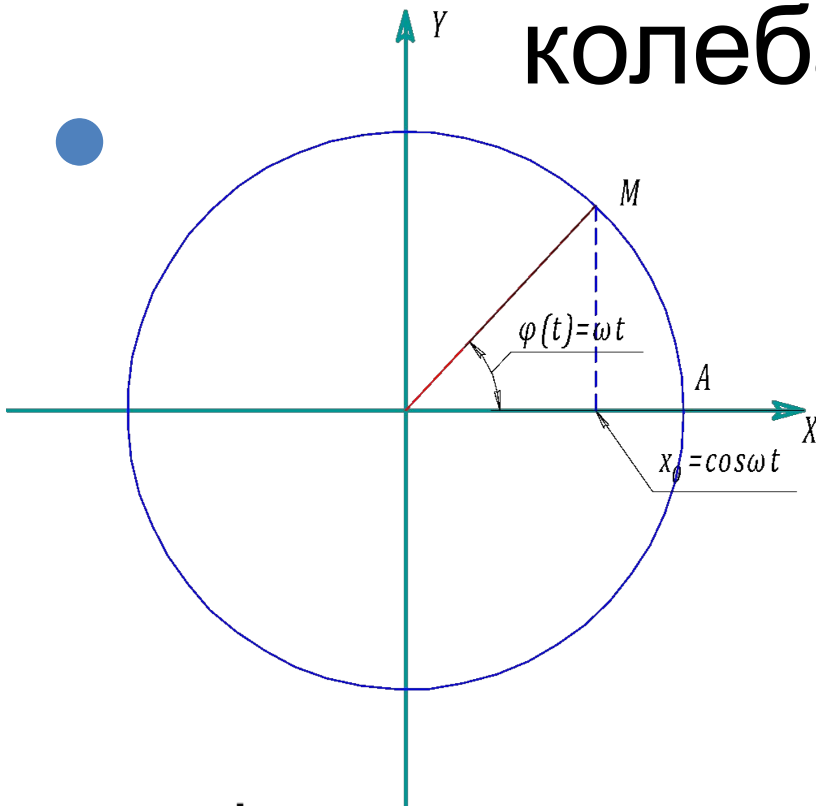
Частота колебаний – это число колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Векторная диаграмма



Связь вращательного движения с гармоническими колебаниями.

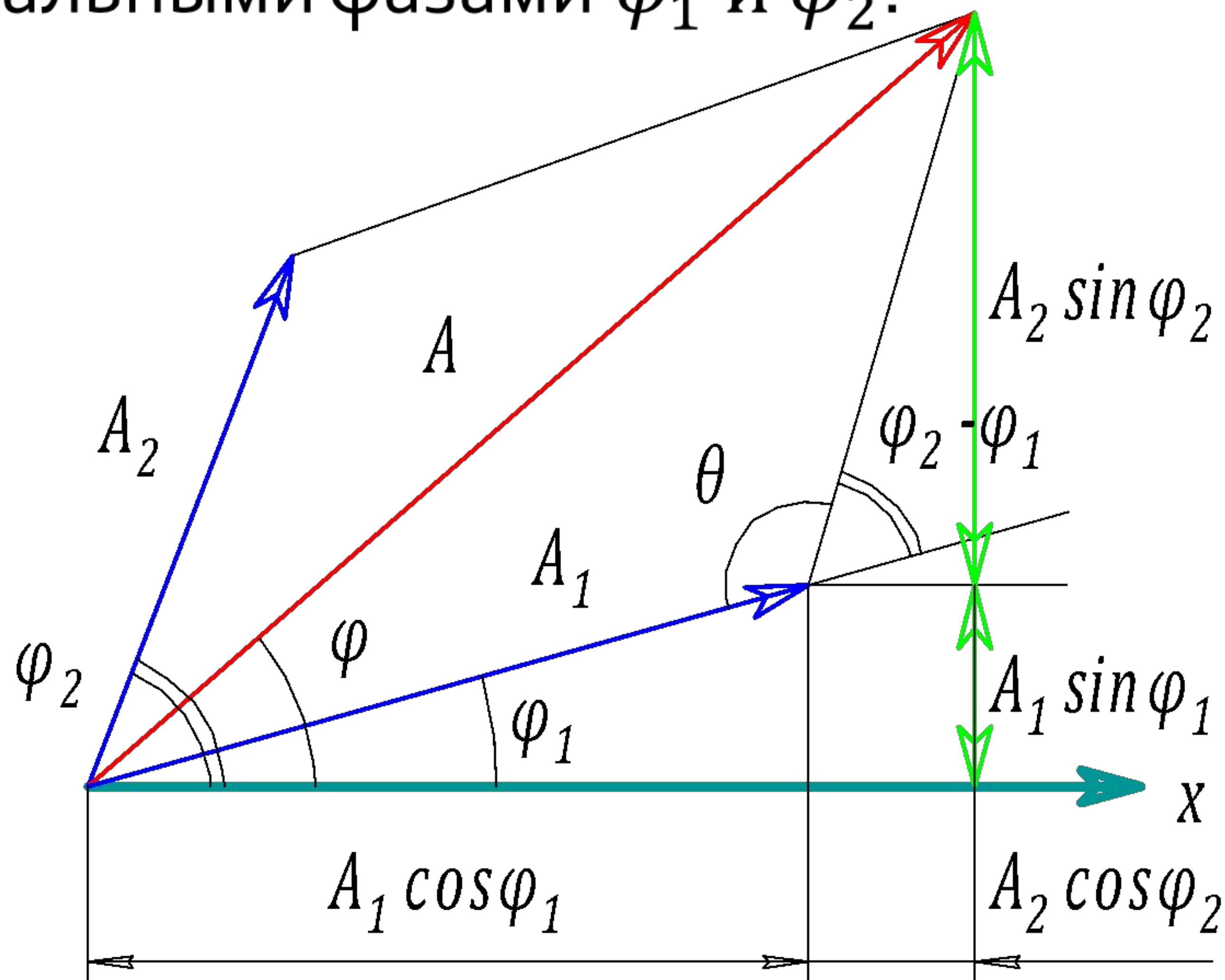


Из рисунка понятно, что проекция вектора на ось x будет иметь вид:

$$x = \mathrm{A} \cdot \cos\varphi = A \cdot \cos\omega t$$

т.е. фаза эквивалентна углу поворота. Это позволяет наглядно представлять гармонические колебания в виде векторных диаграмм.

- Сложим два гармонических колебания с одинаковыми частотами, но разными амплитудами A_1 и A_2 и разными начальными фазами φ_1 и φ_2.



- Амплитуда результирующего колебания из теоремы косинусов будет:

$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2cos\theta$, но

$cos\theta = \pi - \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

Тогда: $A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$$tg\varphi = \frac{Y}{X} = \frac{(A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2)}{(A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2)}$$

Поскольку векторы A_1 и A_2 вращаются с одной и той же угловой скоростью ω, то с такой же угловой скоростью вращается результирующий вектор A

Проекция его на ось X будет:

$$x(t) = Acos(\omega t + (\varphi_2 - \varphi_1))$$

Частные случаи.

1) Если $\varphi_2 - \varphi_1 = +2\pi n$, где $\mathrm{n} = 0,1,2..$ (колебания в одинаковой фазе)

Тогда:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$$

Следовательно, результирующая амплитуда:

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$$A = A_1 + A_2$$

Это означает, что колебания усиливают друг друга.

2) Если $\varphi_2 - \varphi_1 = +(2n+1)\pi$

$$\text{где } \mathrm{n} = 0,1,2..$$

(колебания происходят в противофазе)

Тогда:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

И результирующая амплитуда:

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

$$A = A_1 - A_2$$

И в частности, при $A_1 = A_2$ $A = 0$

Колебания «гасят» друг друга (амплитуда результирующего колебания равна нулю).

3) Пусть колебания немного отличаются по частоте – на малую величину $\Delta\omega$:

$$x_1 = A cos\omega t,$$

$$x_2 = A cos(\omega + \Delta\omega)t$$

Где $\Delta\omega \ll \omega$

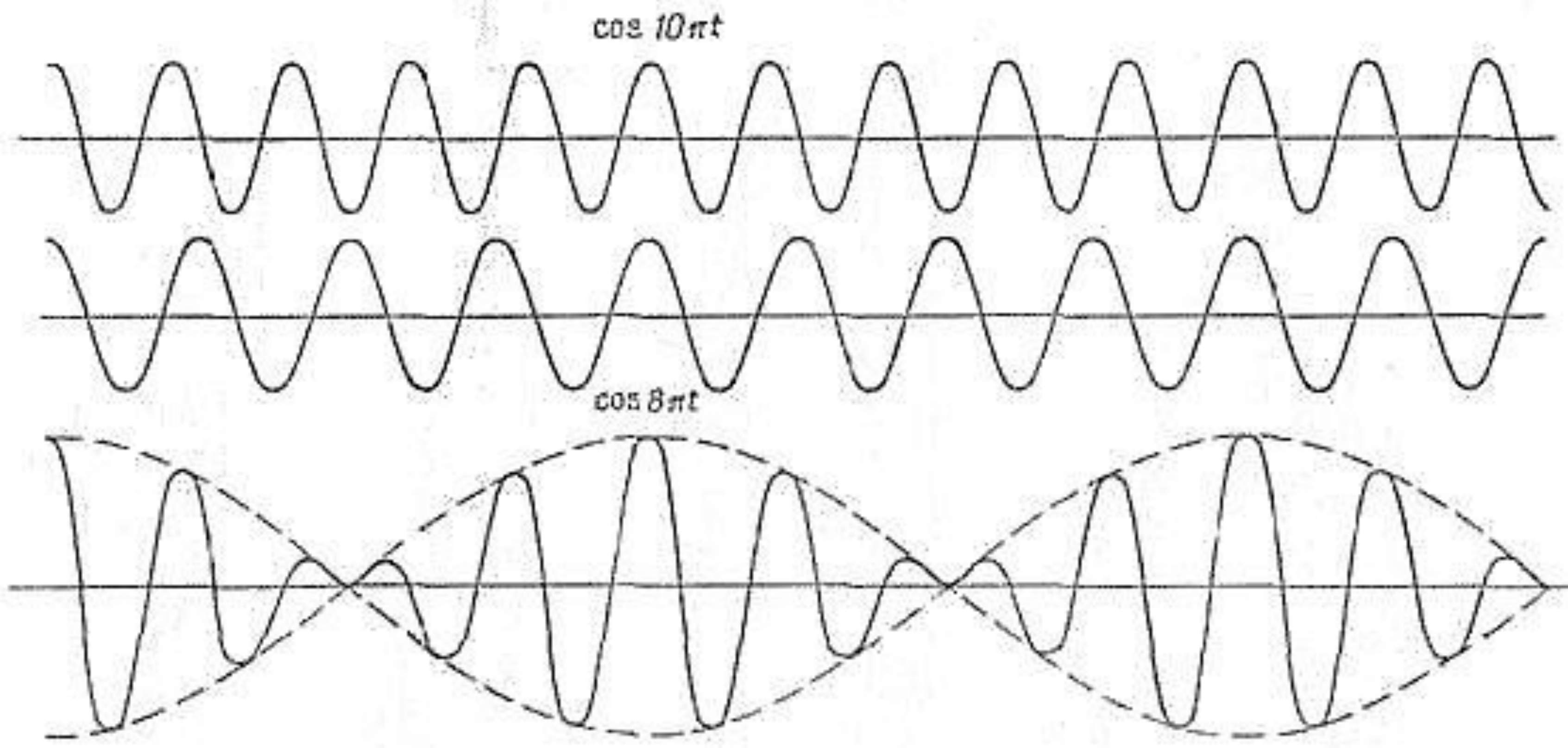
$$x = x_1 + x_2 = 2A cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t \cdot cos\frac{(2\omega + \Delta\omega)t}{2}$$

Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то

$$x \approx (2A cos\frac{\Delta\omega t}{2}) \cdot cos\omega t$$

- Первый сомножитель можно рассматривать, как медленно меняющуюся амплитуду колебаний, происходящих с частотой ω.

  Такие колебания называют биением.

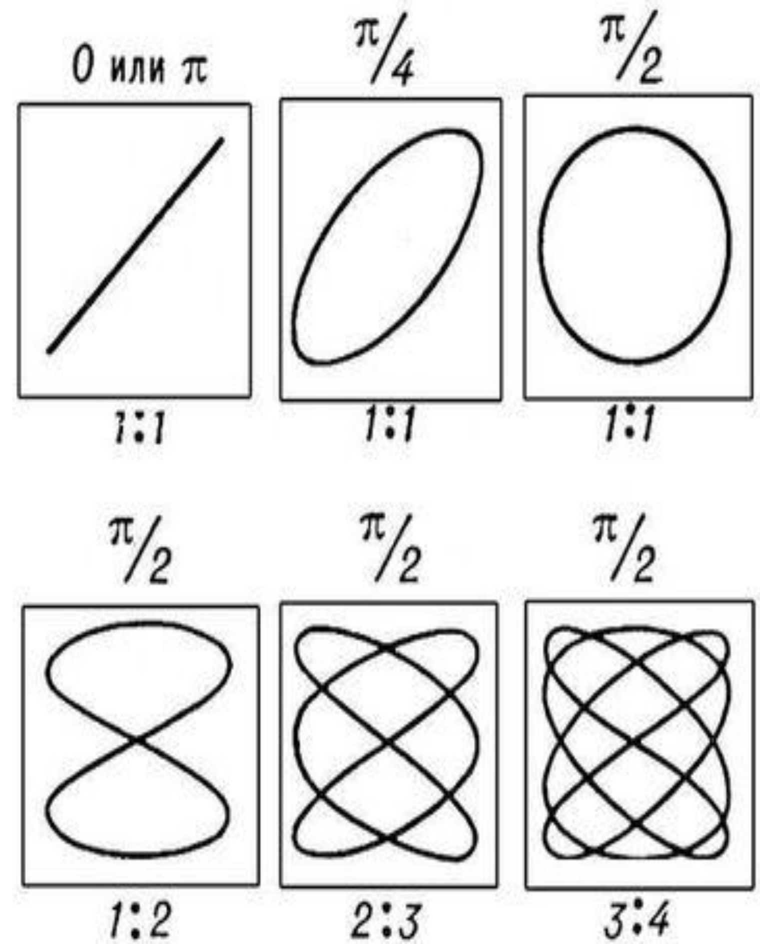


Сложение ортогональных колебаний.

Фигуры Лиссажу.

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = sin^2\alpha$$



Контрольные вопросы

1. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями

$$x = 3\cos(2\omega t) \qquad y = 4\cos(2\omega t + \pi)$$

Определить уравнение траектории точки и нарисовать ее.

2. Складываются два гармонических коллинеарных колебания с одинаковыми периодами и амплитудами А. Чему равна амплитуда результирующего колебания, если разность фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$$