



Метрология, стандартизация и сертификация

Калеев Дмитрий Вячеславович
кафедра ВТ

Лекции 9
«Обработка результатов измерений»





1. Задаться вопросом: «Зачем вообще что-то делать, измерять?»;
2. Составить предварительную (доопытную) модель объекта;
3. Обосновать необходимую точность эксперимента;
4. Выработать методику проведения эксперимента;
5. Выбрать средства измерения:
 - А. Воздействие СИ на объект;
 - Б. Неполная адекватность принятой модели объекту измерений;
 - В. Погрешности, вносимые СИ;
 - Г. Пределы измерений;
 - Д. Частотный диапазон.



Однократные измерения

Необходимые условия проведения однократных измерений:

- Объем априорной информации об объекте измерений такой, что модель объекта и определение измеряемой величины не вызывают сомнений;
- Изучен метод измерения, его погрешности либо заранее устранены, либо оценены;
- Средства измерений исправны, а их метрологические характеристики соответствуют установленным нормам;
- Предполагают, что известные систематические погрешности исключены;
- Полагают, что распределение случайных погрешностей не противоречит нормальному распределению (либо они незначительны)
- Неисключенные систематические погрешности, представленные заданными границами, распределены равномерно;
- Составляющие погрешности результата измерения должны быть известны до проведения измерения.



Определение закона распределения случайной погрешности

1. Визуальный метод (построение гистограммы)

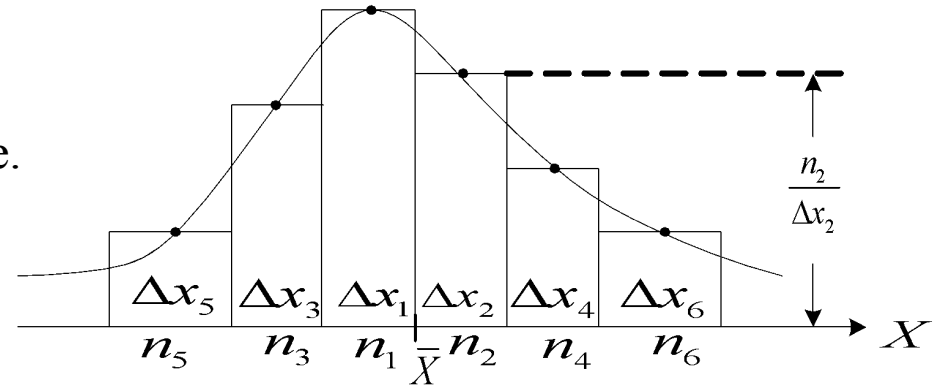
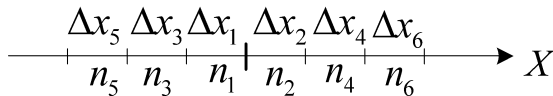
Разделить выборку на интервалы.

Обозначим L – количество интервалов.

$L = \log_2 n$ формула Старджеса

$L = 5\sqrt[5]{n}$ формула Брукса и Корюзера.

$L = \sqrt{n}$ формула Хайнхольда и Гаеде.

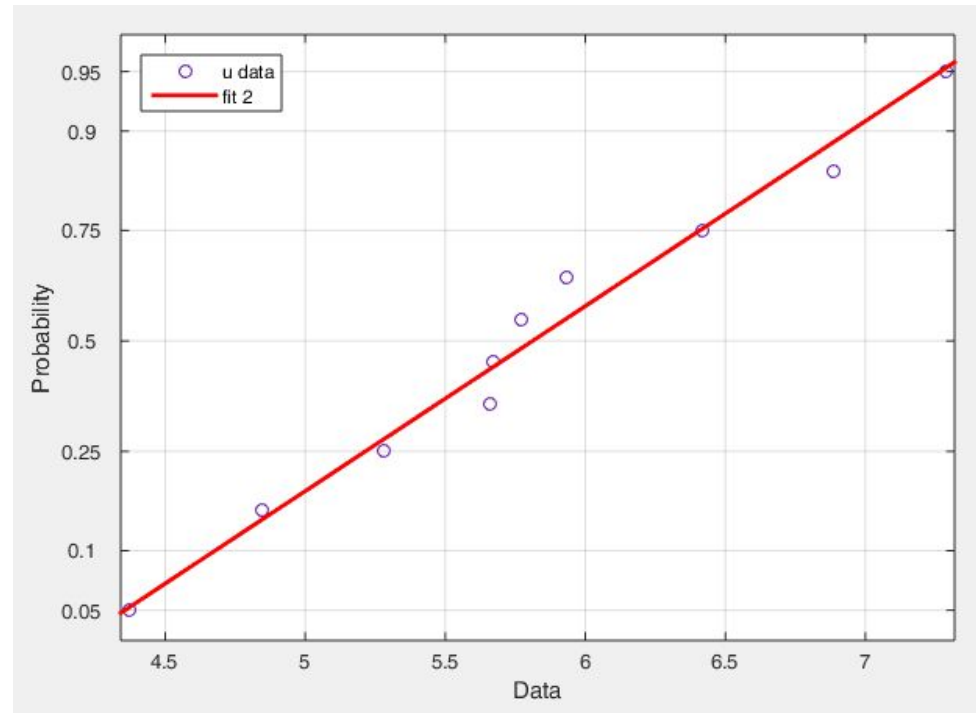




Определение закона распределения случайной погрешности

2.1. Построение вероятностного графика

```
x= normrnd(5.5,0.5,1,10);  
x=sort(x);  
P=normcdf(x,mean(x),std(x));  
a1 = plot(x,z,'ro');hold on; grid;  
lsline();
```





Определение закона распределения случайной погрешности

3. Критерии согласия (Пирсона, Колмогорова)

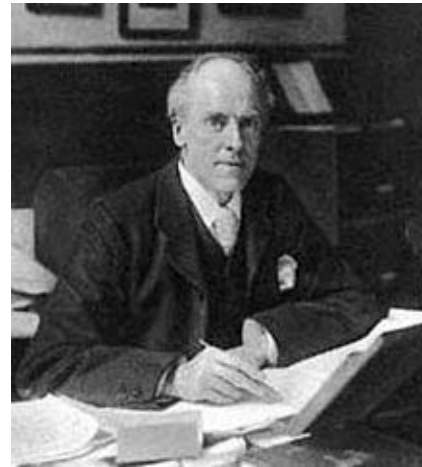
$$M[X] = M'[X];$$

$$\sigma_X = \sigma'_X;$$

$$L = L';$$

$$\Delta x_i = \Delta x'_i;$$

$$n = n'$$



Карл Пирсон



Андрей Николаевич Колмогоров



Определение закона распределения случайной погрешности

$$\chi_{\text{практич}}^2 \leq \chi_{\text{теоретич}}^2$$

$k = L - 3$ - число степеней свободы – чувствительность критерия отклонения реальной гистограммы от теоретической.

$q = 1 - \alpha$ - уровень значимости – вероятность отвергнуть верную гипотезу, если принято решение ее отвергнуть

$n'_i = P_i \cdot n$, где P_i - вероятность попадания в i -ый интервал

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - Q}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - Q}{\sigma_X}\right)$$

$$\chi_{\text{практич}}^2 = \sum_{i=1}^L \frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$$



Определение закона распределения случайной погрешности

Критерий 1.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{nS_*} \quad S_* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

iff $d_{\frac{1-q_1}{2}} \leq d \leq d_{\frac{q_1}{2}}$: не отвергается

Значения q -процентных точек распределения $d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{nS_*}$

Число наблюдений	при $q/2, \%$			при $(1-q)/2, \%$		
	1	5	10	90	95	99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291



Определение закона распределения случайной погрешности

Критерий 2.

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$10 < n < 20 : m = 1$$

$$20 \leq n < 50 : m = 2$$

for $i = 1 : n$

$$\text{iff } |x_i - \bar{x}| < z_{\frac{\alpha}{2}} S_x : k \text{ ++} \quad \text{iff } k \leq m : \text{ не отвергается}$$

Значения α из уравнения $1 - \sum_{k=0}^m C_n^k (1 - \alpha)^k \alpha^{n-k} = q$

n	m	Уровень значимости q, %		
		1	2	5
10	1	0,98	0,98	0,96
11—14	1	0,99	0,98	0,97
15—20	1	0,99	0,99	0,98
21—22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24—27	2	0,98	0,98	0,97
28—32	2	0,99	0,98	0,97
33—35	2	0,99	0,98	0,98
36—49	2	0,99	0,99	0,98



Определение закона распределения случайной погрешности

Номер наблюдения	Показания потенциометра, В	$(x_i - \bar{x}) \cdot 10^4$		Номер наблюдения	Показания потенциометра, В	$(x_i - \bar{x}) \cdot 10^4$	
		$(x_i - \bar{x}) \cdot 10^4$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot 10^8$			$(x_i - \bar{x}) \cdot 10^4$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot 10^8$
1	2.7997	+3	9	19	2.7988	-6	36
2	2.7991	-3	9	20	2.7999	+5	25
3	2.7990	-4	16	21	2.7998	+4	16
4	2.7997	+3	9	22	2.7996	+2	4
5	2.7992	-2	4	23	2.7992	-2	4
6	2.7976	-18	324	24	2.8000	+6	36
7	2.7984	-10	100	25	2.7993	-1	1
8	2.7999	+5	25	26	2.7988	-6	36
9	2.7990	-4	16	27	2.7993	-1	1
10	2.7989	-5	25	28	2.7982	-12	144
11	2.7997	+3	9	29	2.7999	+5	25
12	2.7993	-1	1	30	2.7997	+3	9
13	2.8000	+6	36	31	2.7999	+5	25
14	2.8006	+12	144	32	2.7992	-2	4
15	2.7998	+4	16	33	2.7999	+5	25
16	2.7995	+1	1	34	2.7989	-5	25
17	2.7992	-2	4	35	2.7994	0	0
18	2.8011	+17	289	36	2.7999	+5	25

$$\bar{x} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} x_i = 2,7994 \text{ В}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2} = 6,52 \cdot 10^{-4} \text{ В}$$

$$S_* = \sqrt{\frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2} = 6,41 \cdot 10^{-4} \text{ В}$$



Определение закона распределения случайной погрешности

$$\text{Критерий 1.} \quad \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| = 174 \cdot 10^{-4}$$

$$d = \frac{174 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 6,41 \cdot 10^{-4}} = 0,754$$

$$q_1 = 0,02 : d_{0,01} = 0,877, d_{0,99} = 0,717$$

$0,717 < 0,754 < 0,877$: не отвергается

$$\text{Критерий 2.} \quad q_2 = 0,02 \text{ и } n = 36 : \alpha = 0,99$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58 \quad z_{\frac{\alpha}{2}} S_x = 2,58 \cdot 6,52 \cdot 10^{-4} = 16,8 \cdot 10^{-4}$$

$k = 2(i = 6,18) \leq m = 2$: не отвергается



Этапы обработки результатов измерений

1. Выборка наблюдений, построение вариационного ряда.
2. Оценки мат.ожидания и среднеквадратического отклонения:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

3. Правило трех сигм – исключение промахов.
4. Построение гистограммы, на ее основе выдвигается гипотеза о законе распределения выборки наблюдений.
5. Проверка гипотезы (критерий согласия Пирсона, Критерии 1-2)

$$\chi_{\text{практич}}^2 \leq \chi_{\text{теоретич}}^2$$



Этапы обработки результатов измерений

6. Если закон нормальный, то для заданной вероятности определяем коэффициент Стьюдента

$$P_{\delta} = \frac{n-1}{n+1} \quad \delta_P = t_P \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

7. Получаем предварительную запись результата измерений, которая подлежит дальнейшей обработке с целью приведения результата к виду по ГОСТу

$$Q = \bar{X} \pm \delta_P; \quad P = \dots\%$$



Составляющие погрешности прямых измерений:

Погрешность результата однократного измерения может быть представлена НСП и случайными погрешностями

Характеристикой НСП могут быть:

-границы $\pm \Theta$;

-доверительные границы $\pm \Theta(P)$;

Характеристикой случайных погрешностей могут быть:

-СКО, s ;

-доверительные границы $\pm \varepsilon(P)$.



Оценка неисключенных систематических погрешностей

Имеется m неисключенных систематических погрешностей, и каждая из них задана своими границами:

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{j=1}^m \Theta_j^2}$$

Имеется m неисключенных систематических погрешностей, и каждая из них задана доверительными границами с различными доверительными вероятностями:

P	k		
0,9	0,95		
0,95	1,1		
0,99	$m = 4$ $k = 1,4$	$m = 3$ $k \approx 1,3$	$m = 2$ $k \approx 1,2$

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\Theta_j^2(P_i)}{k_i^2}}$$



Оценка случайных погрешностей

Имеются только случайные составляющие погрешности, заданные СКО (из технической документации):

$$\sigma(\tilde{A}) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2} \quad \varepsilon(P) = z(P)\sigma(\tilde{A}) = z(P) \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$$

Имеются только случайные составляющие погрешности, заданные СКО, полученными экспериментально:

$$\varepsilon(P) = t(P, n) \sqrt{\sum_{i=1}^m S_i^2}$$



«Однократные измерения» Оценка случайной погрешности

Имеется только случайные составляющие погрешности, задаваемые доверительными границами, с одинаковыми доверительными вероятностями:

$$\varepsilon(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2(P)}$$

Имеется только случайные составляющие погрешности, задаваемые доверительными границами, с различными доверительными вероятностями:

$$\varepsilon(P) = z(P) \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i^2(P_i)}{z^2(P_i)}} = z(P) \sigma(\tilde{A})$$



Оценка суммарной погрешности

Значение $\frac{\Theta}{\varepsilon}$	Погрешность результата измерения $\Delta(P)$
$\frac{\Theta}{\varepsilon} < 0,8$	$\varepsilon(P)$
$0,8 < \frac{\Theta}{\varepsilon} \leq 8$	$D(P) = K[\Theta(P) + \varepsilon(P)]$
$\frac{\Theta}{\varepsilon} > 8$	$\Theta(P)$

$\frac{\Theta}{S(\tilde{A})}$	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$K(0,95)$	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$K(0,99)$	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85



Пример

Многokратное измерение напряжения на участке электрической цепи сопротивлением $R=4$ Ом.

Априорные данные:

-Стабильное сопротивление;

-Ток в цепи – постоянный;

-Измерение проводят в сухом отапливаемом помещении температурой 30°C ;

-Магнитное поле до 400 А/м;

Результаты измерения:

1	2	3	4	5	6	7	8
0,9005	0,9010	0,9007	0,8997	0,9003	0,8992	0,9009	0,8989



Пример

Характеристики вольтметра:

-Класс точности $\gamma = 0,5$ (по ГОСТ 8711 приведенная погрешность 0,5%)

-Верхний предел диапазона измерений $U_{np} = 1,5V$

-Сопротивление $R_V = 1000 \text{ Ом}$

Предел допускаемой основной погрешности вольтметра:

$$\Delta_o = \frac{\pm \gamma \cdot U_{np}}{100} = \frac{\pm 0,5 \cdot 1,5}{100} = \pm 0,0075 \text{ В}$$

Дополнительная погрешность влияния магнитного поля (согласно ГОСТ 8711) не превышает 1,5% нормирующего значения прибора $X_N = U_{np}$

$$\Delta_{МП} = \pm 0,015 \cdot X_N = \pm 0,015 \cdot 1,5 = \pm 0,0225 \text{ В}$$



Пример

Дополнительная температурная погрешность, обусловленная отклонением температуры от нормальной на 10°C , не превышает 60% предела допускаемой основной погрешности:

$$\Delta_T = \pm 0,6 \cdot \Delta_O = \pm 0,6 \cdot 0,0075 = \pm 0,0045 \text{ В}$$

Вносим поправку на методическую погрешность:

$$\tilde{U} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \left(U + U_i \frac{R}{R + R_V} \right)$$

Вычисляем точечные оценки:

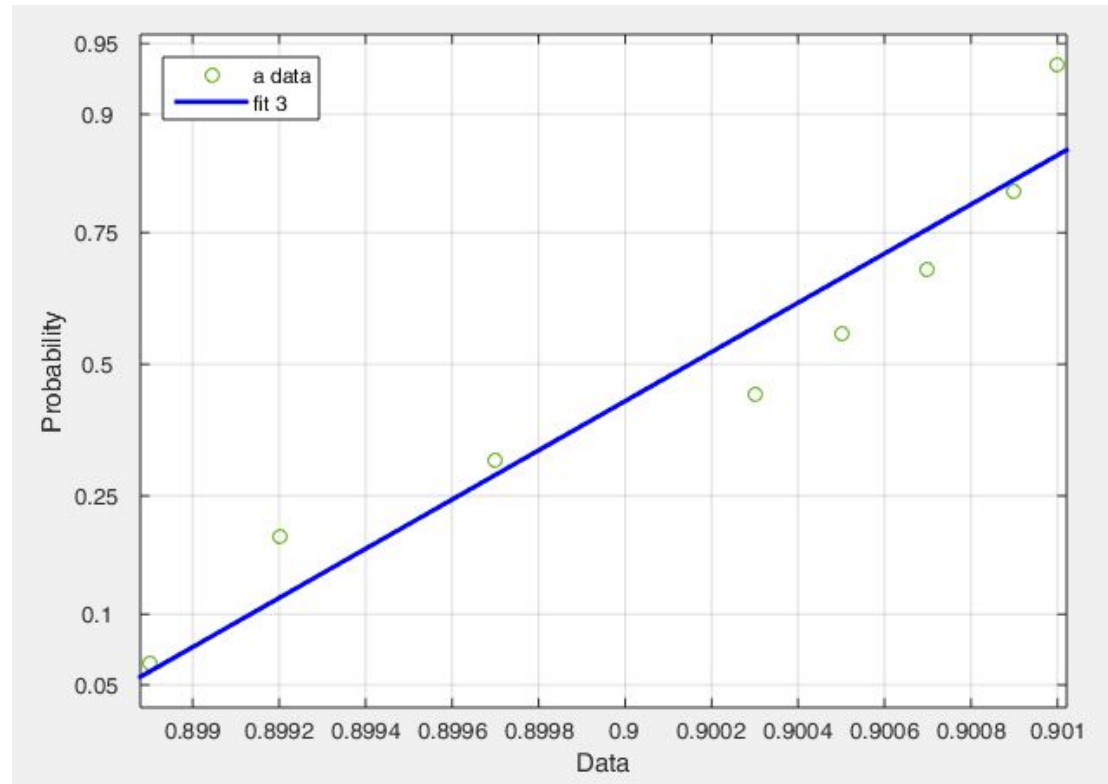
$$U = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \tilde{U}_i = 0,9037 \text{ В}$$

$$S_U = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{U}_i - \bar{U})^2} = 0,0008 \text{ В}$$



Пример

№	U	z
1	0,8989	-1,5766
2	0,8992	-1,1982
3	0,8997	-0,5676
4	0,9003	0,1892
5	0,9005	0,4415
6	0,9007	0,6937
7	0,9009	0,9460
8	0,9010	1,0721



Случайная составляющая погрешности с вероятностью 95%:

$$\varepsilon(P) = t(0,95;8) \cdot S_U = 0,0015 \text{ В}$$



Пример

НСП с вероятностью 95%:

$$\Theta(P) = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2} = \pm k \sqrt{\Delta_O^2 + \Delta_{МП}^2 + \Delta_T^2}$$

$$\Theta(P) = \pm 1,1 \sqrt{0,0075^2 + 0,0225^2 + 0,0045^2} = \pm 0,027 \text{ В}$$

Оценка суммарной погрешности:

$$\frac{\Theta(P)}{\varepsilon(P)} = \frac{0,027}{0,0015} = 18 > 8$$

Результат измерений:

$$\tilde{U} = 0,9037 \text{ В}$$

$$D(P) = \pm 0,027 \text{ В}$$

$$P = 0,95; n = 8$$



Источники

1. Основы метрологии. Бурдун Г.Д.
2. Основы метрологии и электрические измерения. Душин Е.М.
3. Метрология. Теория измерений. Жуков В.К.
4. Погрешности измерений. Рабинович С.Г.