Поверхностные интегралы первого рода

Выполнила: студ. Гр. 2У00 Крутова Н.П.
Проверила: Тарбокова Татьяна Васильевна

Определение

- Логическое продолжение понятия двойного интеграла, когда областью интегрирования является некоторая поверхность, а подынтегральной функцией служит функция трёх независимых переменных

- Свойства практически совпадают со свойствами двойного интеграла

Поверхностный интеграл

- Первого рода
- Второго рода

Поверхностный интеграл 1-го рода

- Разобьём поверхность σ на n непересекающихся элементарных поверхностей, найдём элемент массы i -го элемента разбиения
- $\Delta m_i = f\,(M_i)\Delta\sigma_i$, $M_i \in \Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Предел интегральной суммы:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\Delta\sigma_i \to 0 \\ 1\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = m$$

- если он существует, не зависит от способа разбиения поверхности σ на элементарные поверхности и выбора точек M_i на каждой из них, называется поверхностным интегралом по площади поверхности (первого рода) и равен массе m поверхности σ, ограниченной замкнутой кривой L ,если поверхностную плотность на этой поверхности задаёт функция $\mu = f$)

Интегральная сумма

Интегральной суммой 1-го рода для функции $f(x, y, z)$ поверхности называется сумма произведений значений функции в выбранных точках M_i (x_i, y_i, z_i) на площади соответствующих элементарных площадок

Правило вычисления поверхностных интегралов 1-го рода

Чтобы вычислить поверхностный интеграл по площади, нужно привести его к двойному интегралу:

- в подынтегральную функцию вместо z подставить его выражение из уравнения поверхности
- элемент поверхности dσ заменить дифференциальным выражением

$$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy;$$

- вычислить полученный двойной интеграл по области D_{xy} – проекции поверхности σ на плоскость XOY

Свойства

- Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла первого рода
- Поверхностный интеграл первого рода алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме поверхностных интегралов первого рода от этих функций
- Если поверхность разбита на две части, не имеющие общих внутренних точек

$$\int_{\theta} f(M)d\theta = \int_{\theta_1} f(M)d\theta + \int_{\theta_2} f(M)d\theta + \ldots + \int_{\theta_k} f(M)d\theta$$

Свойства

- Если всюду на поверхности (σ) функция f(x, y, z)>0, или f(x, y, z)≥ 0, то $\iint_\sigma f(x,y,z)d(\sigma) \geq 0$
- Если всюду на поверхности (σ) имеет место неравенство $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$, то $\iint_\sigma f(x,y,z)d(\sigma) \leq \iint_\sigma \varphi(x, y, z)d(\sigma)$
- Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x, y, z) на поверхности (σ) , то $m*S \leq \iint_\sigma f(x,y,z)d(\sigma) \geq M*S$, где S- площадь поверхности (σ)

Теорема о среднем для поверхностного интеграла первого рода

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности (σ), то найдётся такая точка $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\sigma)$, что справедливо равенство $\iint_{\sigma} f(x,y,z)d(\sigma)=f(x_0, y_0, z_0)*S$, где S – площадь поверхности (σ) .

Приложения поверхностного интеграла

Пусть Ф −материальная поверхность с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z) \in Ф$.

Тогда справедливы следующие формулы:

а) $M = \iint\limits_{\Phi} \rho(x, y, z)\, dS$ – масса поверхности;

б) $M_{xy} = \iint\limits_{\Phi} z\, \rho(x, y, z)\, dS$, $M_{xz} = \iint\limits_{\Phi} y\, \rho(x, y, z)\, dS$, $M_{yz} = \iint\limits_{\Phi} x\, \rho(x, y, z)\, dS$ – статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;

в) $x_0 = \dfrac{M_{yz}}{M}$, $y_0 = \dfrac{M_{xz}}{M}$, $z_0 = \dfrac{M_{xy}}{M}$ – координаты центра тяжести поверхности;

г) $I_x = \iint\limits_{\Phi} (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dS$ – момент инерции поверхности относительно оси Ox;

д) $I_{yz} = \iint\limits_{\Phi} x^2\, \rho(x, y, z)\, dS$ – момент инерции поверхности относительно плоскости Oyz;

е) $I_0 = \iint\limits_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dS$ – момент инерции поверхности относительно начала координат;

ж) $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 материальной поверхностью Ф, где

$$F_y = \gamma m_0 \iint\limits_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3}\, \rho(x, y, z)\, dS, \quad F_x = \gamma m_0 \iint\limits_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3}\, \rho(x, y, z)\, dS,$$

$$F_z = \gamma m_0 \iint\limits_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3}\, \rho(x, y, z)\, dS,$$

$\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $r = |\mathbf{r}|$, γ – гравитационная постоянная.

Спасибо за внимание!