Бурятский филиал МЭСИ

Преподаватель: Асалханова Л.И.

Понятие определенного интеграла

«Математика есть способ называть разные вещи одним именем»

Анри Пуанкаре

Актуализация опорных знаний

Вопросы

- 1) Что называется первообразной?
- 2) Что называется неопределённым интегралом?
- 3) Сформулировать свойства неопределённого интеграла

Актуализация опорных знаний

- Ответы

1)Функция F (x) *называется первообразной функцией для функции f* (x) *на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка F'(x) = f(x).*

2) Совокупность всех первообразных для функции f (x) *на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f (x) и обозначается* $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Актуализация опорных знаний

- *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.* $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
- *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению,* т.е. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
- *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого,* т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла,* т.е.

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$$

- *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Актуализация опорных знаний

Вопросы:

4) Назовите действие обратное интегрированию.

5) Назовите методы интегрирования.

5) Правильность интегрирования можно проверить…

6) Дописать продолжение формул

$\int dx =$

$\int \sin x\, dx =$

$\int x^{\alpha} dx =$

$\int \cos x dx =$

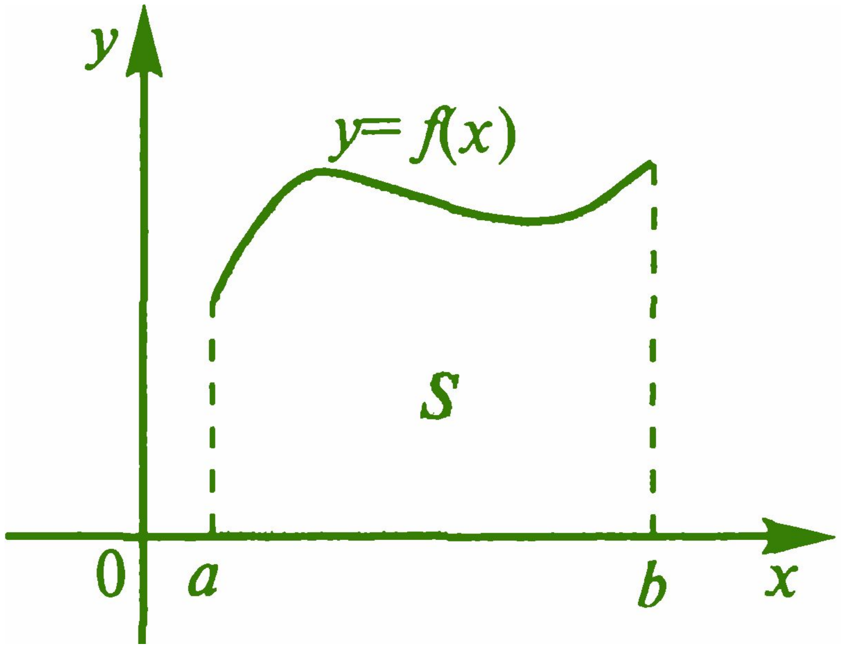
$\int \frac{dx}{x} =$

$\int a^{x} dx =$

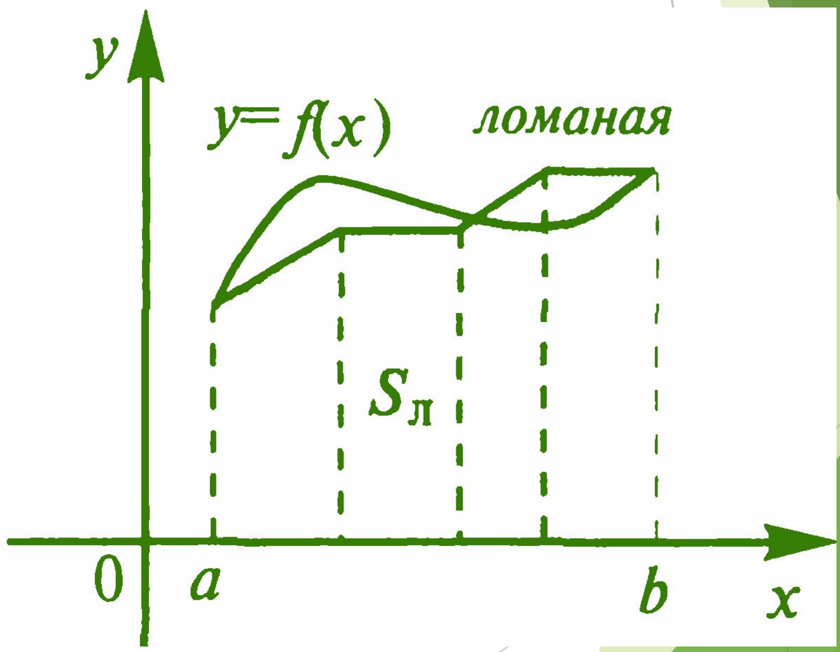
Содержание

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке *[a, b]* задана неотрицательная функция *y=f(x)*. Требуется найти площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс $y = 0$



$S \sim S_л$



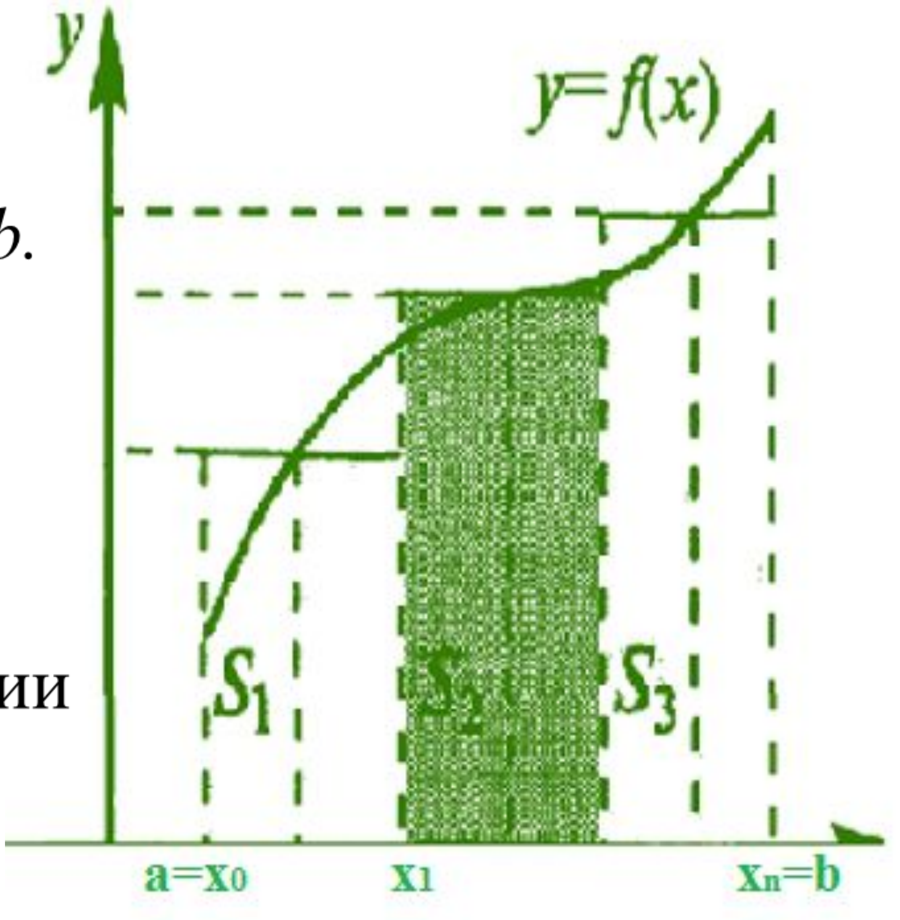
За искомую площадь S возьмем предел площади $S_л$ под ломаной в предположении неограниченного приближения ломаной к заданной кривой.

Понятие интегральной суммы

Пусть на отрезке *[a, b]* задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок *[a, b]* на *n* элементарных отрезков точками $x_0, x_1, \ldots x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i-1}]$ разбиения выберем некоторую точку ξ_i, и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, \ldots n$. Сумму вида

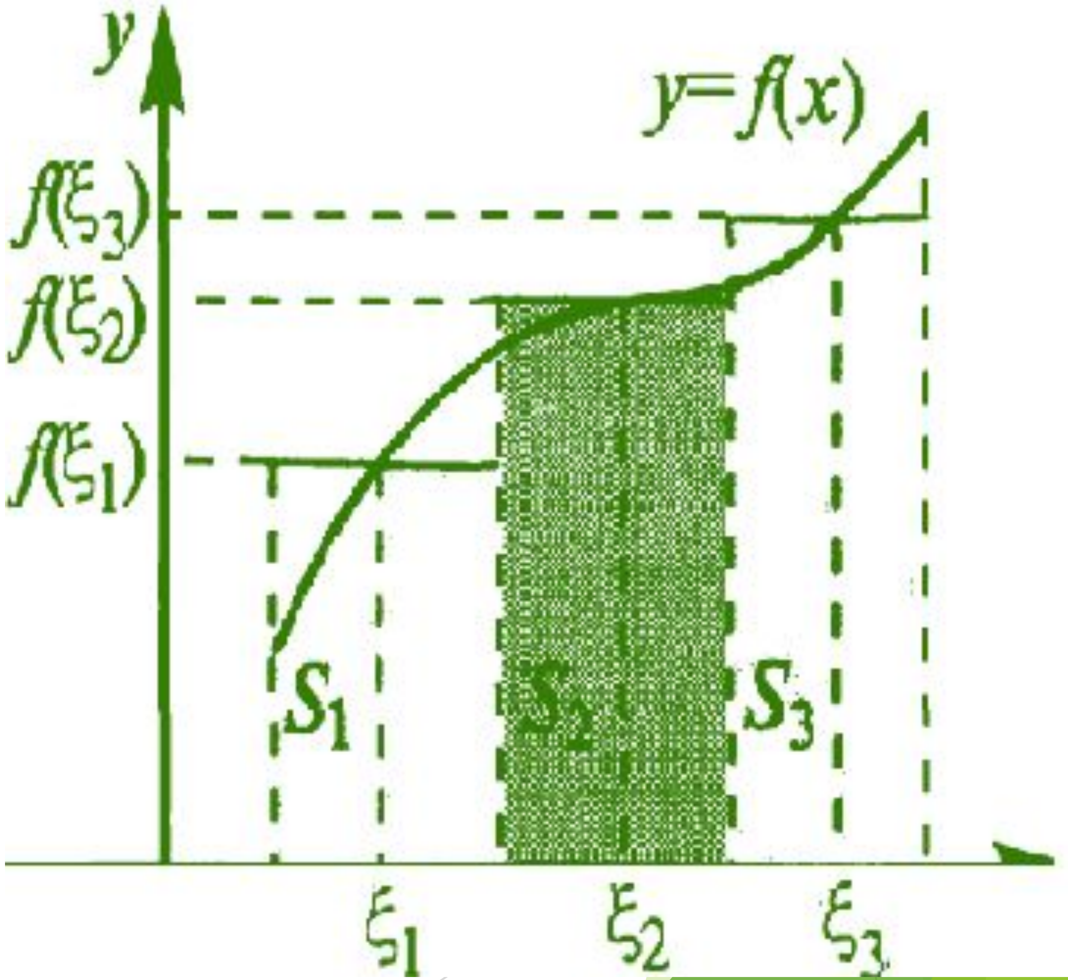
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

будем называть *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на *[a, b]*.



Геометрический смысл интегральной суммы

Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Отдельное слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы в этом случае равно площади S_i, прямоугольника со сторонами $f(\xi_i)\ \Delta x_i$, где $i = 1, 2, n$



$$S_л = S_1 + S_2 + ... + S_n$$

Понятие определенного интеграла

$max\,\Delta x_i$ -максимальная из длина отрезков $[\,x_i\,,\,x_{i-1}]$, где $i = 1,2,..n.$

Определение. Пусть предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении $max\,\Delta x_i$, к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_0, x_1,\dots$ и точек $\xi_1, \xi_2, \dots$.Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, т.е.

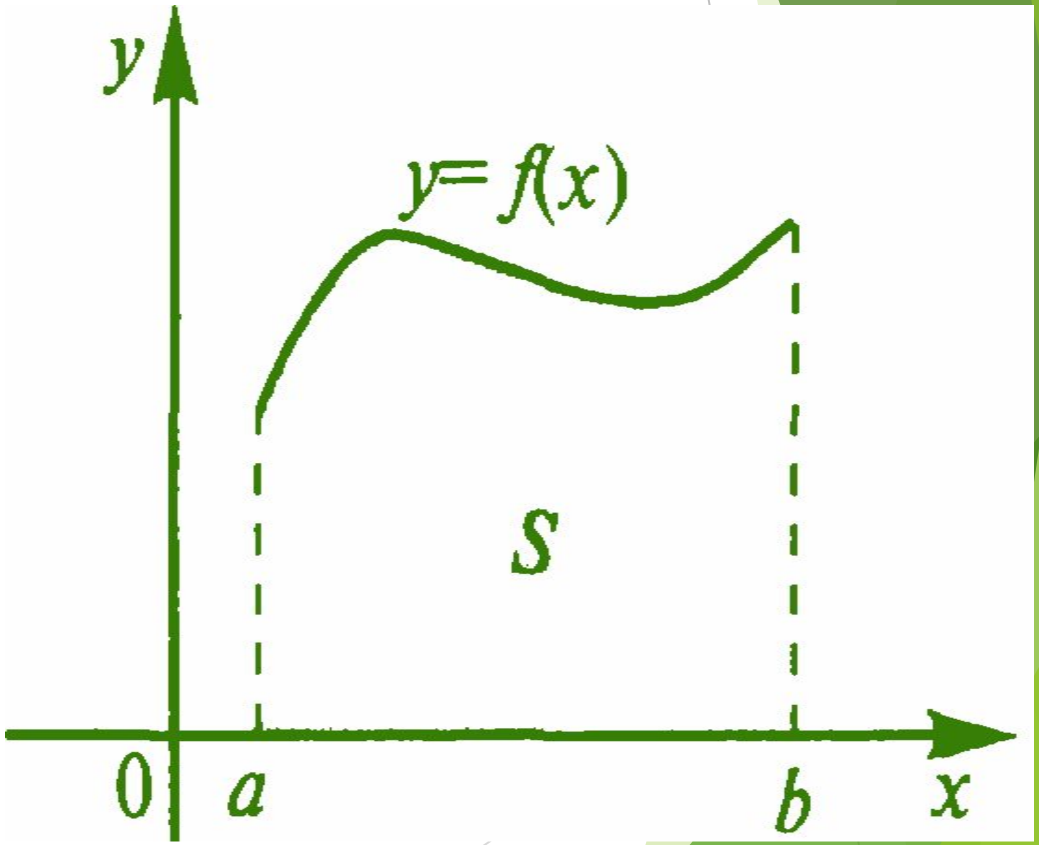
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Функция *y= f(x)* неотрицательна на отрезке *[a, b]*, где $a < b$,

$\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади

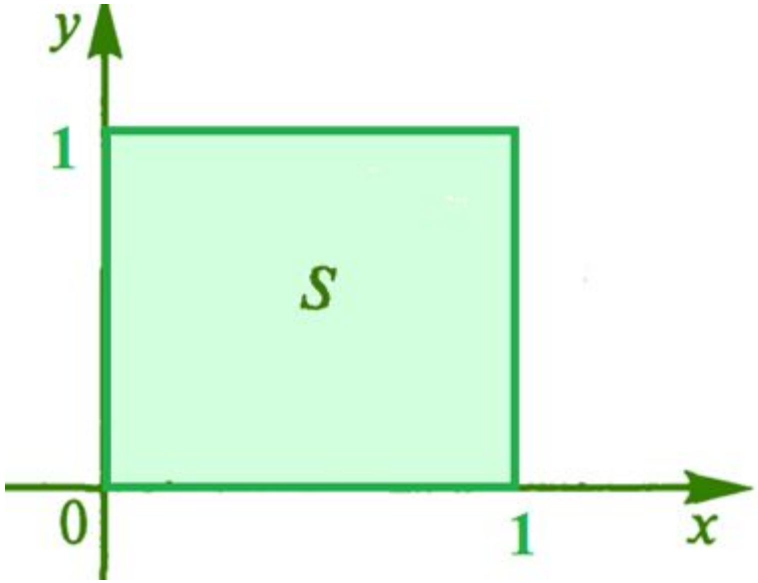
S под кривой *y = f(x) на [a, b]*

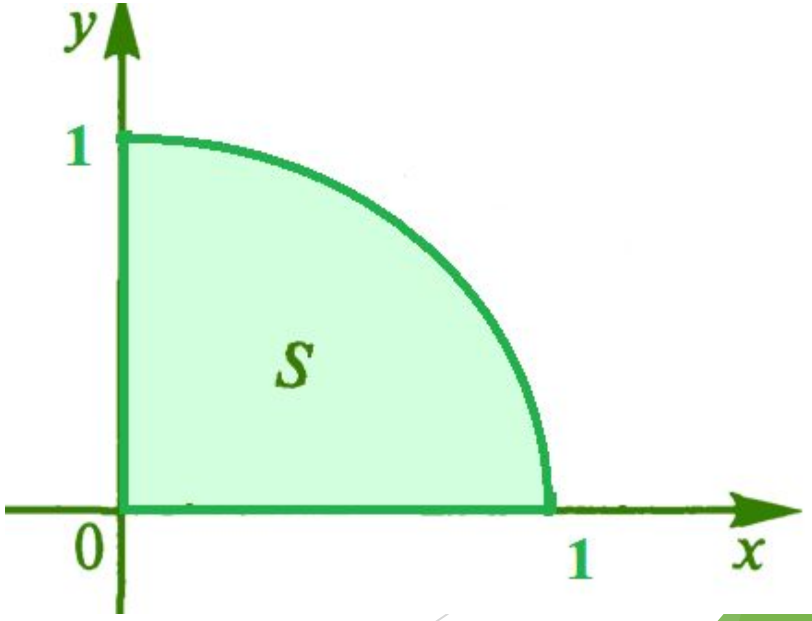


Рассмотрим значения некоторых интегралов, используя известные планиметрические формулы для площадей плоских фигур. Например,

$$\int_0^1 dx=1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$





Экономический смысл интеграла

Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции u, произведённой за промежуток времени $[0, T]$. Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ($f(t)$ — постоянная функция), то объем продукции Δu, произведенной за некоторый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, задается формулой $\Delta u = f(t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближенное равенство $\Delta u = f(\xi)\,\Delta t$, где $\xi \in [t, t + \Delta t]$, которое оказывается тем более точным, чем меньше Δt.

Экономический смысл интеграла

Разобьем отрезок *[0, T]* на промежутки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для величины объема продукции произведенной за промежуток времени имеем $\Delta u_i = f(\xi_i)\ \Delta t_i$ где $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда при стремлении $max\ \Delta u_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$U = \lim_{max\ \Delta u_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta t_i$$

Окончательно, получаем $U = \int_0^T f(t)dt$

f(t) — *производительность труда в момент t*, то $\int_0^T f(t)dt$ *есть объем выпускаемой продукции за промежуток [0, T].*

Условие существования определенного интеграла

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна*

на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Пример нахождения определенного интеграла на основании определения

Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$

Р е ш е н и е. Запишем выражение для интегральной суммы, предполагая, что все отрезки $[x_i, x_{i-1}]$, разбиения имеют одинаковую длину Δx_i, равную 1/n, где n — число отрезков разбиения, причем для каждого из отрезков $[x_i, x_{i-1}]$, разбиения точка ξ совпадает с правым концом этого отрезка, т.е. $\xi\, i = x_i = i/n$, где $i = 1, 2, ..., n$. $y = x^2$ интегрируемая функция. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Пример нахождения определенного интеграла на основании определения

Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда равна

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

Непосредственное вычисление определенного интеграла связано с трудностями – интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую нелегко преобразовать их к виду, удобному для вычисления пределов.

Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площади фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

1. Свойства определенного интеграла

Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

<u>Доказательство</u>

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

2. Свойства определенного интеграла

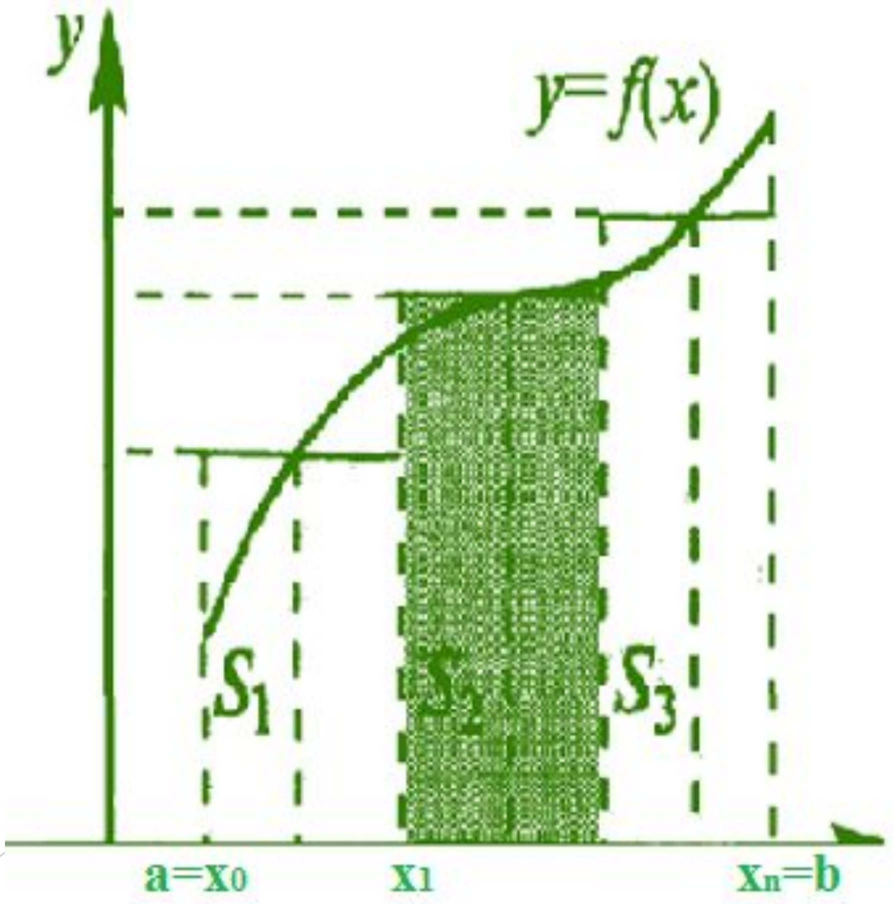
При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

<u>Доказательство</u>

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$-\lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{n}^{i=1} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)dx$$



3. Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b dx = b - a$$

<u>Доказательство</u>

$$\int_a^b dx = \underset{\max \Delta x \to 0}{Lim} (1\Delta x_1 + 1\Delta x_2 + \ldots + 1\Delta x_n) = b - a$$

4. Свойства определенного интеграла

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$$

<u>Доказательство</u>

Пусть фиксированы разбиение отрезка *[a, b]* и выбор точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на каждом из отрезков разбиения. Используя ассоциативный (распределительный) закон умножения чисел, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} К\, f(\xi_i)\Delta x_i = К \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Перейдем к пределу в левой и правой части последнего равенства при $max\, \Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} К\, f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{max\Delta x\to 0} К\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = К\lim_{max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta$$

5. Свойства определенного интеграла

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

<u>Доказательство</u>

$$\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx = \lim_{max\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{max\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$\lim_{max\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i))\,\Delta x_i$$

6. Свойства определенного интеграла

Если на [a, b]

$$f(x) \le \varphi(x) \text{ , то } \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

т.е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

<u>Доказательство</u>

$$\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx = \underset{\max \Delta x \to 0}{Lim} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - \varphi(\xi_i))\Delta x_i \le 0$$

По свойству 5 получаем

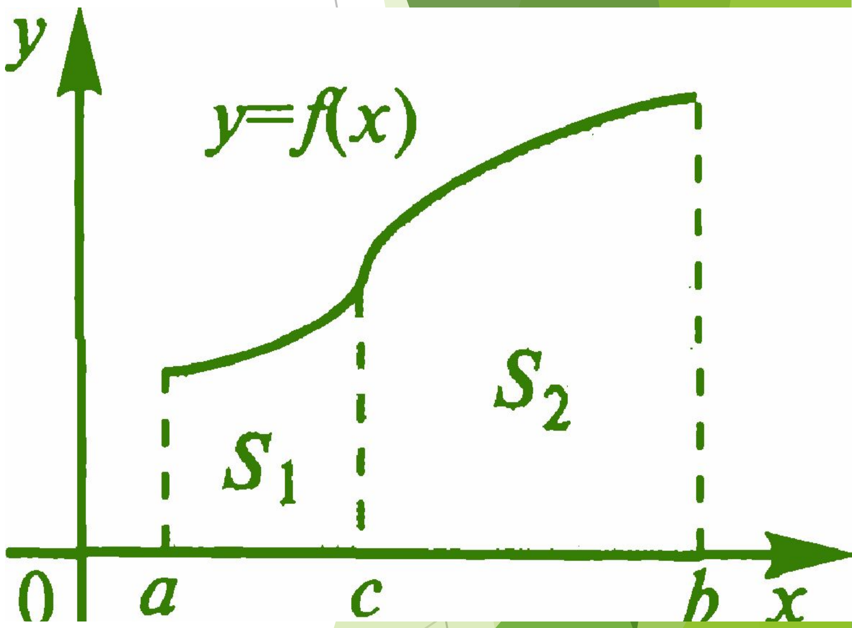
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x) \le 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)$$

7. Свойства определенного интеграла

Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых *a, b, c:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Доказательство

$$\int_a^b f(x)dx = S \quad \int_a^c f(x)dx = S_1 \quad \int_c^b f(x)dx = S_2$$

8. Свойства определенного интеграла

Если *M* – наибольшее значение функции *f(x)* на отрезке *[a;b],* а *m* – наименьшее значение функции *f(x)* на отрезке *[a;b],* то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

<u>Доказательство</u>

$m \leq f(x) \leq M$ по свойству 6. $\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\ dx$

по свойству 4

$$\mathrm{m}\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$$

9. Свойства определенного интеграла

a) Интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку равен нулю

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

b) Интеграл от четной функции по симметричному отрезку равен удвоенному
интегралу по половине отрезка

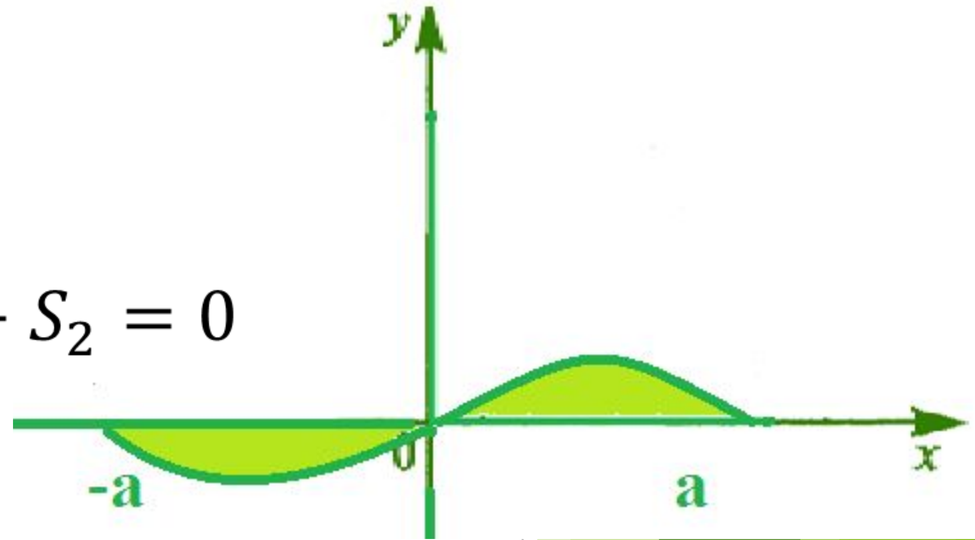
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)$$

9. Свойства определенного интеграла

<u>Доказательство</u>

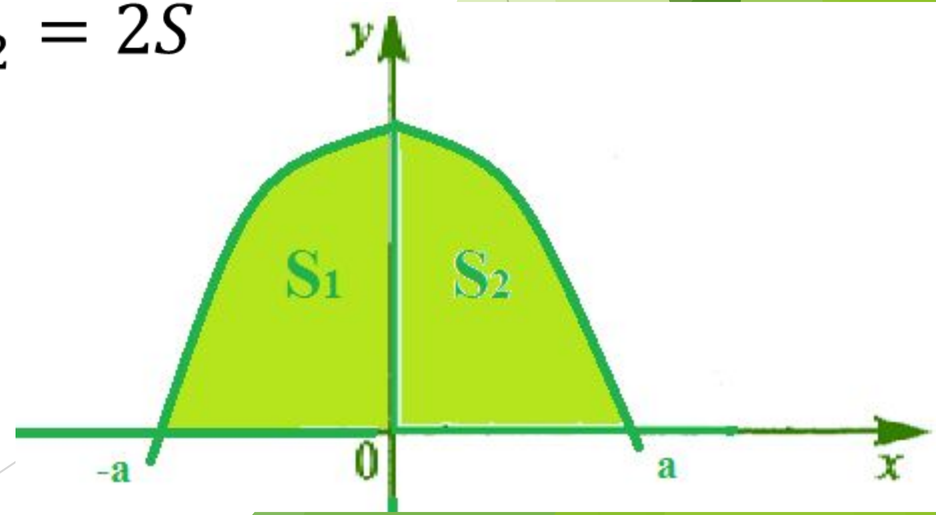
a) По свойству 7

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -S_1 + S_2 = 0$$



b) По свойству 7

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = S_1 + S_2 = 2S$$



Теорема о среднем

Теорема. Если функция непрерывна на *[a, b]*, то существует такая точка, что

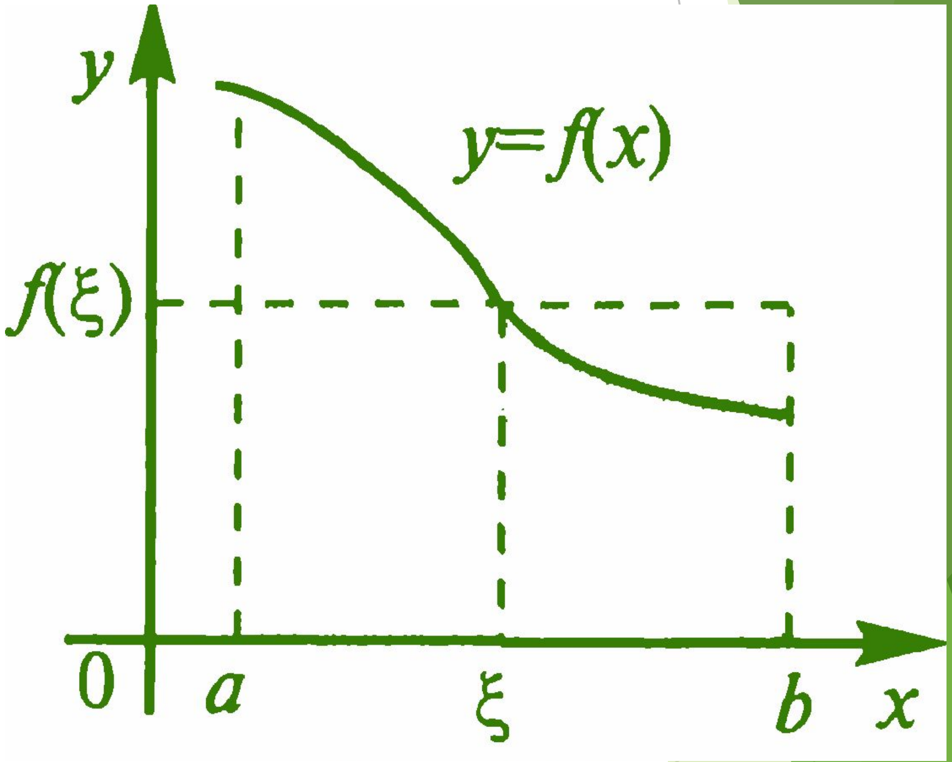
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство $\quad m \le f(x) \le M$

Тогда $\quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

найдется такое число $\xi \in [a, b]$, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$



Найдется такая точка ξ из отрезка [a, b], что площадь под кривой y= f(x) *на [a, b] равна площади прямоугольника со сторонами $f(\xi)$* и *b— a.*

Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция *f(x)* интегрируема на отрезке *[a,b]*, то она интегрируема и на отрезке *[a, x]*, где $x \in [a,b]$, т.е. существует интеграл

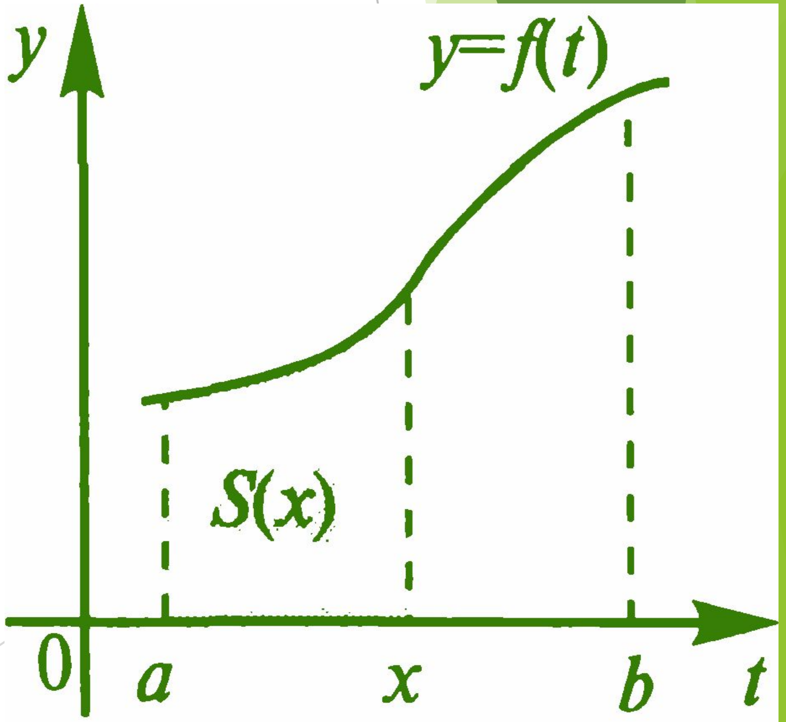
$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Этот интеграл является функцией *x* , и называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема. Если *f(x)* - непрерывная на отрезке *[a,b]* . Тогда в каждой точке *x* отрезка *[a, b]* производная функции Ф(x) по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции

f (x) , *т.е.* $\Phi'(x)=f(x)$, или $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

Следствие. $\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C$



Формула Ньютона - Лейбница

Теорема. Если $F(x)$есть некоторая первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная $f(x)$.

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ -есть тоже первообразная $f(x)$. Но любые две первообразные функции отличаются лишь на постоянную величину С, следовательно

$$\int_a^x f(t)dt\text{-}F(x)=C$$

Постоянную вебличину C легко определить, положив в равенстве $x=a$ получаем $C = -F(a)$ так как $\int_a^a f(x)dx = 0$, то $\int_a^x f(t)dt\text{-}F(x)=\text{-}F(a)$

Формула Ньютона - Лейбница

$\int_a^x f(t)dt$-*F(x)*=-*F(a)* или $\int_a^x f(t)dt$=*F(x)*-*F(a)* Положив, *x = b получаем*

формулу *Ньютона-Лейбница.*

Это основная формула интегрального исчисления. Она дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов непрерывных функций. Только с открытием этой формулы определенный интеграл смог получить то значение в математике, которое он имеет в настоящее время Разность принято записывать следующим образом:

$$F(x)-F(a) = F(x)\big|_a^b$$

где символ называется знаком двойной подстановки.

Пример

Вычислить: $\int_0^1 x^2 dx$

Произвольная первообразная для функции $f(x) = x^2$ имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3}$+C. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона—Лейбница возьмем такую первообразную, у которой С = 0. Тогда $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Пример

Вычислить:

[illegible]

[illegible]

Решение

Решение

Используя формулу

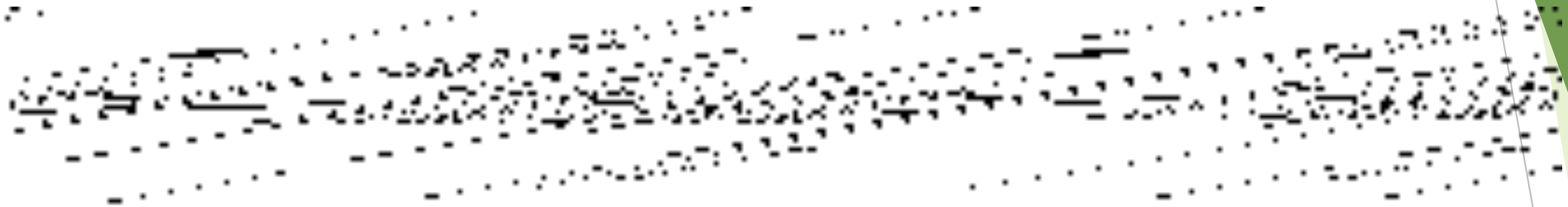
получим

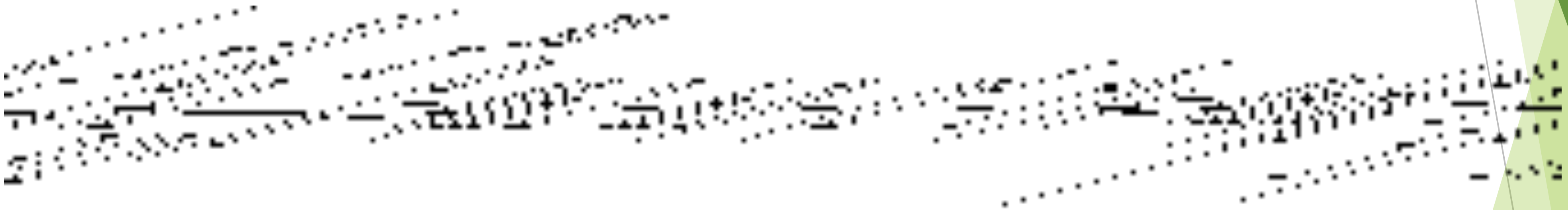
Пример

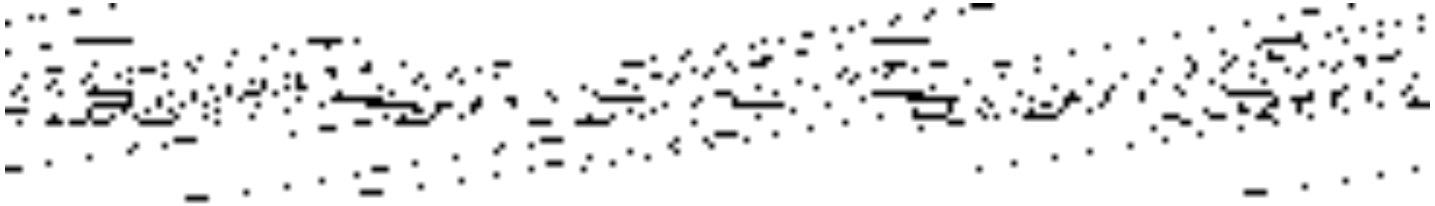
Вычислить:

[illegible]

Решение







Использованная литература

- Высшая математика для экономистов. Кремер Н.Ш.(ред.) – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2010
- Дадаян А.А. Математика– М.: ФОРУМ, 2012