Лекция 4
Динамика вращательного движения

- Момент инерции. Теорема Штейнера
- Главные оси инерции
- Орбитальный и осевой момент импульса
- Момент силы
- Основное уравнение динамики вращательного движения

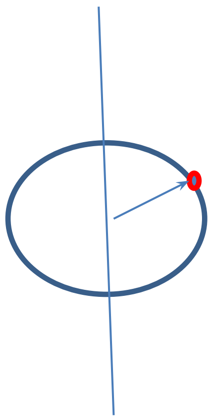
Момент инерции

- Момент инерции - мера инертности тела при вращательном движении относительно какой-либо оси. В динамике вращательного движения момент инерции играет ту же роль, что и масса тела в динамике поступательного движения.
- Но есть и принципиальная разница. Для разных осей вращения моменты инерции одного и того же тела различны.

Момент инерции МТ, системы МТ, твердого тела

- Момент инерции МТ $I_i = m_i r_i^2$
- Момент инерции системы МТ

$$I = \boxed{= \sum_i m_i r_i^2}$$

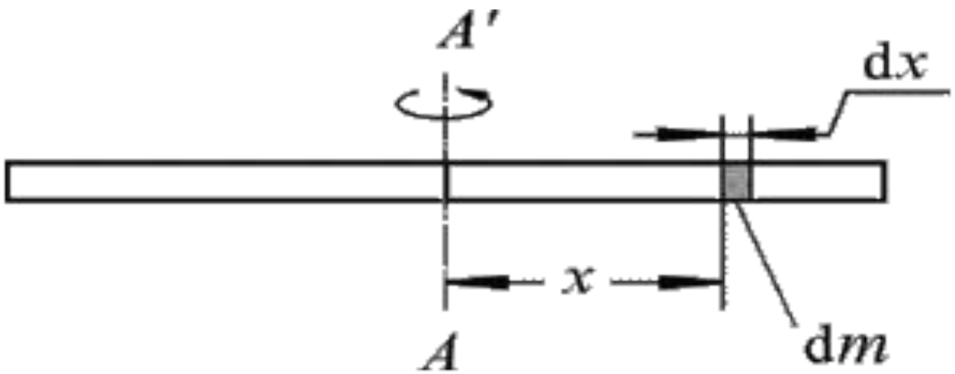


- Момент инерции АТТ

$$I = \int_{(m)} r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV,$$

$$dm = \rho dV$$

Пример. Вычисление момента инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс



$$I = \int x^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \frac{m}{V} S dx = \frac{m}{Sl} S dx = \frac{m dx}{l}$$

Рис.27. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину в виде совокупности малых элементов dx

$$I = 2\int_0^{l/2} \frac{m x^2 dx}{l} = \frac{2m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

Вычисление момента инерции тонкого диска (цилиндра) относительно геометрической оси

Разобьем цилиндр на кольцевые слои
радиуса r и толщины dr. Масса такого слоя dm

$$dm = \rho dV$$

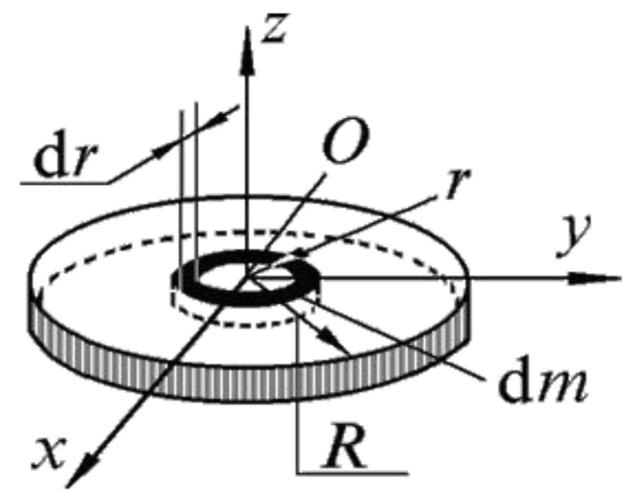


Рис.32. Выбор системы координат
И представление дисков виде
Наборов тонких колец

$$dI = \rho r^2 dV = \rho r^2 2\pi r h dr$$

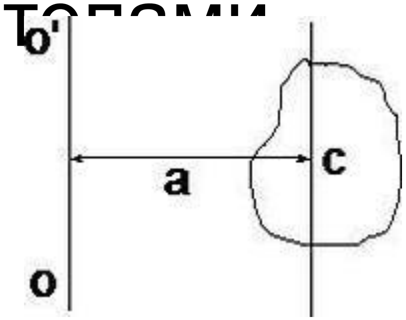
$$I = \int dI = \int_0^R (\rho 2\pi h) r^3 dr =$$

$$\rho 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 h \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

Теорема Штейнера

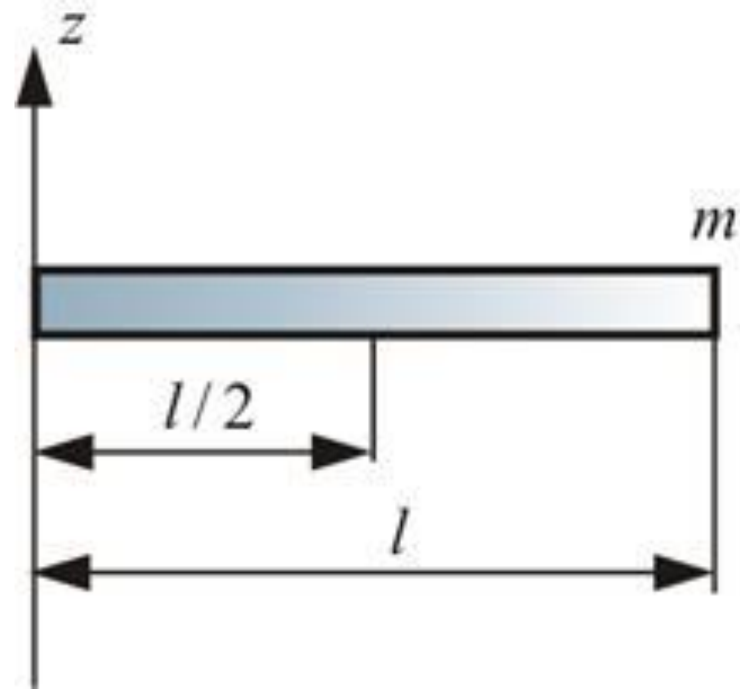
- Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между телами.

$$I = I_c + ma^2$$



Теорема Штейнера

$$\int_0^l \rho \cdot S \cdot x^2 dx = \rho \cdot S \cdot \frac{l^3}{3} =$$

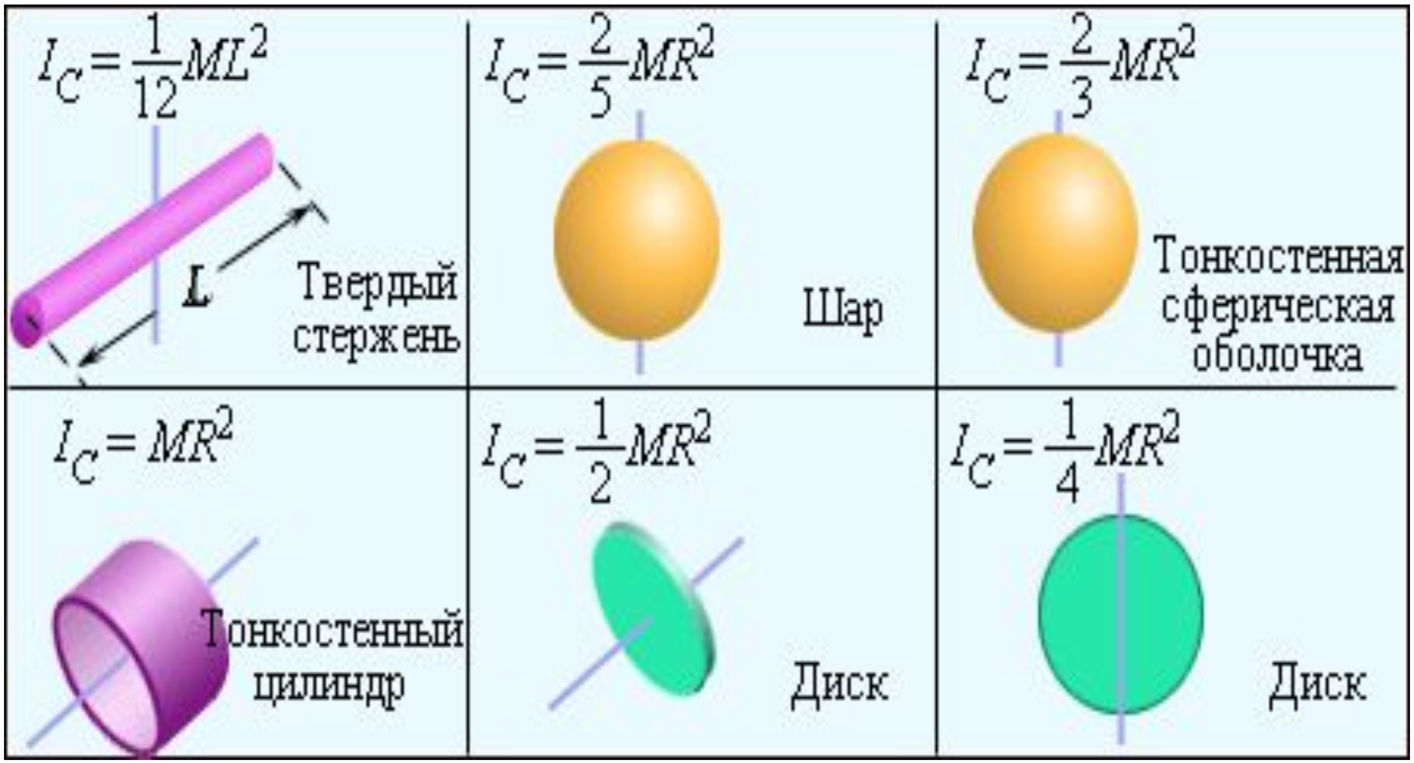


$$\frac{ml^2}{3}$$

$$I_1 = I_0 + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}$$

$$+m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) =$$

Моменты инерции симметричных однородных тел относительно оси, проходящей через центр масс



При сложном вращении (около точки, а не вокруг неподвижной оси момент инерции описывается **тензором инерции**.

$$\begin{matrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{matrix}$$

Для любого тела можно так выбрать оси оси координат, чтобы кроме J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} все остальные компоненты матрицы будут равны нулю. Эти оси называются ***главными осями инерции.***

Главные оси инерции. Главные моменты инерции

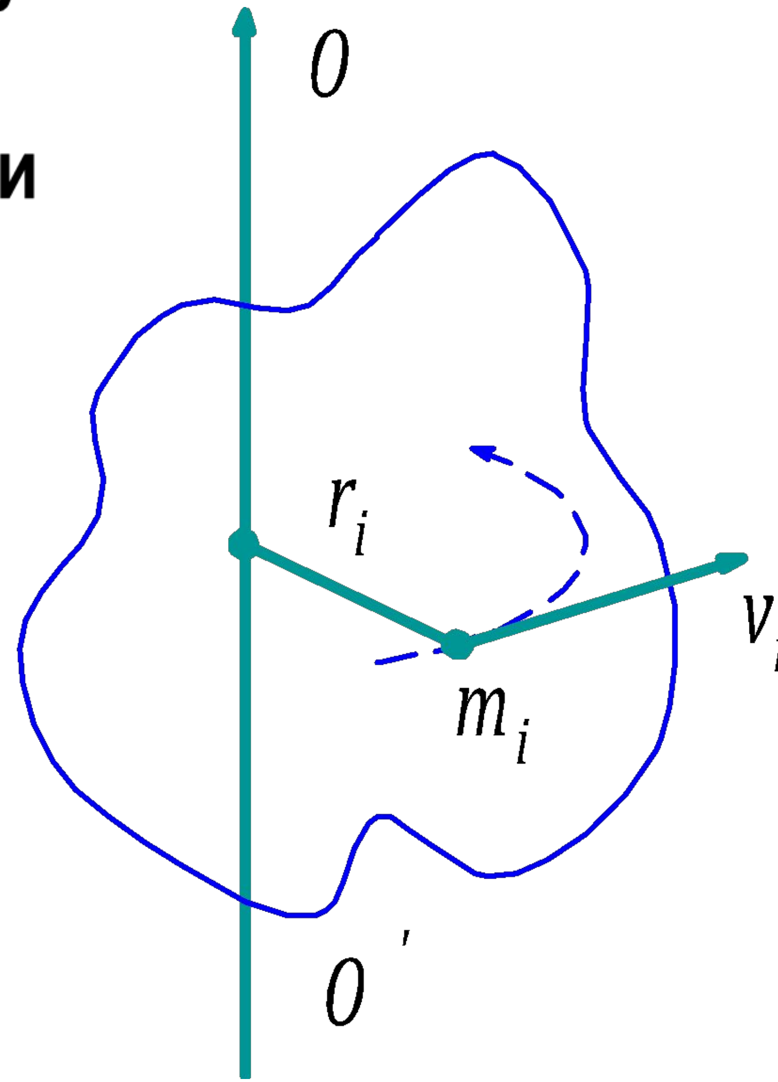
- Главные оси инерции – это три взаимно перпендикулярные оси координат, проходящие через центр масс и совпадающие с осями симметрии.
- Моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции тела:

I_x, I_y, I_z. Эти моменты инерции в общем случае имеют минимальное, максимальное и промежуточное значение и непосредственно связаны с устойчивостью вращения.

Объект	J_{xx}	J_{yy}	J_{zz}
Тонкий обруч			
Сплошной диск			
Стержень	*0 (min)*		
Шар			
Параллелипипед b>a>c			

- Пусть тело вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Из кинематики мы знаем, что линейная скорость каждой массы $V_i = r_i\omega$. Для каждого элементика массы можно записать: $\Delta E_i = \frac{\Delta m_i V_i{}^2}{2} =$

$$= \frac{\Delta m_i r_i{}^2 \omega_i{}^2}{2}$$



$$E_{\text{вр}} = \sum \Delta E_i = \frac{\sum \Delta m_i {r_i}^2}{2} \omega^2$$

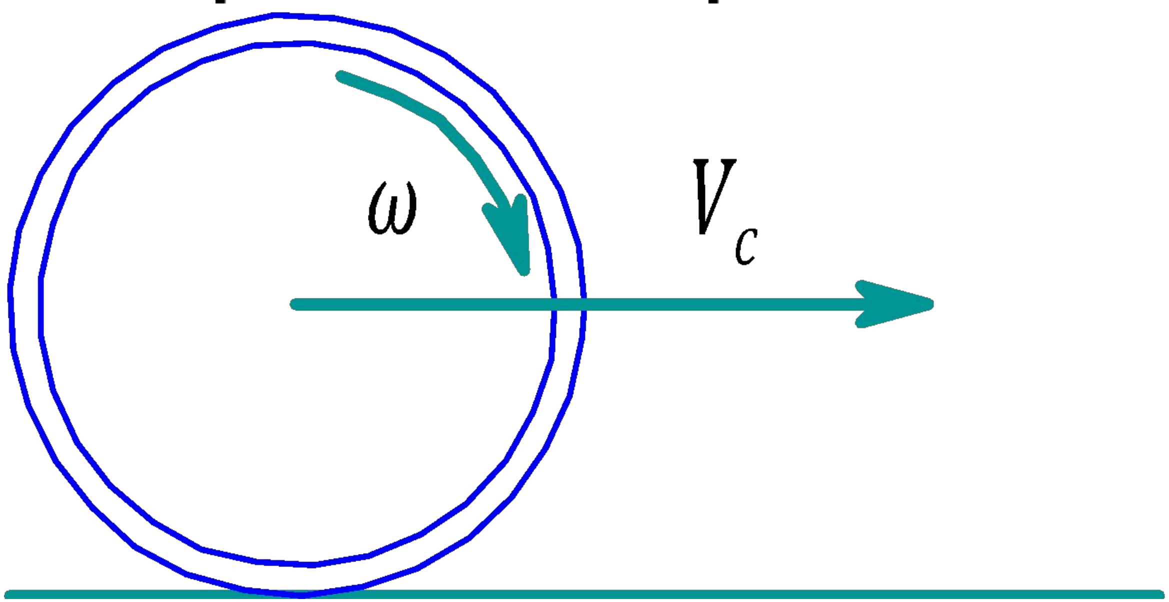
Перейдём к пределу, тогда

$\int r^2 dm$ **- момент инерции** I

$I = \int r^2 dm$, **значит** $E_{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}$

Таким образом это кинетическая энергия вращательного движения относительно оси проходящей через центр масс.

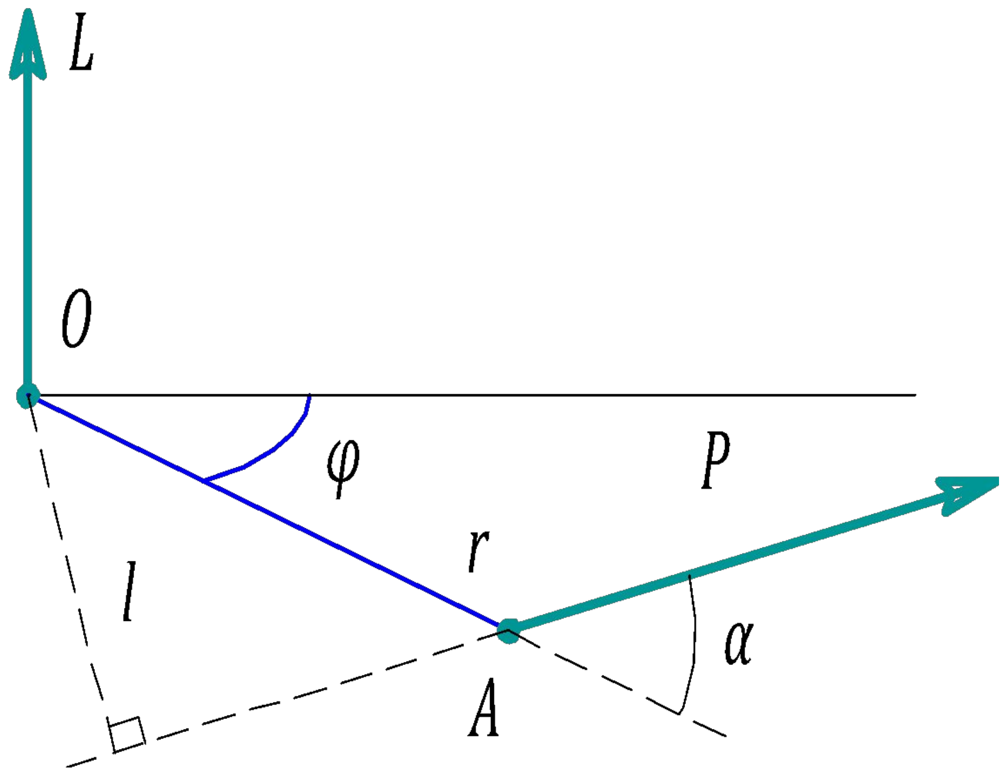
- Если тело вращается со скоростью ω и одновременно движется поступательно со скоростью V_c (V_c - скорость центра масс), полная кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии в массе всего тела движущегося со скоростью центра масс и кинетической энергии его вращения относительно оси проходящей через ц.м.



$$E = \frac{mV_c^{\ 2}}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Моментом импульса частицы A относительно точки O называют вектор L, равный векторному произведению векторов r и p:

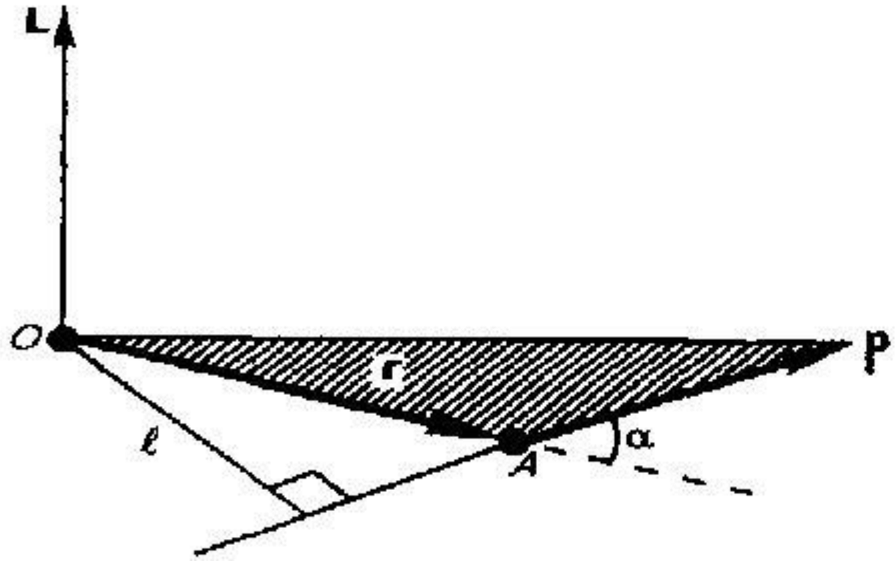
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| sin\alpha = lp$$



Орбитальный момент импульса МТ

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$L = mVr\sin\alpha = p \cdot l$$



Момент импульса системы МТ и АТТ-осевой момент импульса

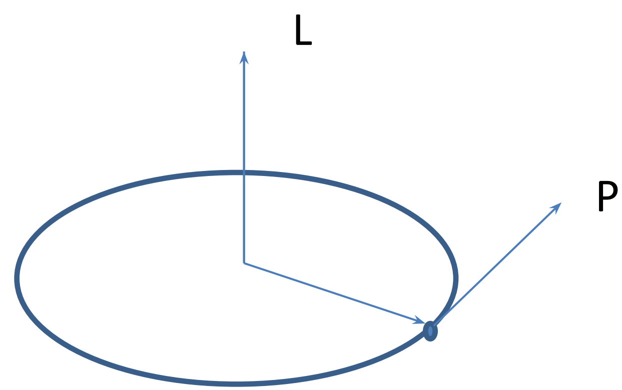
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Рассмотрим вращение т.т. вокруг неподвижной оси со скоростью w. Каждая точка будет вращаться по окружности

$$\vec{V}_i = [\vec{w}, \vec{R}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{R}_i, m_i\vec{V}_i]$$



$$L = \sum_i L_i = w\sum_i I_i = Iw$$

$$\vec{L} = I\vec{w}$$

$$L_i = m_i w R^2{}_i = I_i \cdot w$$

Момент силы относительно неподвижной оси

Скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора M - момента силы, определенного относительно произвольной точки O.

Под действием силы тело будет вращаться с угловым ускорением, которое будет одинаково для всех точек тела

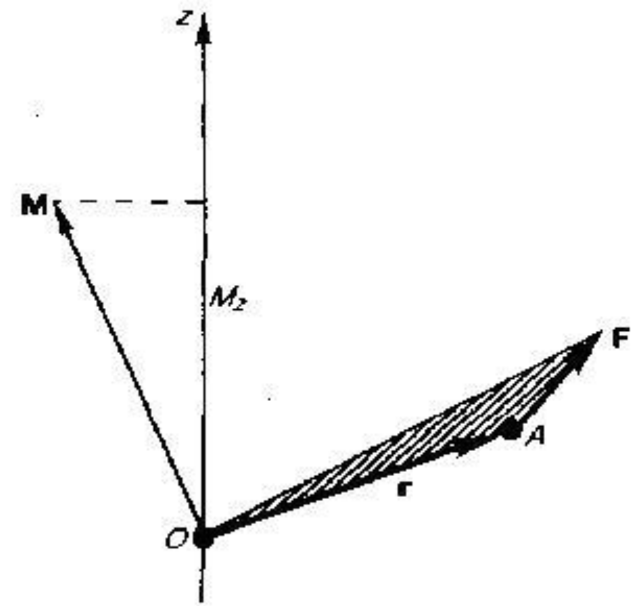
$$M_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

$$a_i = \varepsilon r_i$$

$$M = \sum_i M_i = \sum r_i m_i \varepsilon r_i =$$

$$= \varepsilon \sum m_i r_i^2 = \varepsilon I$$

$$\boxed{M = I\varepsilon}$$



Согласно второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Где $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил, приложенных к частице, следовательно:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

$$\text{следовательно} \ \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

Основной закон динамики вращательного движения

Момент импульса системы МТ относительно т. О

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = [\vec{V}_i \times \vec{p}_i] + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \vec{M}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

Основной закон динамики вращательного движения

Для тела, вращающегося относительно оси Z

$$L_z = I_z w$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{dw}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$$

$$M_z = I_z \varepsilon$$

Закон сохранения момента импульса

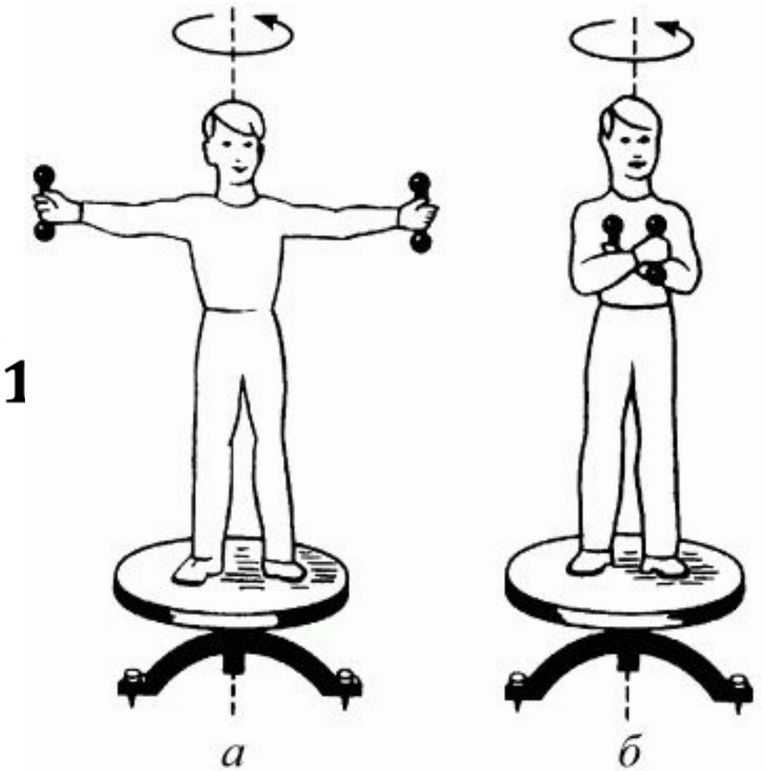
- Если суммарный момент силы равен нулю $\overrightarrow{M} = 0$, то $L = const$

Если в первом положении:

$$L = r_1 p = r_1 m v = r_1 m \omega_1 r_1 = m {r_1}^2 \omega_1$$

то во втором положении $L = m {r_2}^2 \omega_2$

Значит ${r_2}^2 \omega_2 = {r_1}^2 \omega_1$ и при $\frac{r_1}{r_2} = 2$ $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$



Кинематика

Динамика

Кинетическая энергия

Контрольные вопросы

1. Теорема Штейнера
2. Главные оси инерции
3. Момент импульса
4. Основное уравнение динамики вращательного движения