Лекция

Тема: Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Учебные вопросы:

1. Равномерное распределение НСВ.
2. Нормальное распределение НСВ.
3. Экспоненциальное распределение НСВ.

Учебный вопрос №1

Равномерное распределение НСВ

Равномерное распределение

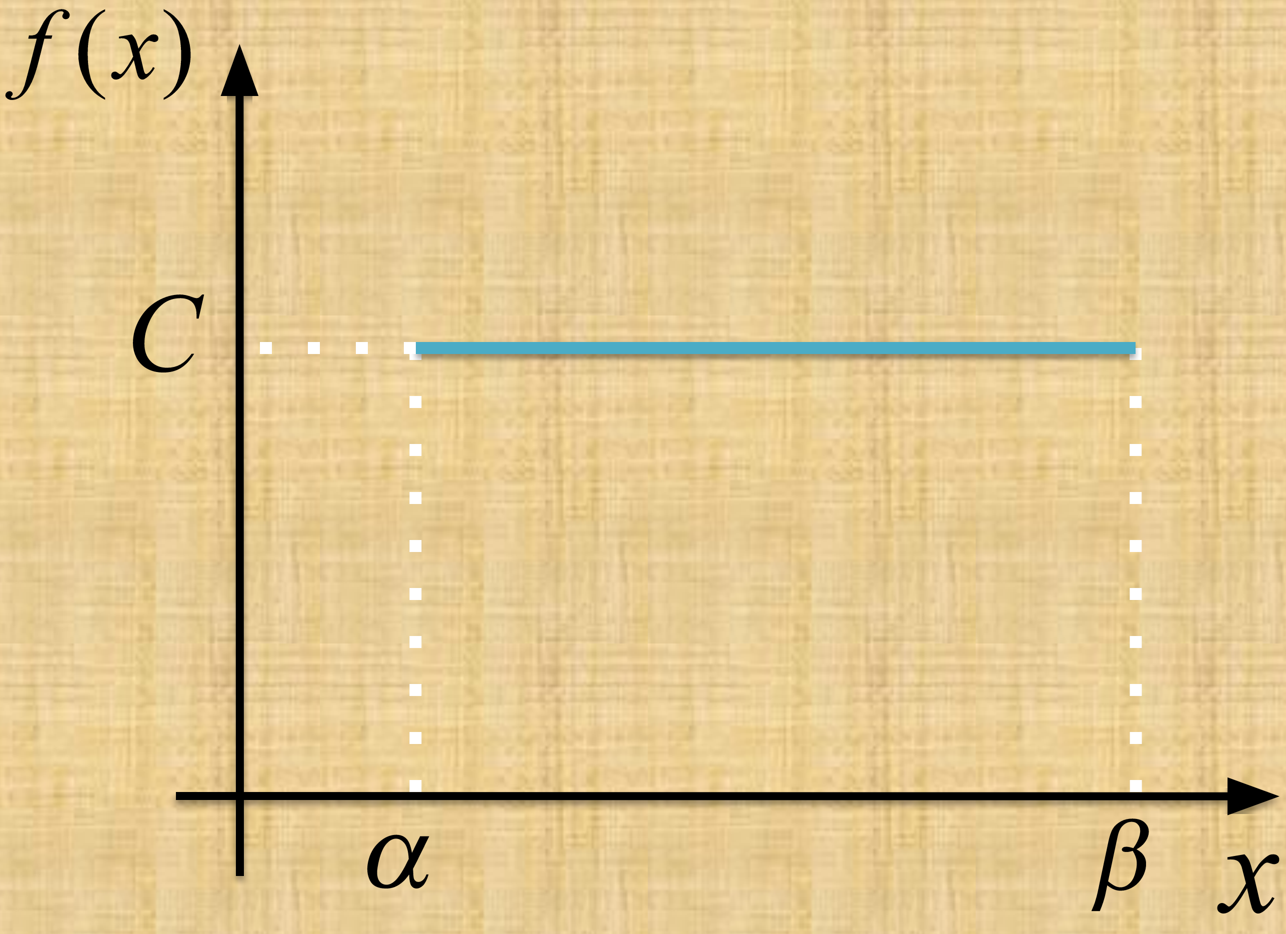
Рассмотрим непрерывную случайную величину *X*, возможные значения которой лежат в некотором интервале и равновероятны.

Плотность вероятности такой случайной величины будет иметь вид:

$$f(x) = \begin{cases} c, & \beta > x > \alpha \\ 0, & x < \alpha, x > \beta \end{cases}$$

Где *c* - некоторая постоянная.

График плотности вероятности



Выразим параметр *C* через *α* и *β*. Для этого используем тот факт, что интеграл от плотности вероятности по всей области должен быть равен 1:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = cx\Big|_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha) = 1$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\beta - \alpha}}$$

Плотность вероятности равномерно распределенной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \beta>x>\alpha\\ 0, & x<\alpha, x>\beta\end{cases}$$

Найдем функцию распределения:

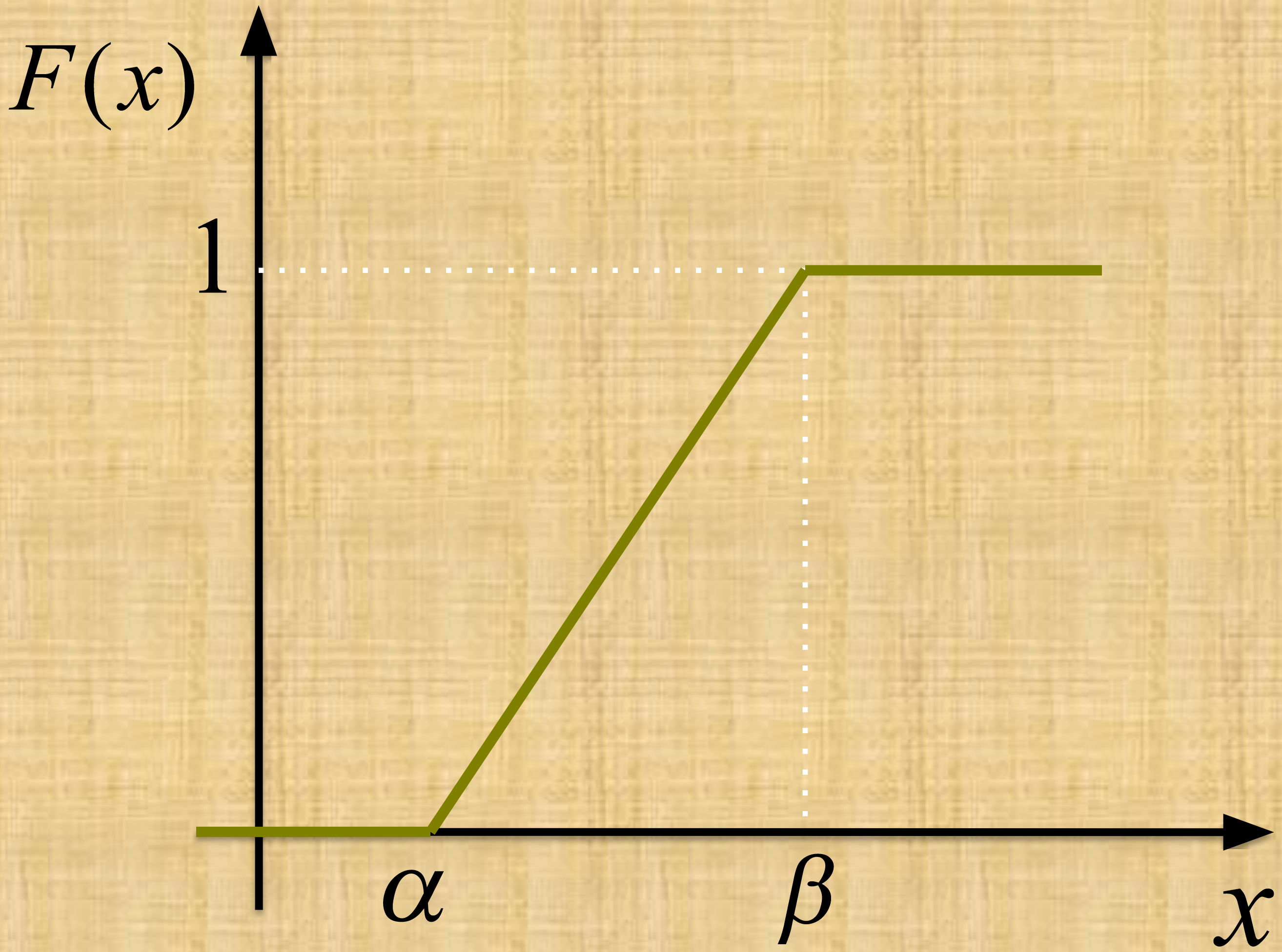
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{\beta-\alpha}dx=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot x\Big|_{\alpha}^{x}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$

График функции распределения



Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиняющейся равномерному распределению.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\beta-\alpha}dx=\left.\frac{x^2}{2(\beta-\alpha)}\right|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}{2\cancel{(\beta-\alpha)}}=\boxed{\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

$$D[X]=M[X^2]-m_x^2$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2}{\beta-\alpha}dx=\left.\frac{x^3}{3(\beta-\alpha)}\right|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3\cancel{(\beta-\alpha)}}=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$D[X] = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} =$$

$$= \frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12} =$$

$$= \frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{12} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Тогда среднеквадратичное отклонение будет иметь вид:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$$

Пример 3

Пусть случайная величина X равномерно распределена на участке [0;100]. Найти вероятности:

$P(0<X<60)$, $P(20<X<80)$,

$P(-10<X<120)$, $P(X=5)$

Решение примера

Для нахождения искомых вероятностей используем формулу:

$$p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Где *F(α) и F(β)* - функция распределения на концах рассматриваемого интервала. Для равномерного распределения

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

На интервале от *α* до*β*. Поэтому

$$p(0 < X < 60) = F(60) - F(0) = \left| \alpha = 0, \beta = 100 \right| =$$

$$= \frac{60-0}{100-0} - \frac{0-0}{100-0} = 0.6$$

$$p(20 < X < 80) = F(80) - F(20) = \frac{80-0}{100-0} - \frac{20-0}{100-0} = 0.6$$

$$p(-10 < X < 120) = F(100) - F(0) = \frac{100-0}{100-0} - \frac{0-0}{100-0} = 1$$

$$p(X = 5) = 0$$

Учебный вопрос №2

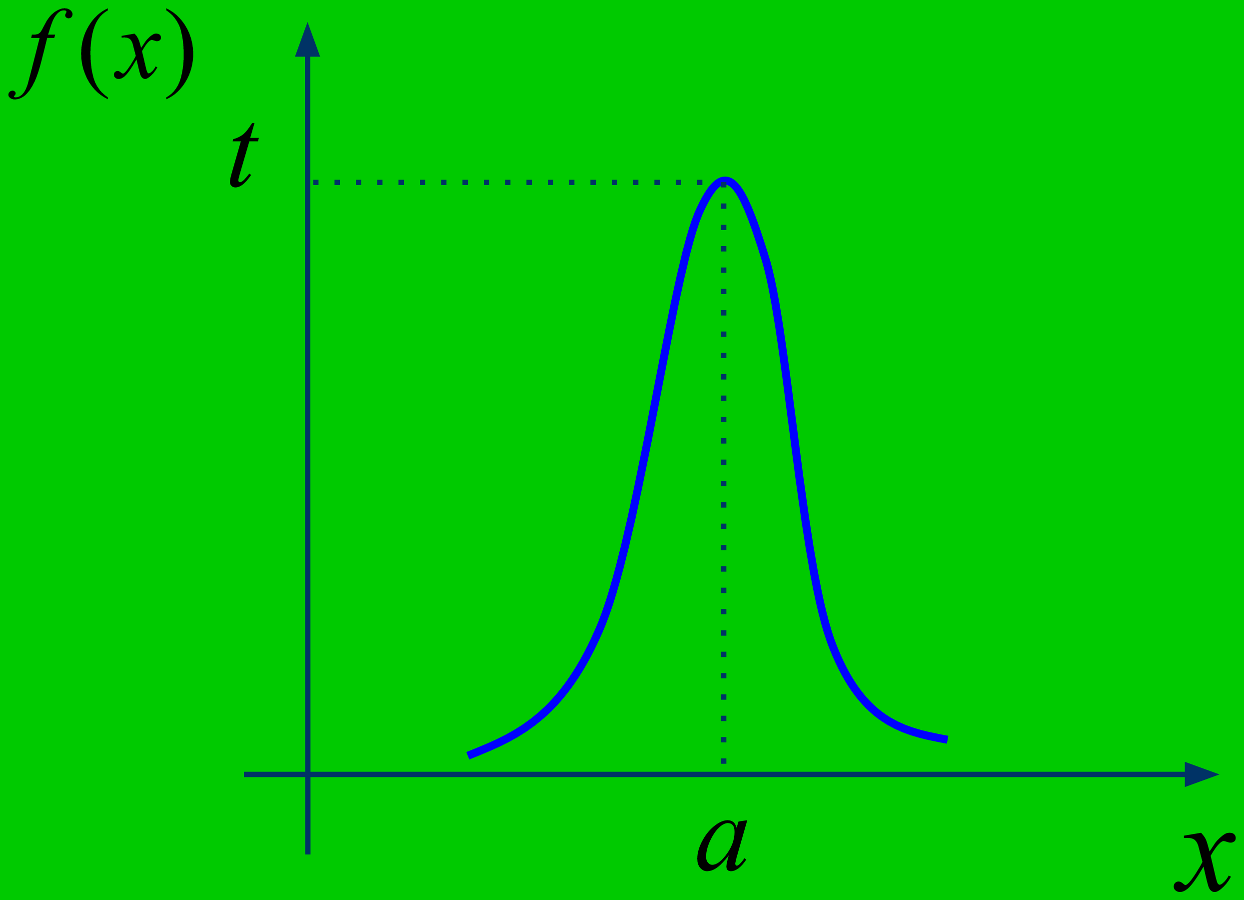
Нормальное распределение НСВ

Нормальный (гауссов) закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределенной <u>по нормальному закону</u> с параметрами а, σ>0, если она имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределения имеет вид:



Где $t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Выясним смысл параметров распределения Гаусса. Для этого вычислим характеристики этого распределения (математическое ожидание и дисперсию).

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

Делаем замену переменной:

$$t=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \qquad x=\sqrt{2}\sigma\cdot t+a$$

$$dx=\sqrt{2}\sigma\cdot dt$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma \cdot t + a) \cdot e^{-t^2} \cdot \sigma\sqrt{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma \cdot t + a) \cdot e^{-t^2} dt =$$

Разбиваем на сумму двух интегралов:

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

Второй интеграл представляет собой интеграл Пуассона:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$

В первом интеграле вносим t под знак дифференциала:

$$=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}d(t^2)+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+a=a$$

Таким образом, параметр a представляет собой математическое ожидание случайной величины.

Теперь найдем дисперсию:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

Делаем замену переменной:

$$t=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \qquad x-a=\sqrt{2}\sigma\cdot t$$

$$dx=\sqrt{2}\sigma\cdot dt$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2}\sigma\cdot t)^2\cdot e^{-t^2}\cdot\sigma\sqrt{2}\cdot dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot e^{-t^2}dt=$$

Этот интеграл берем по частям:

$$t=u; \quad 2t\cdot e^{-t^2}dt=dv$$

$$dt=du; \quad v=-e^{-t^2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-t\cdot e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}(-e^{-t^2})dt\right)=$$

Первое слагаемое в скобках равно 0, так как экспонента в минус бесконечной степени будет стремиться к нулю быстрее, чем возрастает любая степень t.

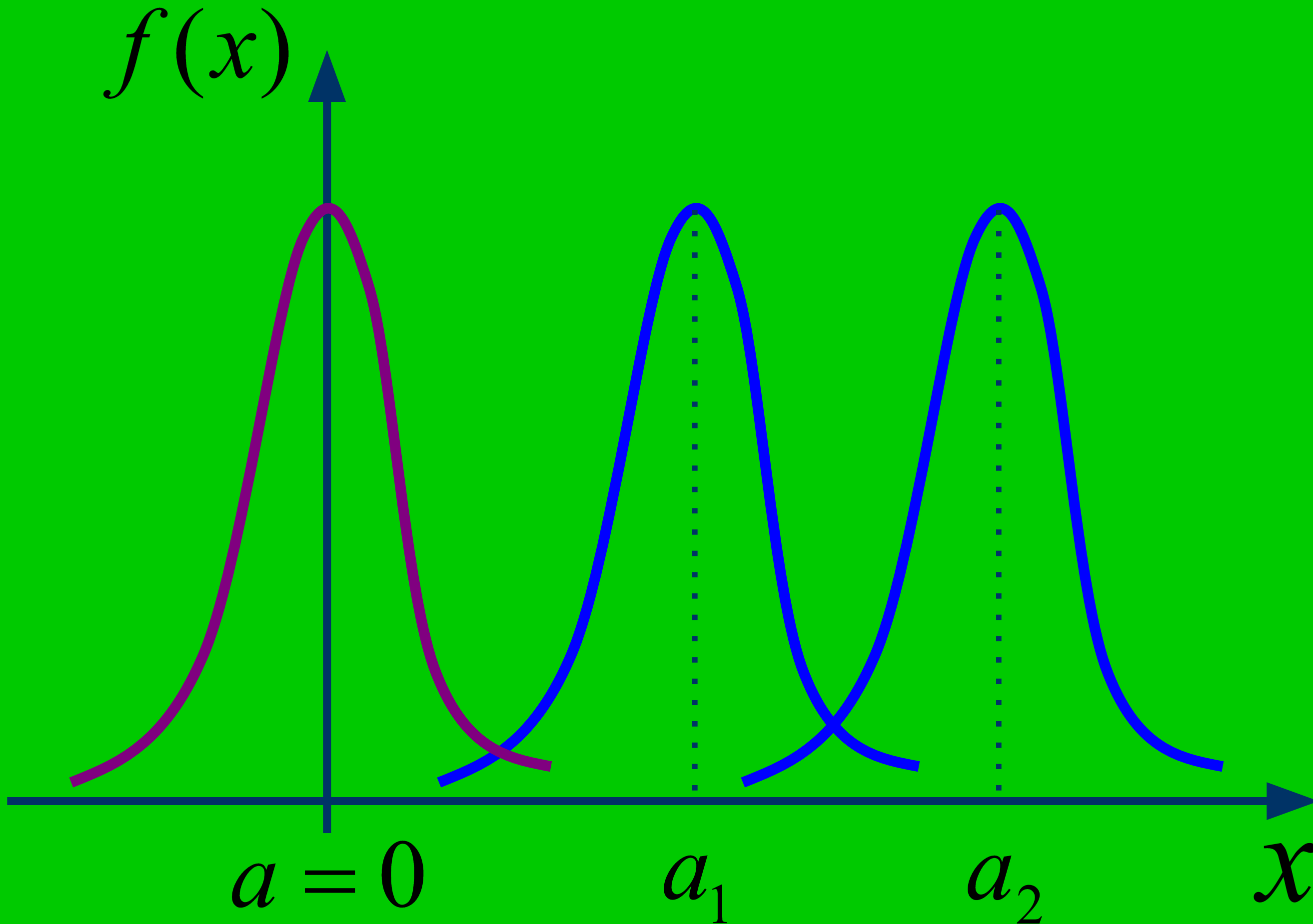
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}} =$$

Этот интеграл представляет собой интеграл Пуассона:

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

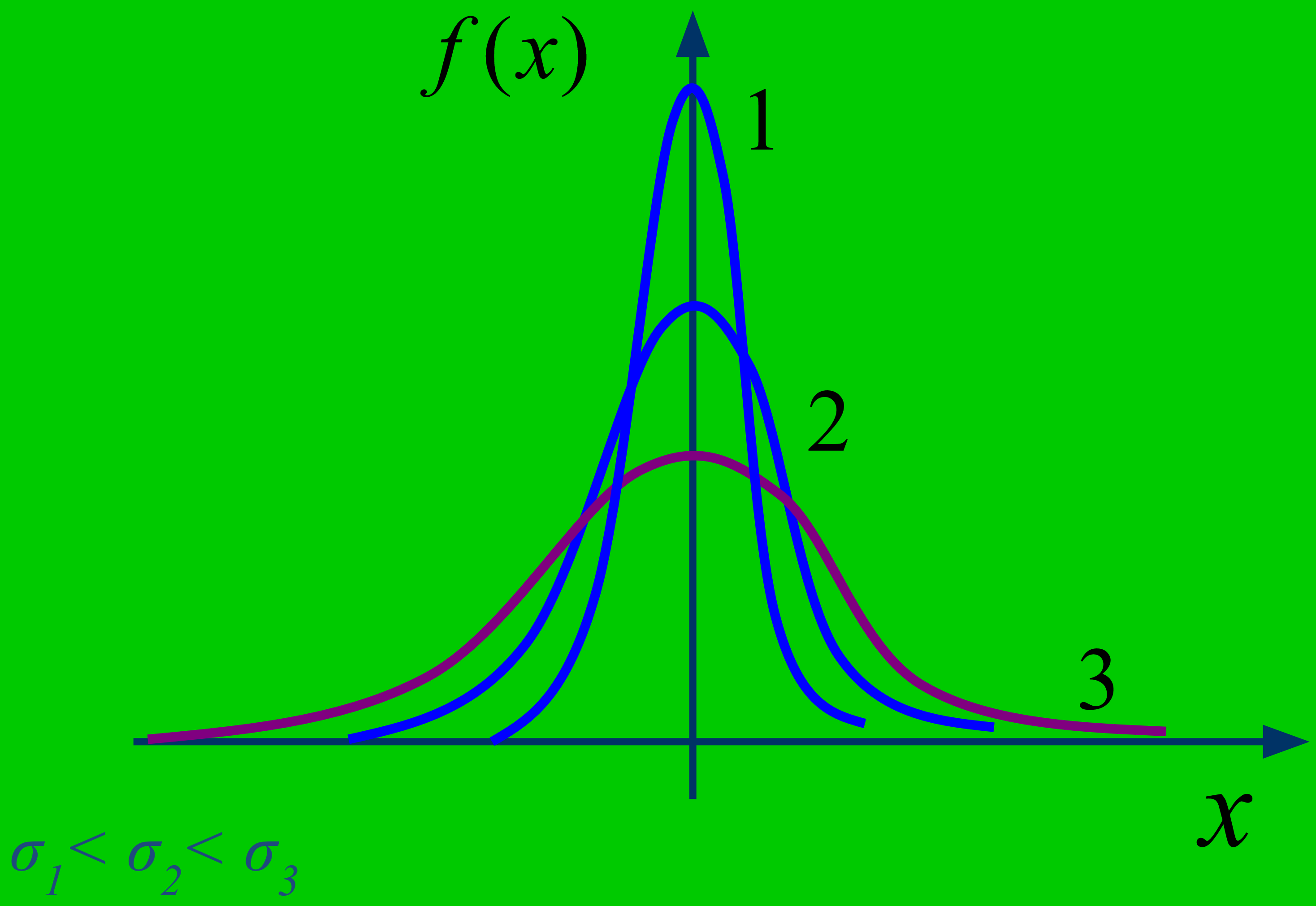
Тогда параметр σ представляет собой среднеквадратичное отклонение.

Если изменять параметр a , кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не изменяя при этом своей формы.



$f(x)$
$a=0$
a_1
a_2
x

Параметр σ характеризует не положение, а саму форму кривой распределения. При его увеличении кривая распределения становится более плоской, и наоборот.



$f(x)$
1
2
3
x
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

То, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a, σ>0 , обозначается

$$X \in N(a,\sigma)$$

При вычислении вероятностей такая случайная величина сводится к случайной величине

$$Z \in N(0,1)$$

Найдем функцию распределения случайной величины X .

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

Сделаем замену переменной:

$$\frac{x-a}{\sigma}=t \quad x=\sigma t+a \quad dx=\sigma dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

Последний интеграл не выражается через элементарные функции, но его можно вычислить через специальную функцию (так называемый интеграл вероятностей):

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Эта функция представляет собой функцию распределения нормальной случайной величины с параметрами a=0, σ=1.

$$= \Phi^*\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = F(x)$$

Функция Ф*(х) называется нормальной функцией распределения.

Ее значения приведены в таблицах.

Но большее распространение имеет функция Лапласа

$$\boxed{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

Так как

$$\Phi^*(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}$$

То

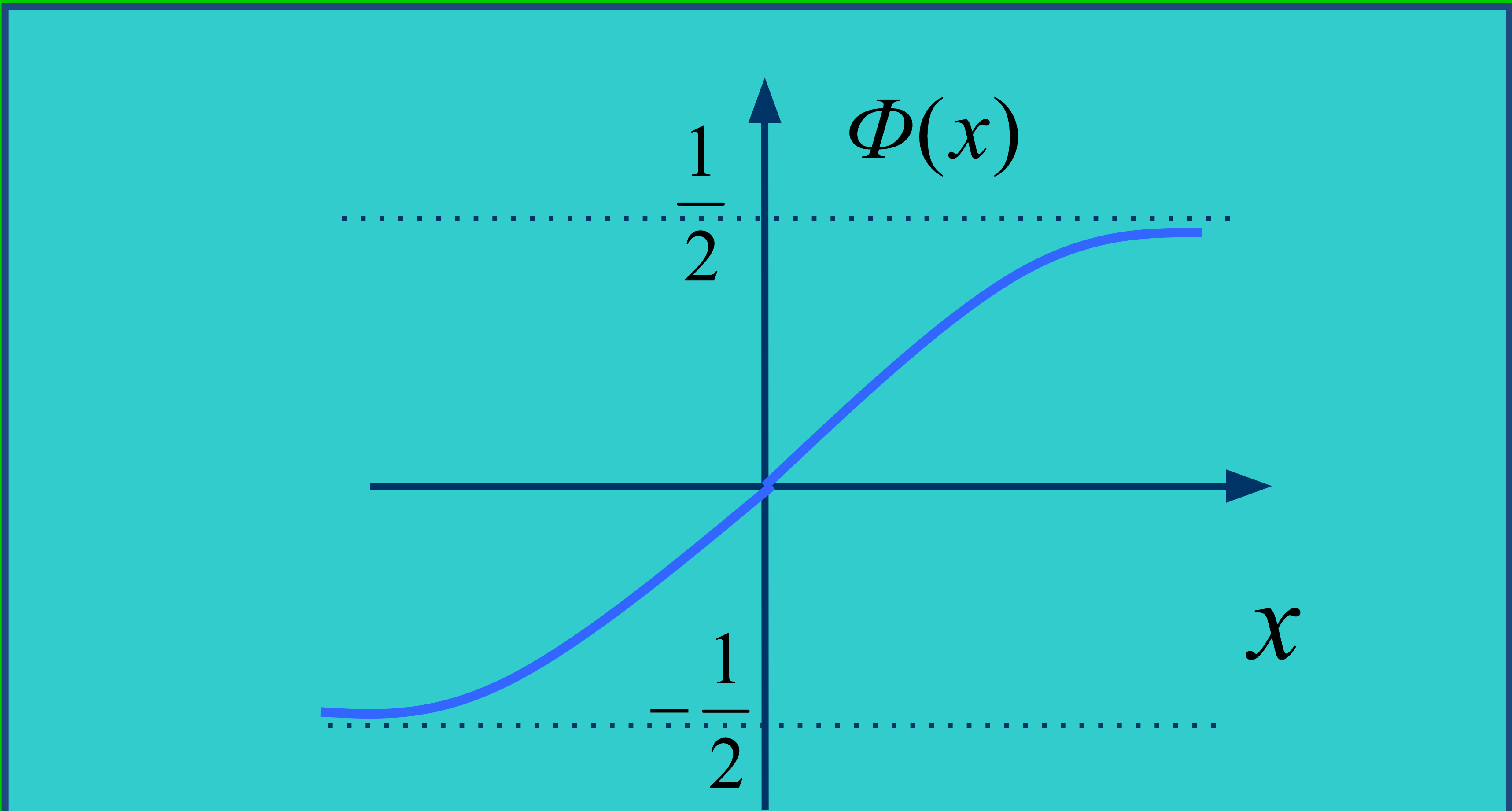
$$\Phi(x)=\Phi^*(x)-\frac{1}{2}$$

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ СВ НА ЗАДАННЫЙ УЧАСТОК

Значения функции Лапласа также находятся по таблице.

Функция Лапласа является нечетной. Ее график имеет вид:



ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Пусть X - нормально распределенная случайная величина с параметрами a, σ. Тогда

$$p(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 1$$

Действительно,

$$p(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = \Phi\left(\frac{a+3\sigma - a}{\sigma}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{a-3\sigma - a}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(3) + \Phi(3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.498 \approx 1$$

ПРИМЕР

Пусть случайная величина X - рост наугад выбранного студента подчиняется нормальному распределению с параметром a=174 см. Определить приближенно параметр σ, полагая, что практически все студенты имеют рост в пределах от 156 до 192 см и найти вероятности p(X>180), p(X<190), p(160<X<190).

РЕШЕНИЕ.

Сначала определим параметр σ. Используем правило «3 сигм». Параметр a=174 см определяет средний рост студентов.

$$p(174 - 3\sigma < X < 174 + 3\sigma) \approx 1$$

Причем $174-3\sigma=156$, $174+3\sigma=192$.

Отсюда $\sigma=6$.

Таким образом, $X \in N(174, 6)$

$$p(180 < X) = p(180 < X < +\infty) =$$

$$= \Phi\left(\frac{+\infty - 174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{180 - 174}{6}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1) = 0.16$$

$$p(X < 190) = p(-\infty < X < 190) =$$

$$= \Phi\left(\frac{190 - 174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 174}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) + \Phi(\infty) = 0.99$$

$$p(160 < X < 190) = \Phi\left(\frac{190-174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{160-174}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) + \Phi\left(\frac{7}{3}\right) = 0.496 + 0.489 = 0.985$$

Учебный вопрос №3

Показателное распределение НСВ

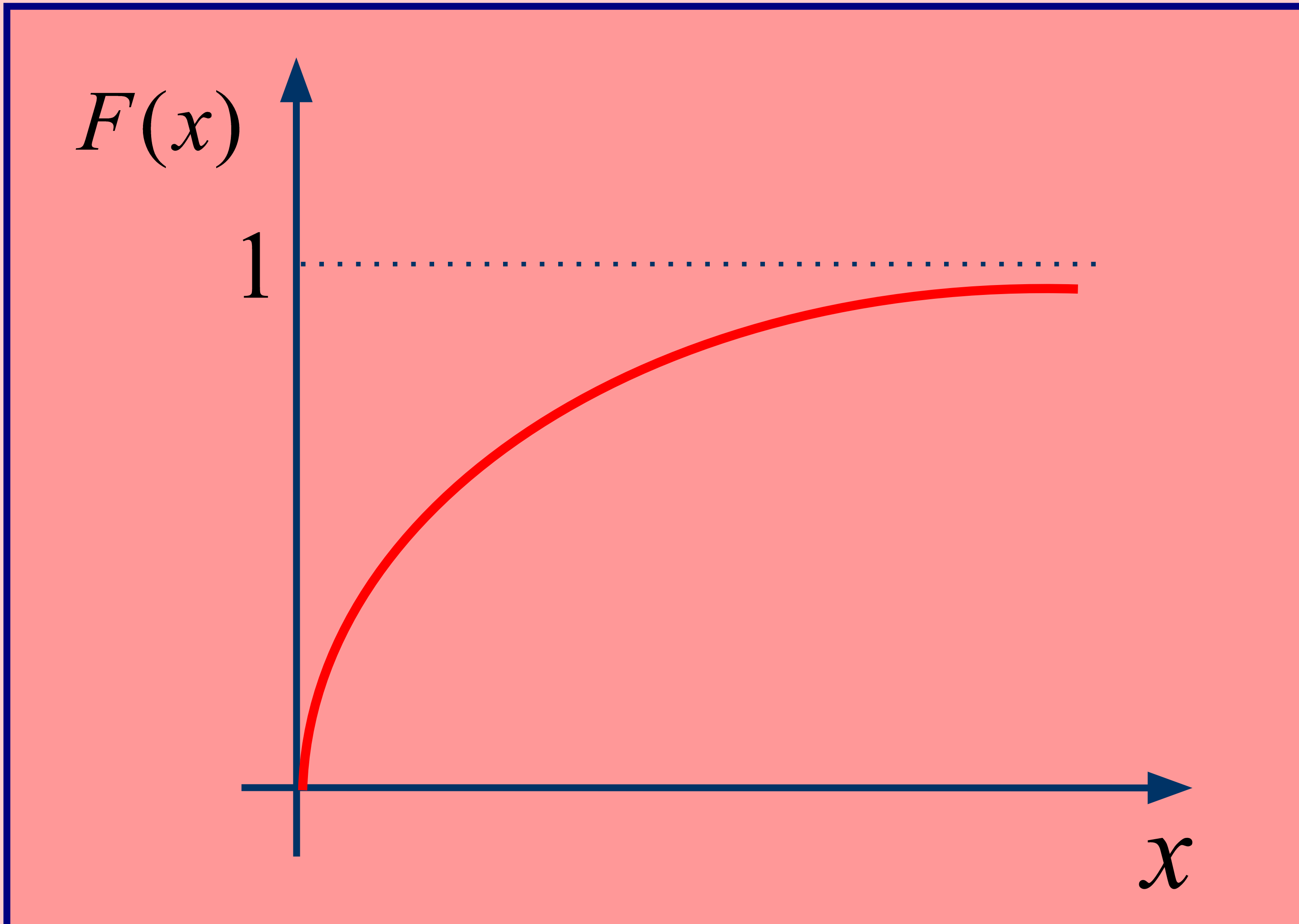
Показательное распределение

Пусть непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \end{cases}$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

График функции распределения имеет вид:



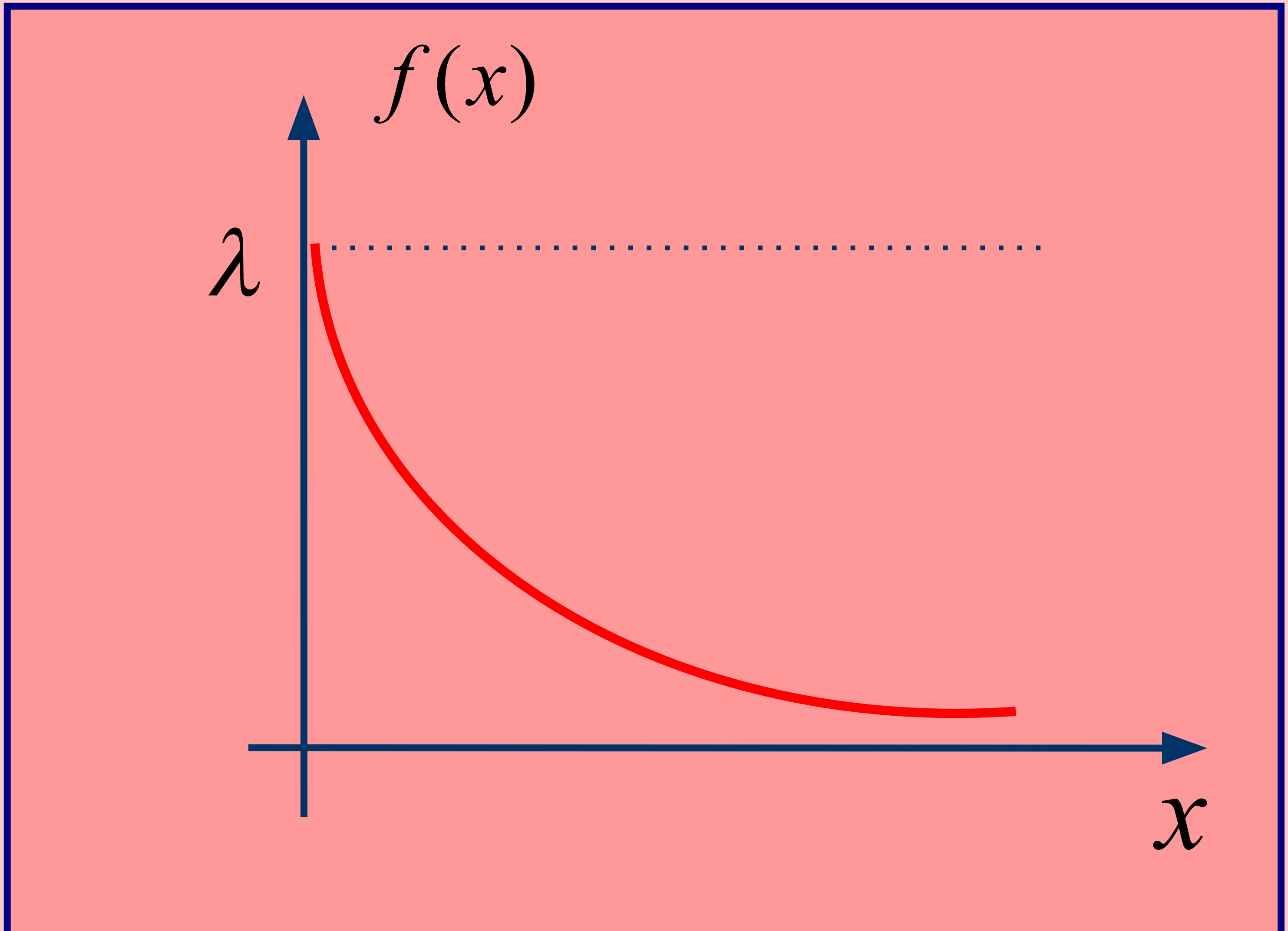
Найдем плотность вероятности этой случайной величины.

Плотность вероятности находится как производная от функции распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ СВ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Кривая распределения имеет вид:



Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по показательному закону.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

Вынесем константы за знак интеграла и перейдем от несобственного интеграла к определенному, стоящему под знаком предела:

$$= \lambda \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \lim_{A \to \infty} \int_{0}^{A} x \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

Полученный определенный интеграл будем брать по частям:

$$u = x \quad dv = e^{-\lambda x}dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \cdot \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_0^A\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx \right)\right) =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^A \right) =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{A \to \infty} \left(-\frac{A}{\lambda} e^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Первые два слагаемых в пределе равны 0, т.к. экспонента в минус бесконечной степени стремиться к 0.

Теперь найдем дисперсию.

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

Как и в предыдущем случае, переходим к пределу определенного интеграла:

$$= \lambda \cdot \lim_{A \to \infty} \int_0^A x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

Берем интеграл по частям:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-\lambda x} dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \cdot \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_0^A \left(-\frac{2}{\lambda} x \cdot e^{-\lambda x} dx \right)\right) =$$

Полученный интеграл еще раз берем по частям:

$$u = x \quad dv = e^{-\lambda x} dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \cdot \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^A + \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right)\right)\right) =$$

Полученный интеграл табличный:

$$=\lambda\cdot\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^A\right)\right)=$$

Подставляем пределы интегрирования:

$$=\lambda\cdot\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{A^2}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{A}{\lambda}e^{-\lambda A}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)=\frac{2}{\lambda^2}$$

Теперь находим дисперсию и среднеквадратичное отклонение:

$$D[X]=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\frac{1}{\lambda}$$