Гармонические колебания

Колебания – это физические процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени.

Осциллятор – это система, совершающая колебания.

Если состояние системы или значение какой-либо физической величины повторяется через равные промежутки времени, то такие колебания называются периодическими.

$f(t)=f\,(t+T)$ T – период {с}

Классификация колебаний по типу колеблющейся величины

- ***1.Механические колебания***:
  X, V, a, угол φ,
- ***2.Электрические колебания:***
  заряд q, сила тока I, напряжение *U.*
- *3.* ***Электромагнитные колебания:***
  Ē, ***B*** *(свет).*
- ***4.Упругие колебания:***
  плотность ρ, давление P,   (звук).

Классификация колебаний

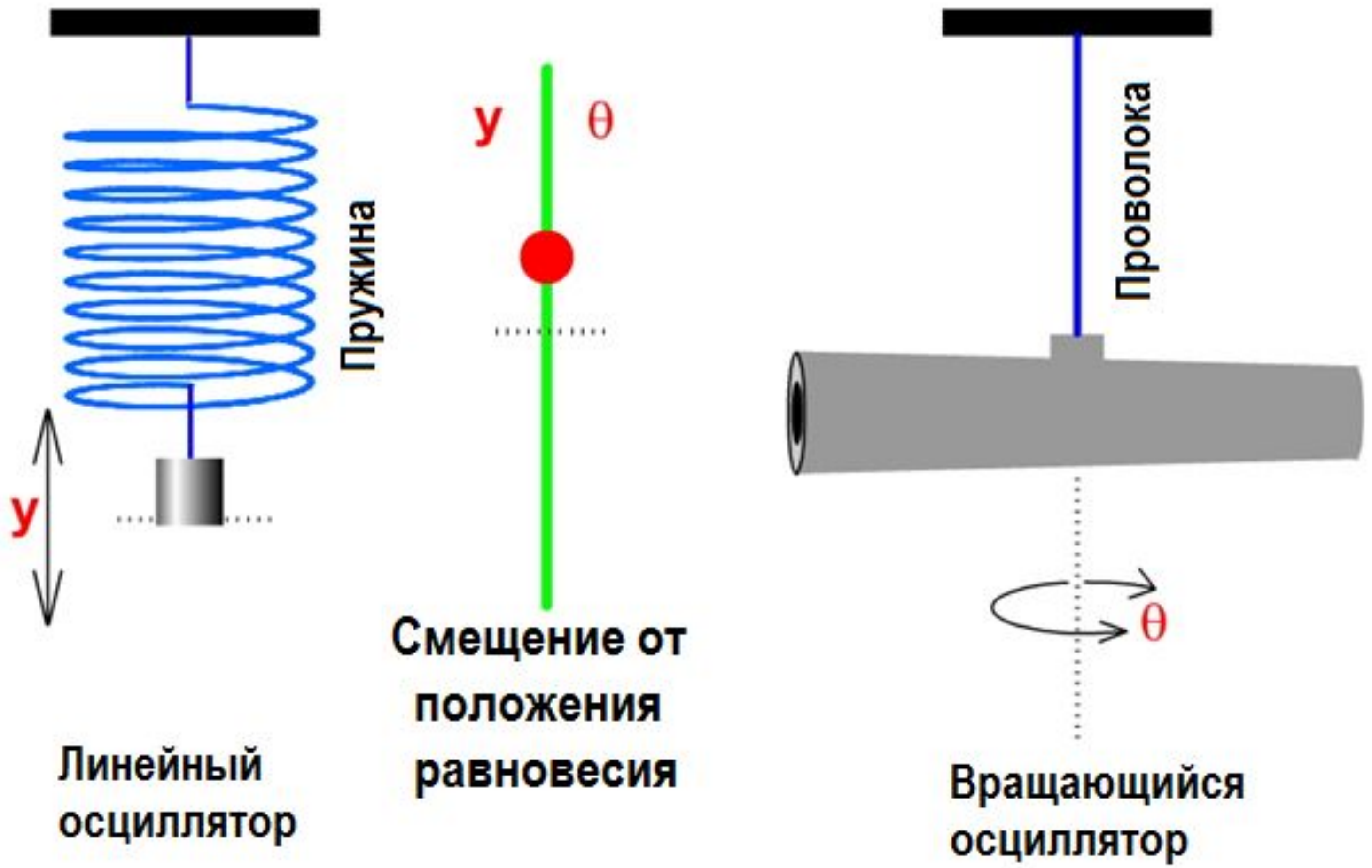
- Собственные (свободные) колебания – это колебания которые происходят в системе не подверженной действию внешних сил, и возникших в результате кратковременного воздействия.
- Затухающие колебания
- Вынужденные колебания
- Автоколебания
- Параметрические колебания

Гармонические колебания – это колебания системы, при которых отклонение от равновесия зависит от времени по закону синуса или косинуса.
Гармонический осциллятор – это тело, совершающее гармонические колебания.

Примеры гармонических осцилляторов:
математический маятник;
груз на пружине;
LC-цепочка.

ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ

Простое гармоническое движение



Основные характеристики гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Амплитуда A – это максимальное отклонение тела от положения равновесия

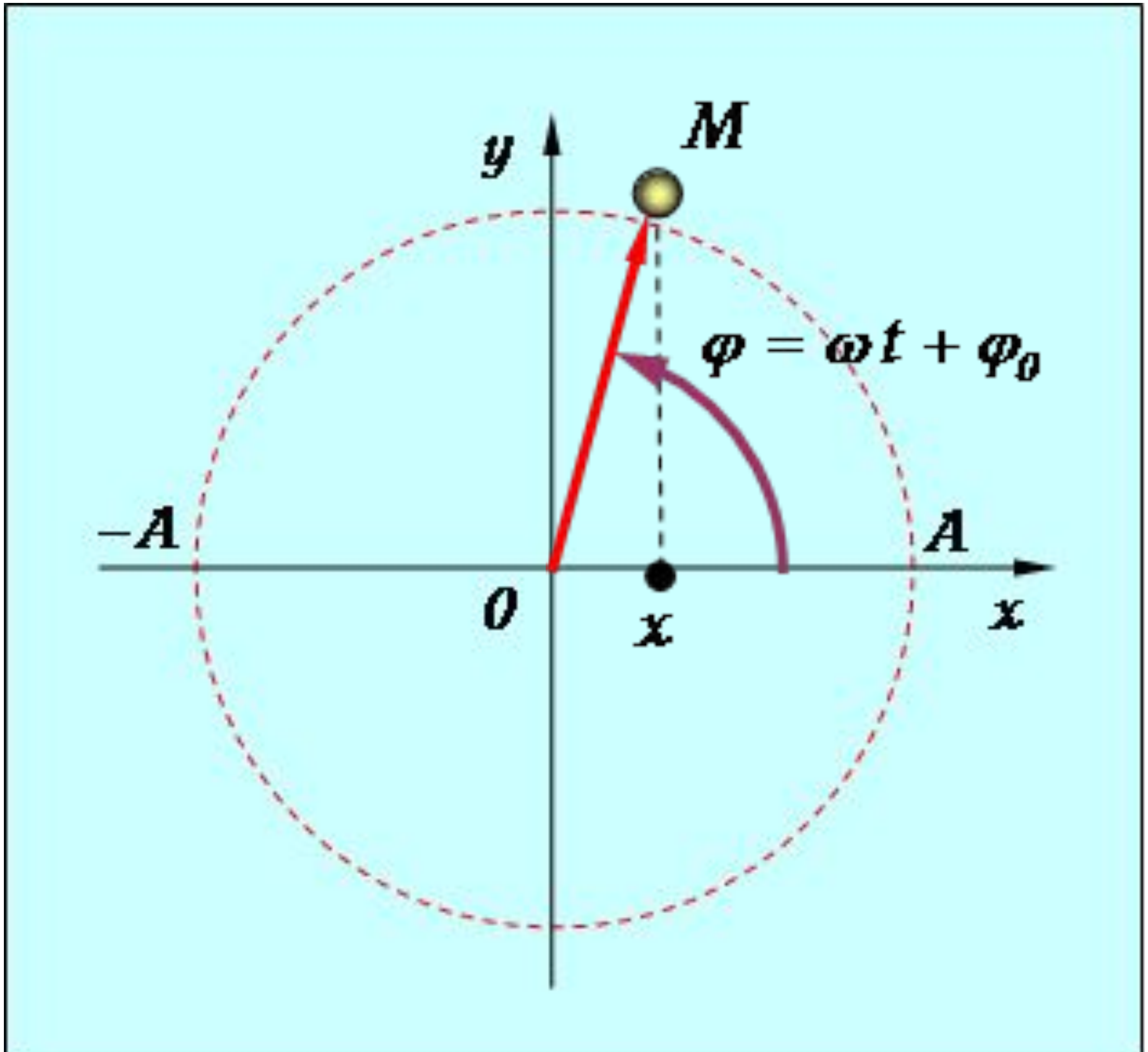
Циклическая частота ω ; **Фаза колебания** $\omega t + \phi_0$

Начальная фаза ϕ_0

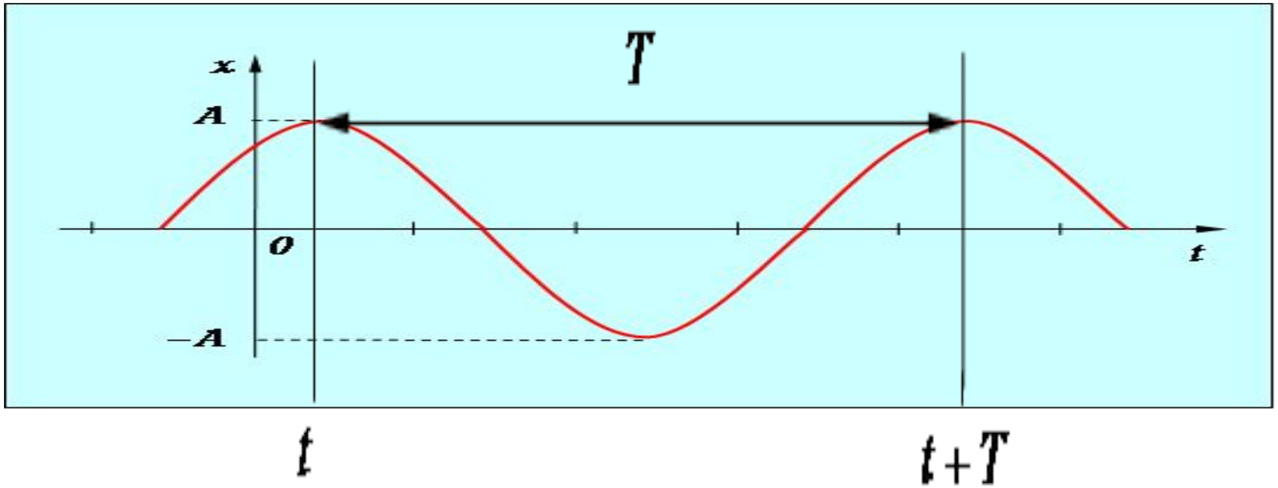
ВЫВОД: Гармоническое колебание определяется заданием трех постоянных: A, ω, ϕ_0, причем,

A, ϕ_0 являются начальными условиями,

ω определяется параметрами системы



y
M
$\varphi = \omega t + \varphi_0$
$-A$
A
0
x
x



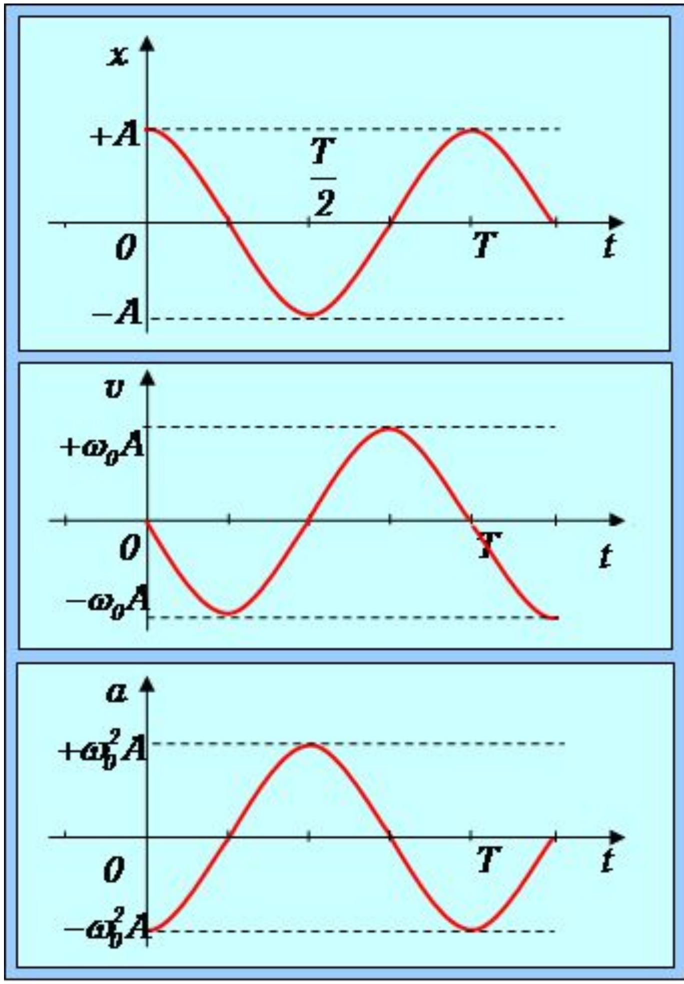
Период колебаний – это время одного полного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Частота колебаний – это число колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Зависимость от времени положения, скорости и ускорения колеблющейся материальной точки



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

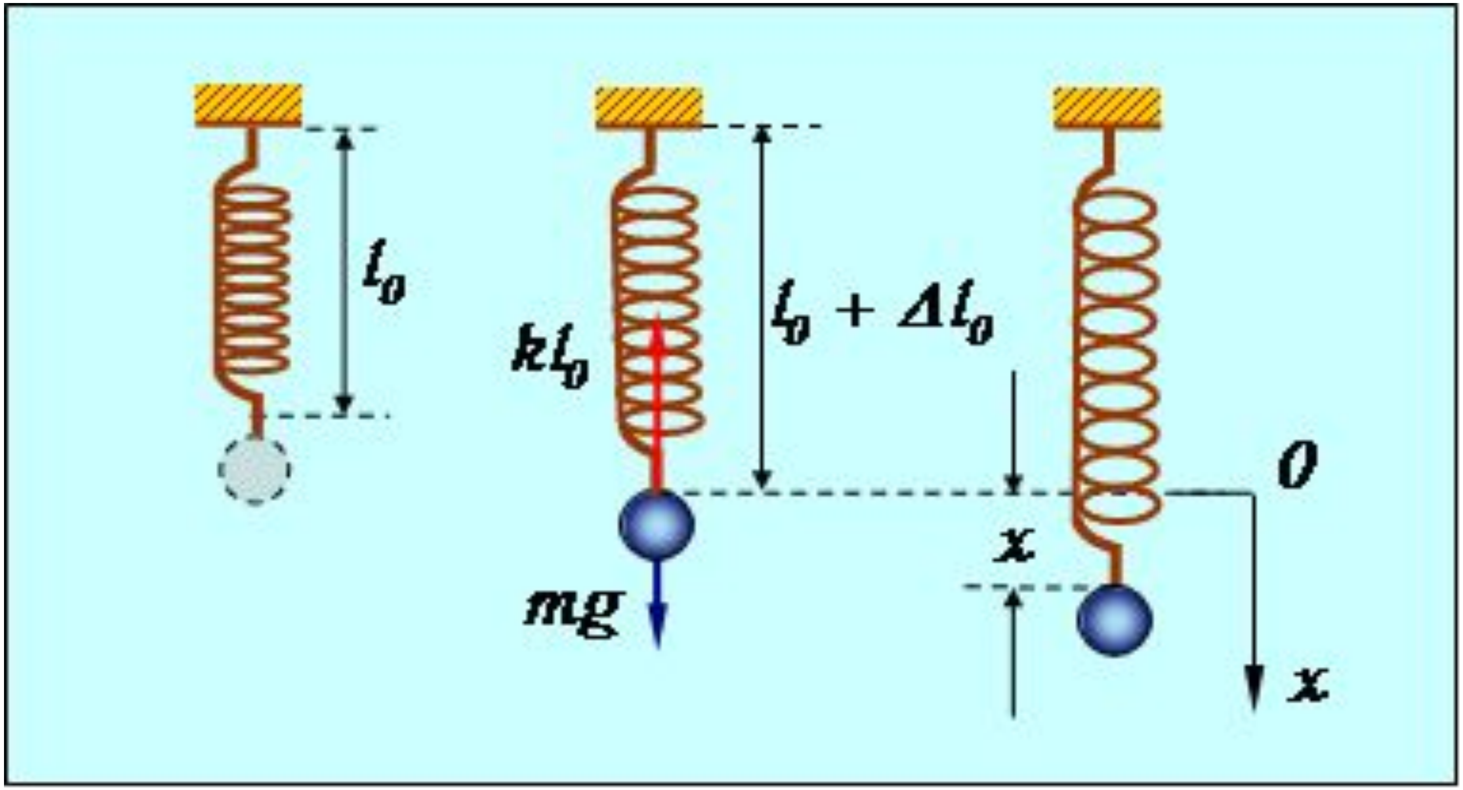
$$\dot{x} = v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} = a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Сила, действующая на гармонический осциллятор

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

Сила, действующая на гармонический осциллятор, пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена к положению равновесия. Такая сила аналогична по свойствам упругой силе, поэтому, независимо от физической природы, такая сила называется квазиупругой.



Напишем второй закон Ньютона, в проекции на ось x, для этой системы

$$F_x = mw_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания данной системы:

$$m\ddot{x}=-kx \quad \Rightarrow \quad \dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Введя обозначение $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

получим окончательный вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего гармонические колебания:

$$\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

Уравнение колебаний пружинного маятника

- Решение этого уравнения будет выражение вида:

$$X = ASin(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

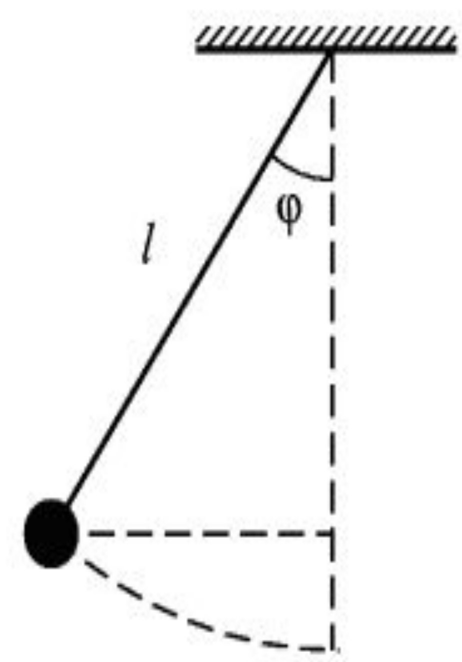
собственная частота колебаний пружинного маятника.

X- смещение колеблющейся величины

(A) -амплитуда колебаний (максимальное смещение от положения равновесия). Всегда положительна.

<u>Математическим маятником</u> называют идеализированную систему, состоящую из легкой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.



φ_0 -начальное угловое смещение (очень малое)

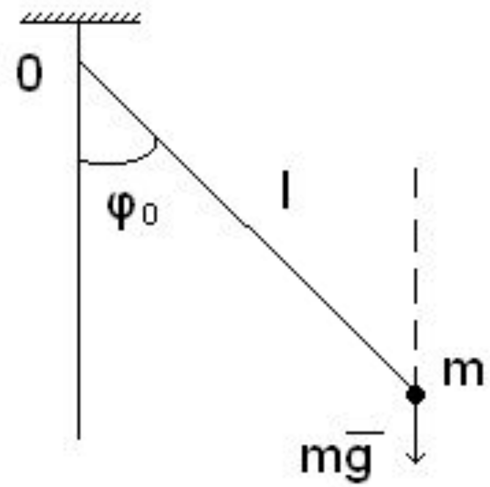
Математический маятник

M=Ì* ε; *M* –момент силы;

*M=[R*F];*

Ì –момент инерции;

ε -угловое ускорение;

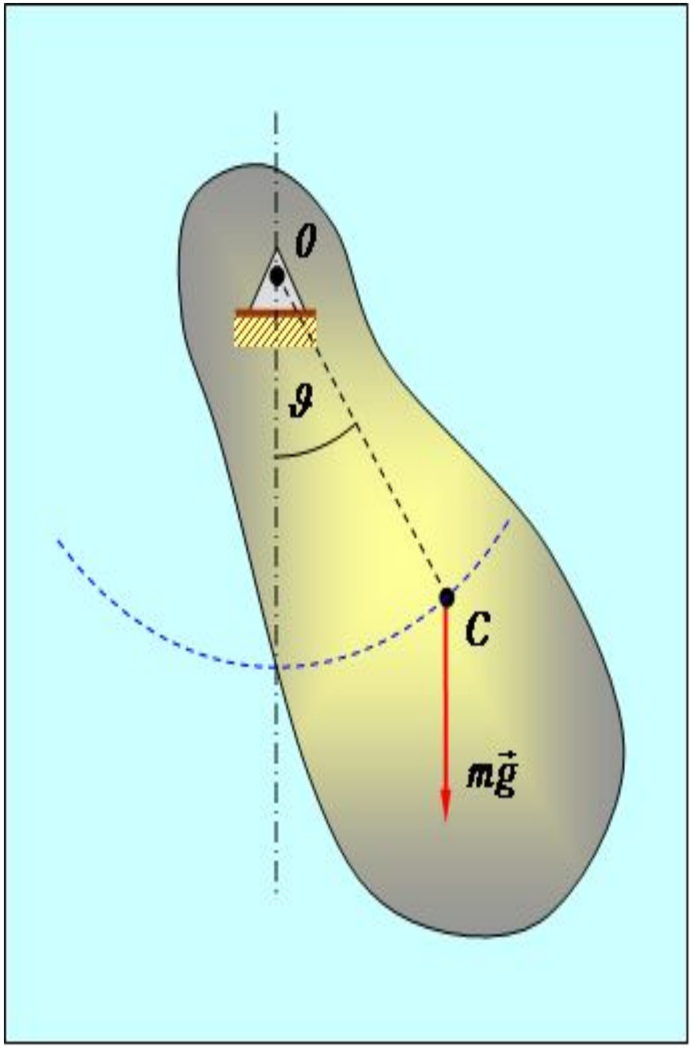


$$-lmgSin\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$$

$$Sin\varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{1}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\varphi = \varphi_0 Sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$



<u>Физический маятник</u> **- это твёрдое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной оси, не совпадающей с центром масс С.**

Mz=Ìz* εz;

-m*g*a*sin φ=Ì *φ°°;

φ* –угловое ускорение; *sin φ~ φ;

φ°°+(m*g*a/Ì)*φ=0

Решение: *φ= φmax*sin(ω0*t+α0);*

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

I-момент инерции физического маятника

а - расстояние от центра масс до оси вращения

Приведенная длина

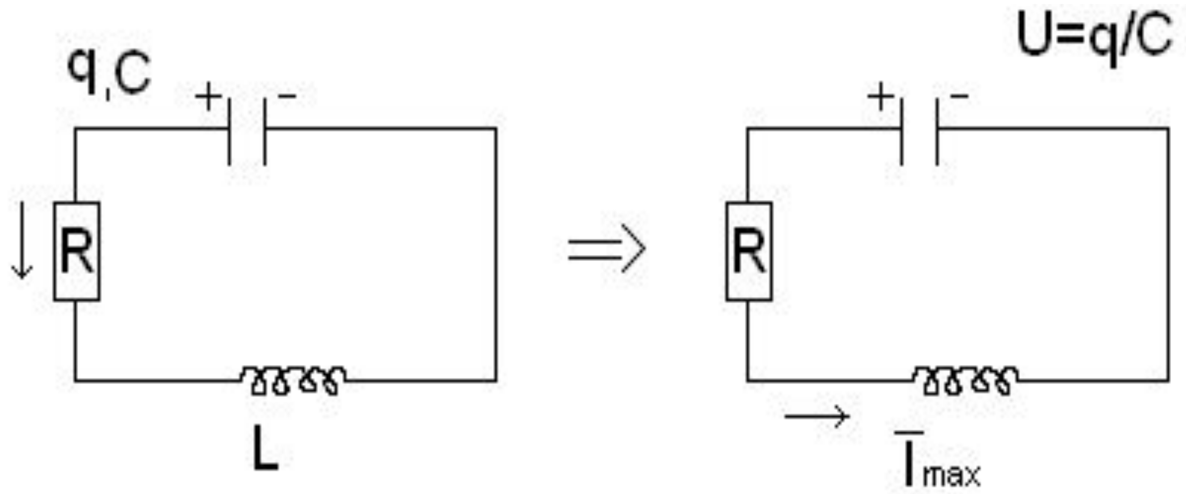
- <u>Приведенной длиной</u> физического маятника называется длина математического маятника, период которого совпадает с периодом данного физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

- *L* – приведенная длина физического маятника

$$L_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}$$

Электромагнитный контур



$$\Sigma\varepsilon_i = \Sigma U_i$$

$$\varepsilon_{инд} = U$$

$$-L\frac{dI}{dt} = U$$

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{c}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Собственная
Частота
колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона

Аналогия между механическими и электрическими колебаниями

Механические колебания

1. *x, φ* –смещение
2. *V* -линейная скорость
3. *m* –масса
4. *k* –коэффициент жесткости

Электрические колебания

1. *q, U*-заряд, напряжение
2. *I* –сила тока
3. *L* –индуктивность
4. *1/C*.

Энергия колебаний

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

В моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия Е равна максимальной потенциальной,

а при прохождения положения равновесия максимальной кинетической

Кинетическая энергия в произвольный момент времени равна:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{m}\dot{\mathrm{x}}^2}{2} = \frac{\mathrm{mA}^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 \mathrm{t} + \varphi_0)$$

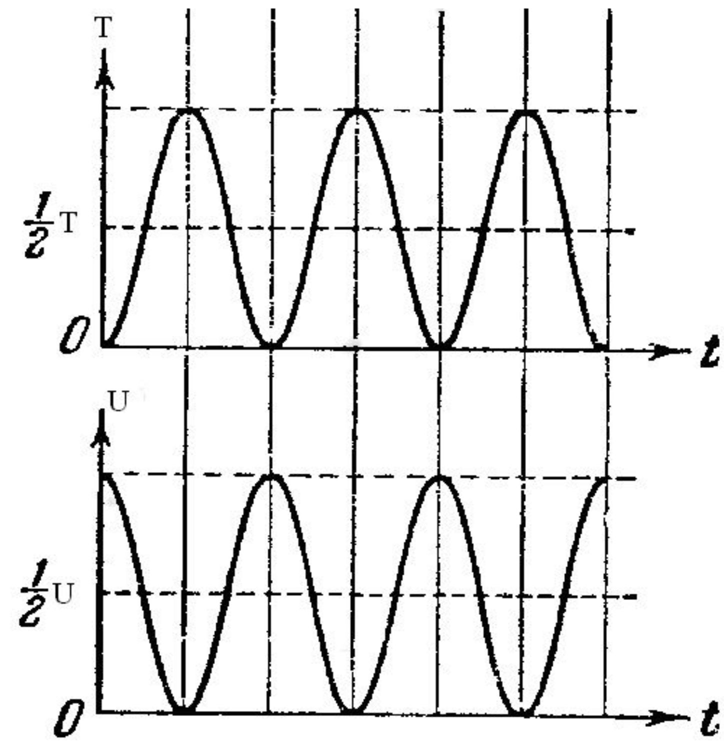
Потенциальная энергия выражается формулой:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сложив вместе кинетическую и потенциальную энергии, получим формулу для полной энергии:

$$\mathrm{E} = \mathrm{U} + \mathrm{T} = \frac{\mathrm{kA}^2}{2} = \frac{\mathrm{mA}^2\omega_0^2}{2} = const$$


E
Полная энергия
Потенциальная энергия
Кинетическая энергия
x
-A
0
+A


T
1/2 T
0
t
U
1/2 U
0
t

Контрольные вопросы

1.Определение гармонических колебаний

2. Записать формулы периодов колебаний математического и физического маятников.

3. Точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = 3\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot t + \frac{\pi}{8}\right]$$

Определить: период колебаний, максимальную скорость и максимальное ускорение точки.

Построить график колебаний