Затухающие колебания

- Коэффициент затухания
- Амплитуда и частота затухающих колебаний
- Логарифмический декремент затухания.
- Энергия затухающих колебаний
- Добротность

При движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела, в конце концов, переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место *диссипация* энергии.

π

Затухающие колебания

- Свободные колебания с уменьшающейся амплитудой называют затухающими. Уменьшение амплитуды колебания ведет к потере энергии, т.к.

$$E(t) \sim A^2(t)$$

Обычно, в механической колебательной системе потери энергии связаны с трением. Вязкое трение пропорционально скорости движения:

$$F_{\text{тр}} = -rV = r\frac{dx}{dt}$$

Тогда уравнение движения грузика на пружинке в стакане воды будет:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

Как и раньше: собственная частота $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

а $\frac{r}{m} = 2\beta$, где β – называется коэффициентом затухания.

Тогда уравнение затухающих колебаний будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

При условии $\beta < \omega_0$, решение будет иметь вид:

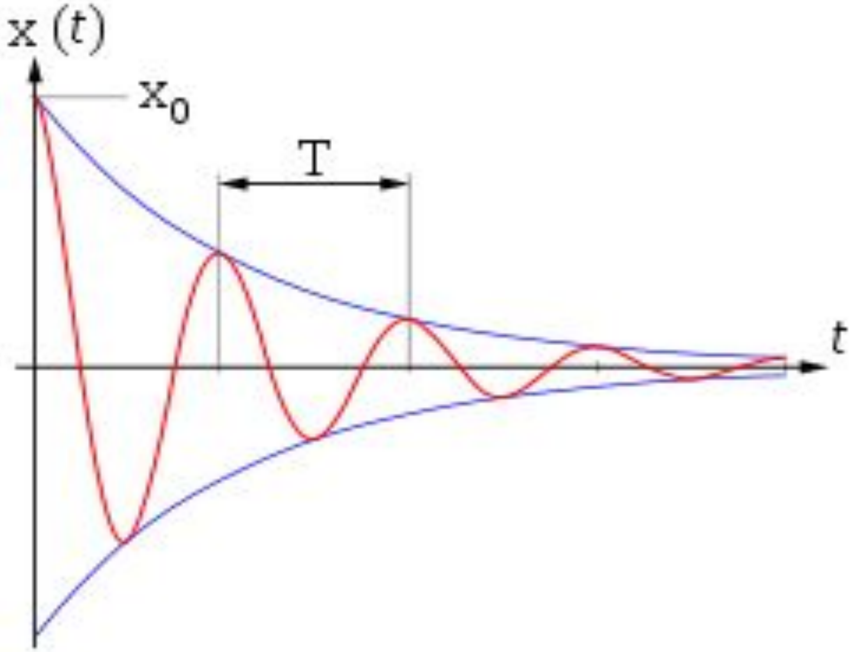
$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

где x_0 и φ_0 – определяются начальными условиями, а ω_1 – частота затухающих колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- Тогда период затухающих колебаний T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



При увеличении силы трения $\beta \to \omega_0$ и когда $\beta = \omega_0$ движение становится апериодическим.

Множитель перед косинусом $x_0 e^{-\beta t}$ – называют амплитудой затухающих колебаний. А величину $\tau = {}^{1}/_{\beta}$ – временем релаксации. Она соответствует времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

- Степень затухания характеризуют также отношением амплитуд колебаний в два соседних момента времени, разделенных периодом T

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$x(t+T) = x_0 e^{-\beta(t+T)} \cos(\omega_1 (t+T) + \varphi_0)$$

$$= x_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Их отношение:

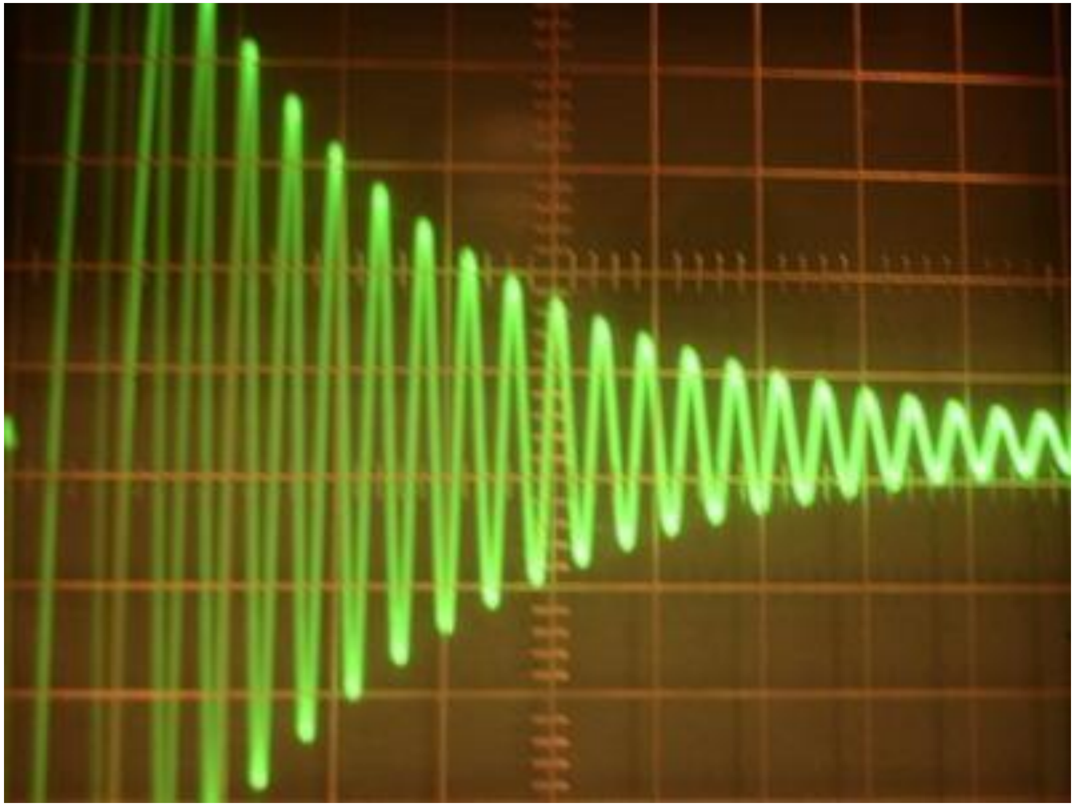
$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\beta T}$$

$$\lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \beta T$$

λ – логарифмический декремент затухания.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний



<u>Время релаксации</u> τ **– время, в течение которого амплитуда *A* уменьшается в е раз.**

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \quad \beta\tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Пусть *N* число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в *е* раз. Тогда

$$\tau = NT; \quad ; \quad T = \frac{\tau}{N} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N} = \frac{T}{\tau}$$

Итак, <u>*логарифмический декремент затухания*</u> λ есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда *А* уменьшается в е раз.

<u>При большом коэффициенте затухания</u> **происходит быстрое уменьшение амплитуды и увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому $\beta = \omega_0$, ($T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется** ***<u>апериодическим</u>*** **.**

В случае ***апериодического движения*** **энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.**

Пружинный маятник

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2})}$$

$$Q = \sqrt{\frac{km}{r}}$$

Колебательный контур

$$\omega = \sqrt{(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

При малых затуханиях можно считать, что энергия в колебательной системе изменяется по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta T}$$ где $$E_0 = \frac{1}{2} k A^2$$

***E*о**- значение энергии в начальный момент времени. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

Скорость убывания энергии со временем

$$\left(-\frac{dE}{dt}\right) = 2\beta E = -\Delta E$$

Если за период энергия мало изменяется, то при умножении этого выражения на *T* можно найти убыль энергии за период и выразить добротность через энергию.

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = 2\beta TE = 2\lambda E = \frac{Q}{2\pi}$$

Для характеристики колебательной системы употребляется величина, называемая *доброт<u>ностью</u>*.

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Добротность пропорциональна количеству колебаний, совершенных системой за время, за которое амплитуда уменьшается в *e* раз (то есть за время релаксации).

- Добротность Q осциллятора характеризует потери энергии колебательной системы за период:

$$Q = 2\pi \frac{\text{запасенная энергия}}{\text{потери энергии за переод}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

Иначе говоря, добротность означает качественность, чем больше добротность системы, тем ближе она к идеальной, тем медленнее затухают в ней колебания.

Контрольные вопросы

1. Период затухающих колебаний T=1 с, логарифмический декремент затухания 0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при t=2Tc составляет 5 см. Записать уравнение колебаний этого маятника.
2. Затухающее колебание происходит по закону x = 0,1e(-0,2t)cos(8π•t) (м). Найти амплитуду после 10 полных колебаний..