

вторник, 26 марта 2013 г.

Лекция 6



ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. Введение в магнитостатику. Сила Лоренца.**
- 2. Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля .**
- 3. Графическое изображение магнитного поля.**
- 4. Закон Био – Савара - Лапласа.**
- 5. Примеры расчета магнитных полей:**
 - 5.1.магнитное поле прямого тока;**
 - 5.2.магнитное поле равномерно движущегося заряда**

Введение в магнитостатику. Сила Лоренца

Фундаментальные свойства частиц и тел:

- способность обладать *массой*;
- способность обладать *электрическим зарядом*.

Электромагнитные силы - одни из наиболее важных в природе, поскольку они определяют существование атомов

Электростатика изучает частный случай электромагнитного взаимодействия - взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами, которое осуществляется посредством *электростатического поля*.

Раздел физики, изучающий свойства постоянных магнитных полей, называется *магнитостатикой*.

Введение в магнитостатику. Сила Лоренца

Рассмотрим пространство, в котором находятся заряды. Выделим один из них, обозначим его q . На этот заряд действует сила со стороны всех остальных зарядов. Эта сила зависит от величин зарядов, от их взаимного расположения и от того, движутся или покоятся заряды.

Экспериментами установлено, что на выделенный заряд в общем случае действует сила:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$\vec{v}$ - скорость заряда в рассматриваемой точке пространства

Выражение называется *формулой Лоренца*, а сила $\vec{F}$ - *силой Лоренца*.

Сила Лоренца

В формуле Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

два слагаемых

Первое слагаемое не зависит от скорости движения заряда, и определяет компоненту силы, которая действует как на движущийся, так и на неподвижный заряды. $\vec{E}$ это напряженность электрического поля, т.е. сила, действующая на неподвижный единичный заряд со стороны других зарядов.

Второе слагаемое определяет компоненту силы, которая возникает только тогда, когда выделенный заряд имеет отличную от нуля скорость. Вектор $\vec{B}$ - индукция магнитного поля. Магнитное поле, в свою очередь, может быть создано в пространстве только при наличии движущихся зарядов.



ЛОРЕНЦ Хендрик Антон (1853 - 1928) – нидерландский физик-теоретик, создатель классической электронной теории, член Нидерландской АН.

Учился в Лейденском ун-те, В 23г. защитил докторскую диссертацию «К теории отражения и преломления света». В 25 профессор Лейденского ун-та и заведующий кафедрой теоретической физики.

Вывел формулу, связывающую диэлектрическую проницаемость с плотностью диэлектрика, дал выражение для силы, действующей на движущийся заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца), объяснил зависимость электропроводности вещества от теплопроводности, развил теорию дисперсии света. Разработал электродинамику движущихся тел. В 1904 вывел формулы, связывающие между собой пространственные координаты и моменты времени одного и того же события в двух различных инерциальных системах отсчета (преобразования Лоренца).

Сила Лоренца

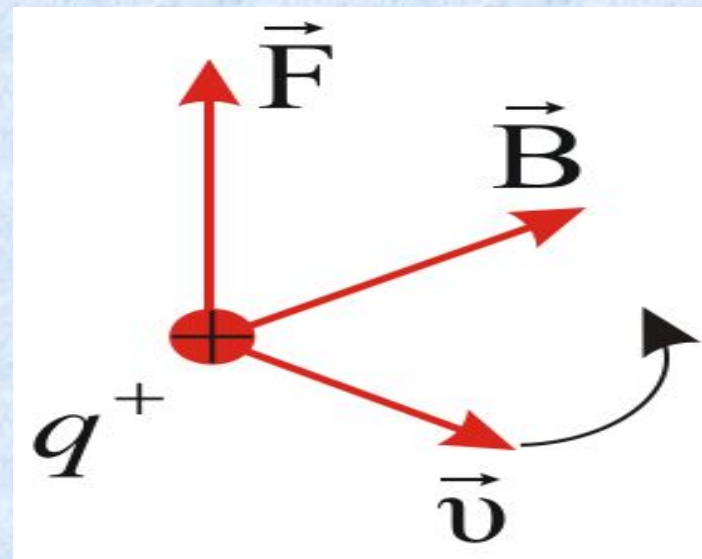
$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Индукцию магнитного поля $\vec{B}$ уже нельзя, как напряженность $\vec{E}$, определить через силу, действующую в рассматриваемой точке пространства на движущийся со скоростью $\vec{v}$ заряд.

Эта сила, как следует из формулы Лоренца, зависит не только от модулей векторов $\vec{B}$ и $\vec{v}$, но и от их взаимного расположения.

Если $\vec{v} \parallel \vec{B}$, то $[\vec{v}, \vec{B}] = 0$, даже если $\vec{B} \neq 0$

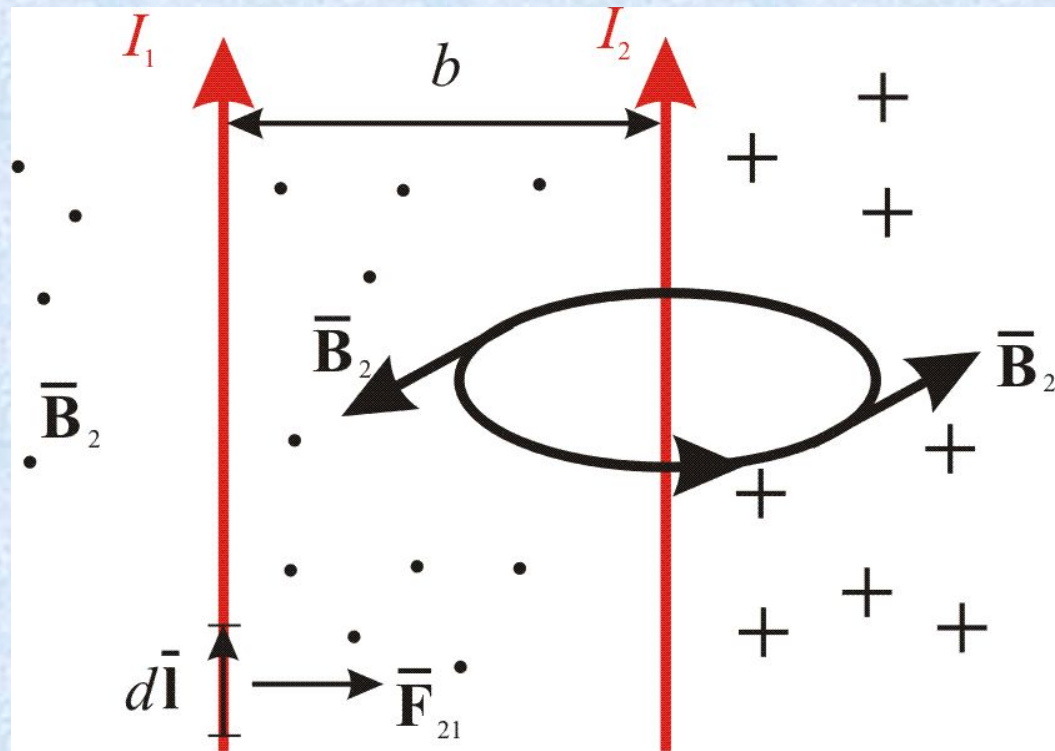
Итак, движущиеся заряды создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Пример движущихся зарядов – протекание тока в проводниках. Стационарные электрические токи являются источниками **постоянного магнитного поля**. Такое магнитное поле можно рассматривать отдельно от электрического поля. Раздел физики – **магнитостатика**.



Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля

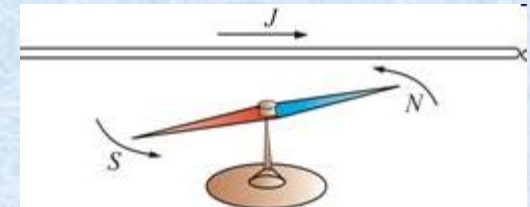
Два тонких проводника, по которым текут токи, притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются, если токи противоположны.

Электрические токи создают в пространстве вокруг себя магнитное поле



Как обнаружить магнитное поле ?

а) по воздействию на стрелку компаса (постоянный магнит).

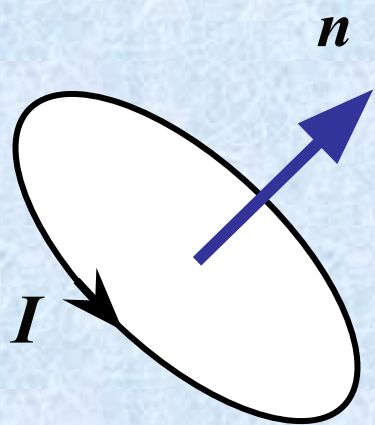


б) по поведению в магнитном поле плоского замкнутого контура очень малых размеров с циркулирующим в нем пробным током.

Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля

Рассмотрим подробнее поведение в магнитном поле плоского замкнутого контура с током.

Ориентацию контура в пространстве характеризуют направлением нормали $\mathbf{n}$ к контуру, которое связано с направлением тока $\mathbf{I}$ в контуре правилом правого винта. Это *положительная* нормаль.



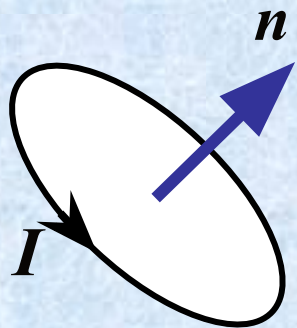
Магнитное поле устанавливает контур положительной нормалью по направлению поля.

При повороте контура возникает *вращающий момент*, стремящийся вернуть контур в равновесное положение.

Модуль момента зависит от угла α между нормалью и направлением поля.

При $\alpha = \pi/2$ модуль вращающего момента максимален (M_{max})

Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля



Вращающий момент зависит от магнитного поля. В то же время он зависит и от свойств контура: площади S и тока в контуре. Поэтому он не может служить силовой характеристикой поля. Свойства контура можно учесть через его *дипольный магнитный момент* :

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

Дипольный магнитный момент – это вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали контура.

Итак, имеем два параметра контура в магнитном поле - *вращающий момент*, зависящий от B , и *магнитный момент*, определяющий свойства контура.

При одинаковой ориентации разных пробных контуров ($\alpha = const$) для них оказывается одним и тем же отношение

$$M_{max} / p_m$$

Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля

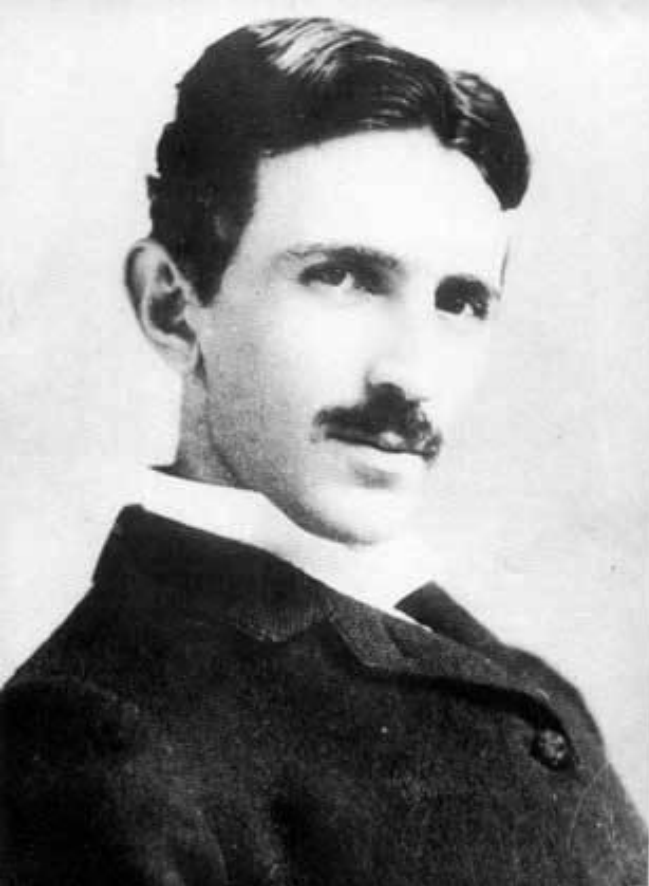
Поэтому в качестве модуля магнитной индукции принимается величина, равная отношению :

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}$$

Итак, **магнитная индукция** это векторная величина, модуль которой задается выражением $B = M_{max} / p_m$, а направление — равновесным положением положительной нормали к контуру с током.

Единица измерения магнитной индукции - *тесла* (Т)

1 тесла равна магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющим магнитный момент **1** А·м², действует максимальный вращающий момент, равный **1** Н·м.



ТЕСЛА Никола (1856 - 1943)- сербский ученый в области электротехники, радиотехники

Разработал ряд конструкций многофазных генераторов, электродвигателей и трансформаторов. Сконструировал ряд радиоуправляемых самоходных механизмов.

Изучал физиологическое действие токов высокой частоты. Построил в 1899 радиостанцию на 200 кВт в Колорадо и радиоантенну высотой 57,6 м в Лонг-Айленде. Изобрел электрический счетчик, частотомер и др.

Взаимодействие токов. Физический смысл индукции магнитного поля

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции:

Поле с магнитной индукцией $\vec{B}$, порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей $\vec{B}_i$, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$$

Графическое изображение магнитного поля

Как и электрическое поле, магнитное поле изображается с помощью силовых линий (линий магнитной индукции).

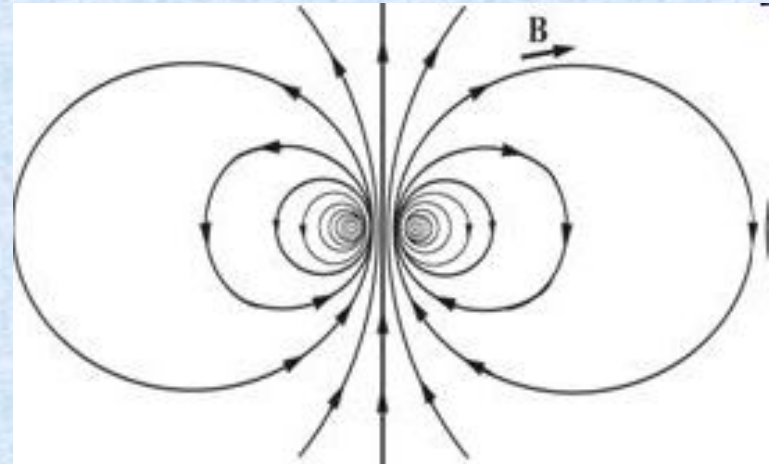
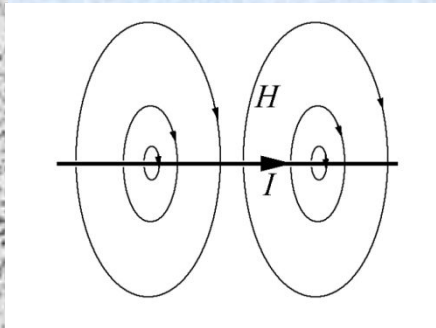
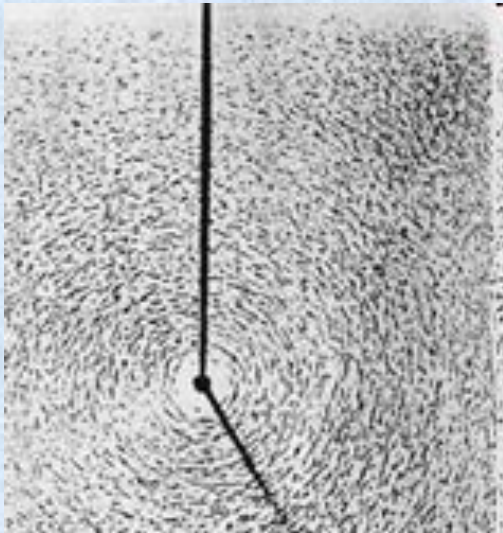
Силовые линии магнитного поля это такие линии, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с векторами магнитной индукции.

Силовые линии любого постоянного магнитного поля являются замкнутыми, либо начинаются и оканчиваются на бесконечности. Магнитные поля нужно изображать так, чтобы картина поля давала кроме направления также представление о величине магнитной индукции. Для этого в местах увеличения магнитной индукции силовые линии сгущаются, а в местах ослабления изображаются более редкими.

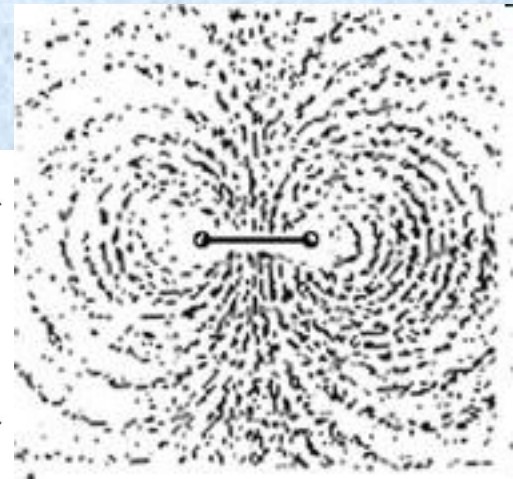
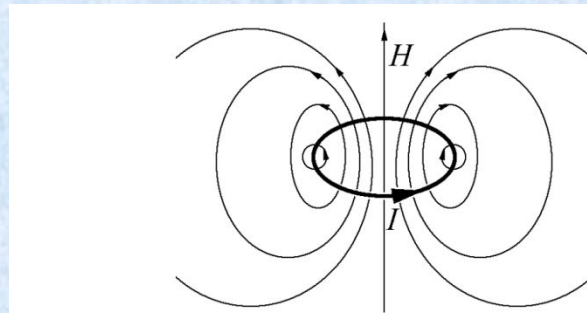
Силловые линии магнитного поля хорошо видны в опыте с железными опилками

силловые линии магнитного поля прямолинейного проводника с током — это концентрические окружности с центрами на проводнике, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику.

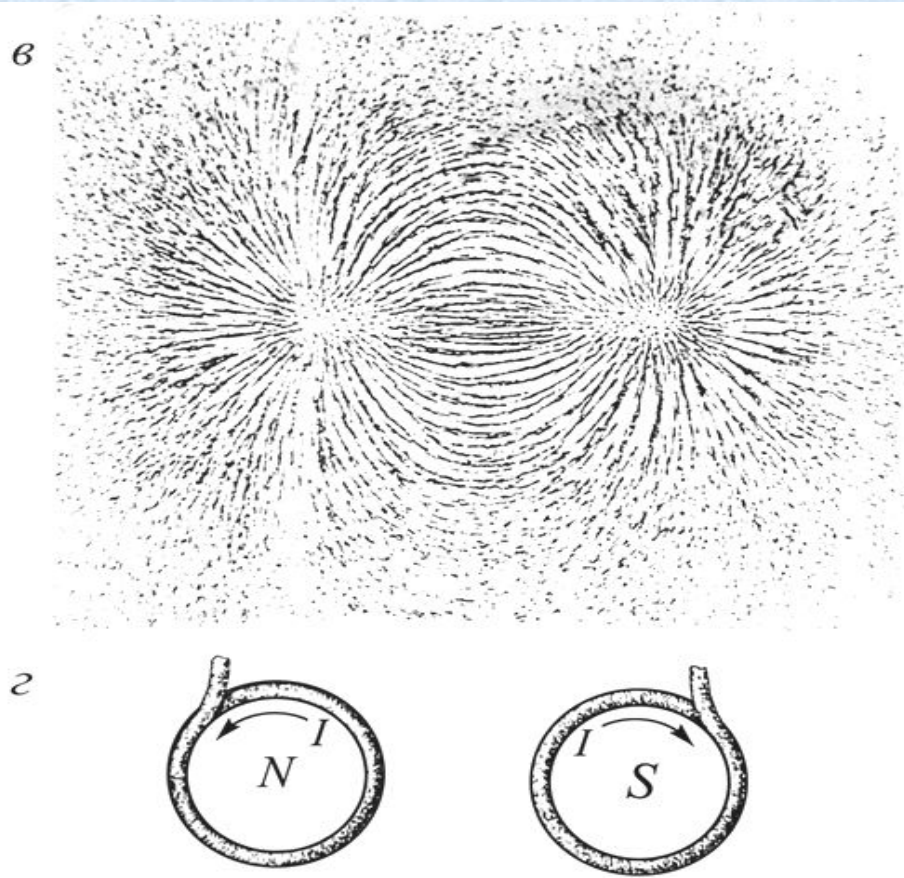
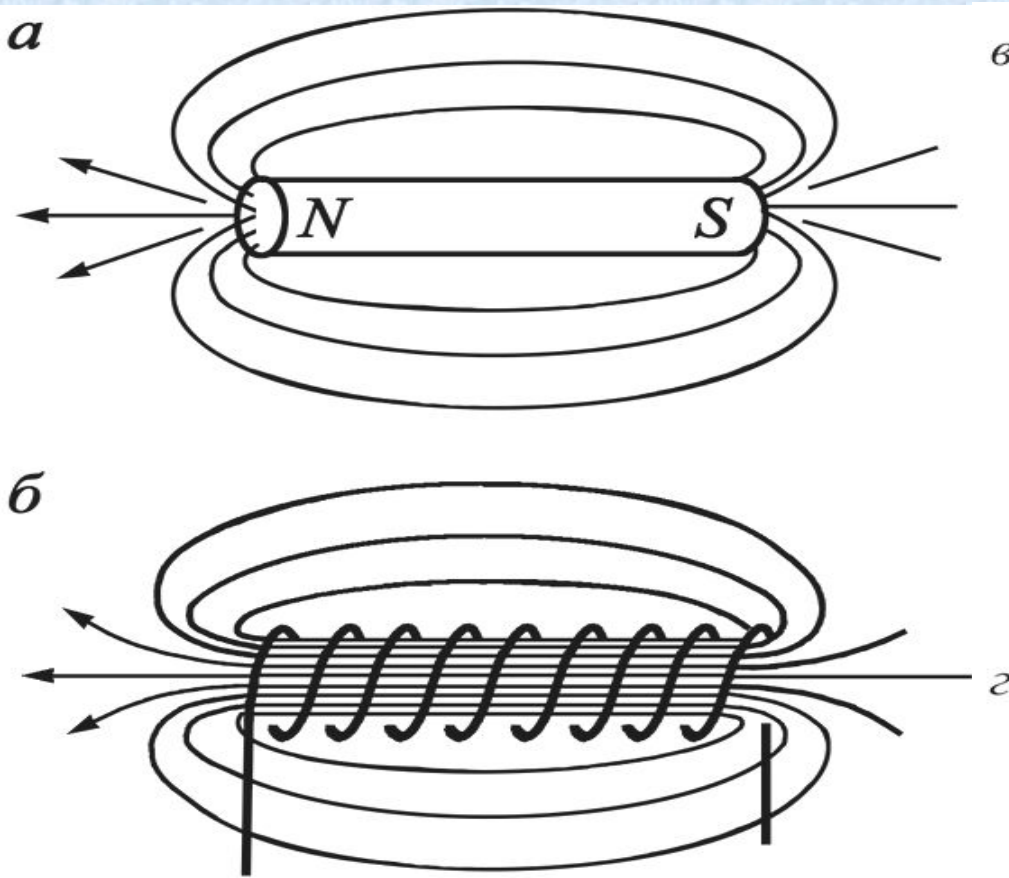
Линейный ток



Виток с током



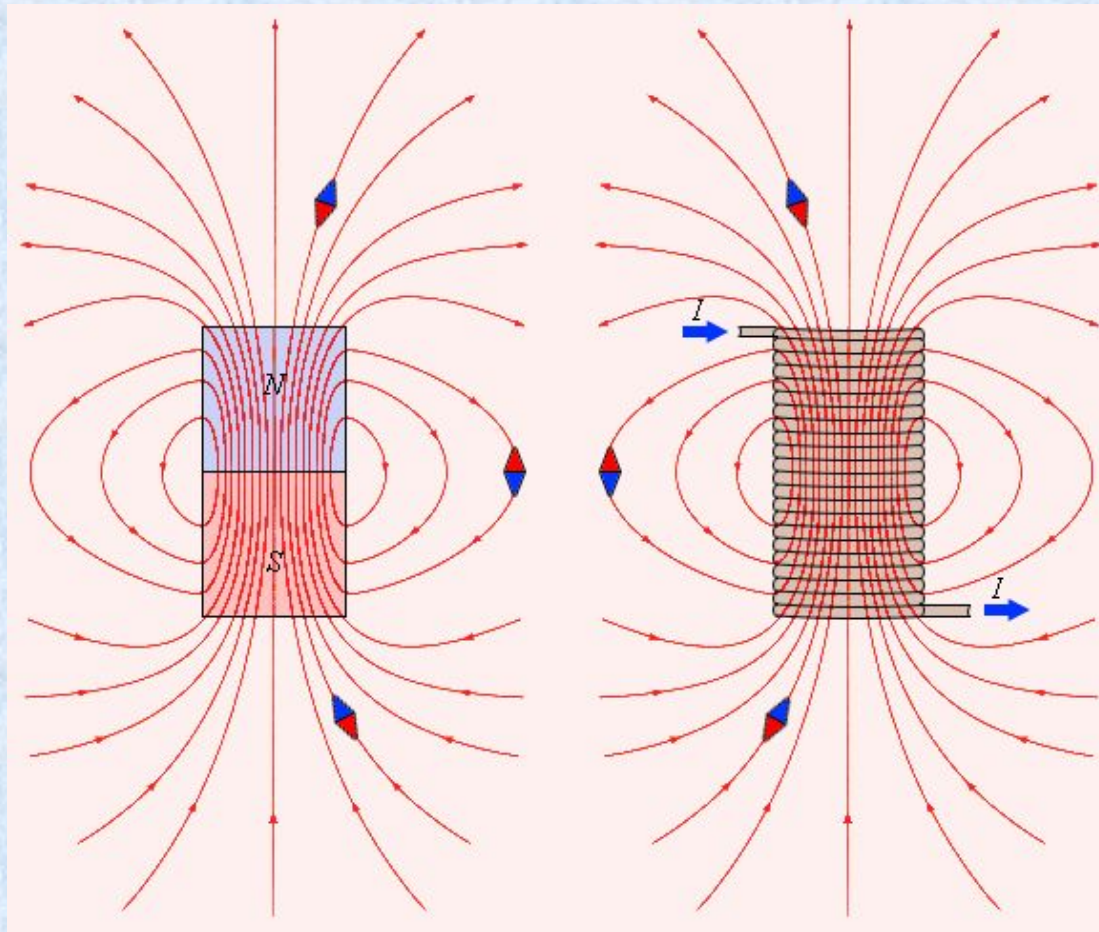
На рис. изображены силовые линии магнитного поля B : а) металлического стержня; б) соленоида; в) железные опилки, рассыпанные на листе бумаги, помещенной над магнитом, стремятся вытянуться вдоль силовых линий; г) магнитные полюсы соленоида.



Линии магнитной индукции полей постоянного магнита и катушки с током.

Индикаторные магнитные стрелки ориентируются по направлению касательных к линиям индукции.

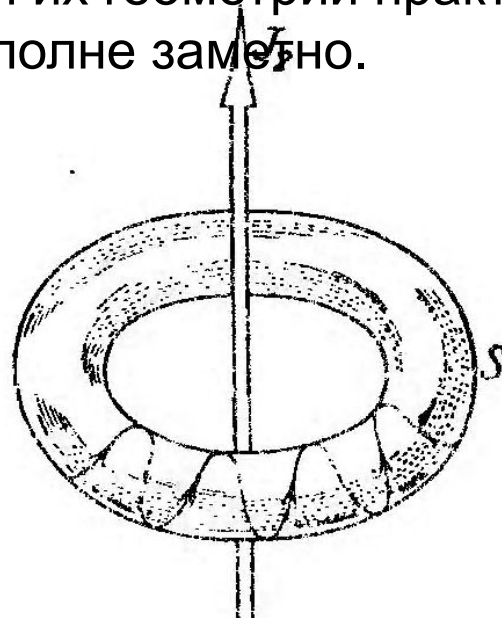
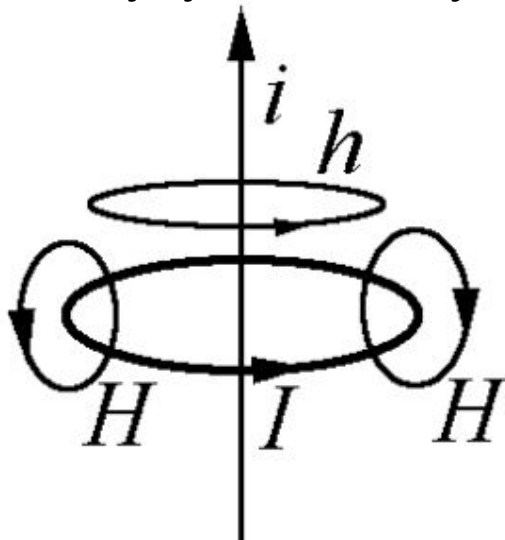
Обратите внимание на аналогию магнитных полей постоянного магнита и катушки с током.



●Замечание

Однако **не следует думать**, что силовые линии магнитного поля **всегда замкнуты**. Это распространенное заблуждение, проникшее даже в учебники.

Замкнуты линии например, у кольцевого витка с током I (рис.). Но если пропустить через виток провод с малым током i , добавится малое поле h , перпендикулярное начальному H . Силовая линия суммарного поля станет спиралью, бесконечно навивающейся на кольцо, и замкнуться может только случайно. При «общем» соотношении токов и при произвольной их геометрии практически все линии будут незамкнуты, причем вполне заметно.



Закон Био – Савара – Лапласа

Токи, текущие по проводникам, создают в окружающем пространстве магнитное поле. **Как вычислить магнитное поле произвольного тока?** В электростатике: взаимодействие точечных зарядов, затем - принцип суперпозиции. В магнитостатике - тот же прием. Аналог точечных зарядов - малые прямолинейные участки проводников с током - *элементы тока*. **Важно знать закон, по которому вычисляется магнитное поле, созданное элементом тока**

Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока ***I*** длиной ***dl***, была получена формула

Это закон Био – Савара – Лапласа

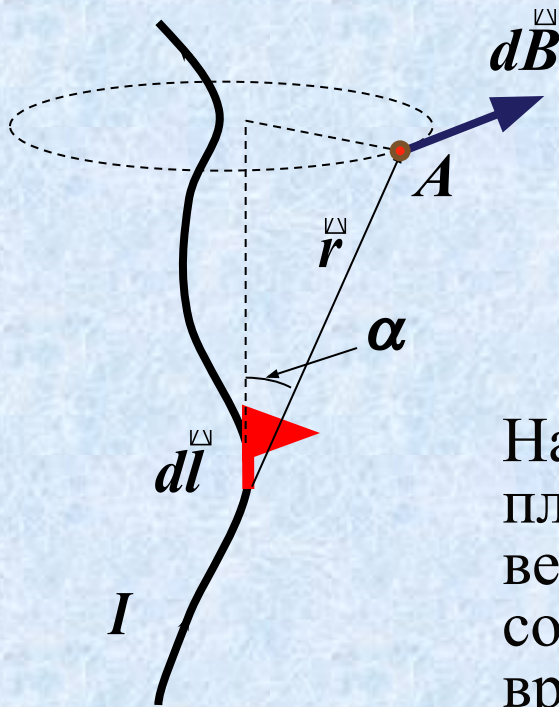
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \left[d\vec{l}, \vec{r} \right]}{r^3}$$

Закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$$

$\vec{dl}$ - вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в которую течет ток

$\vec{r}$ - вектор, проведенный от элемента тока в точку A

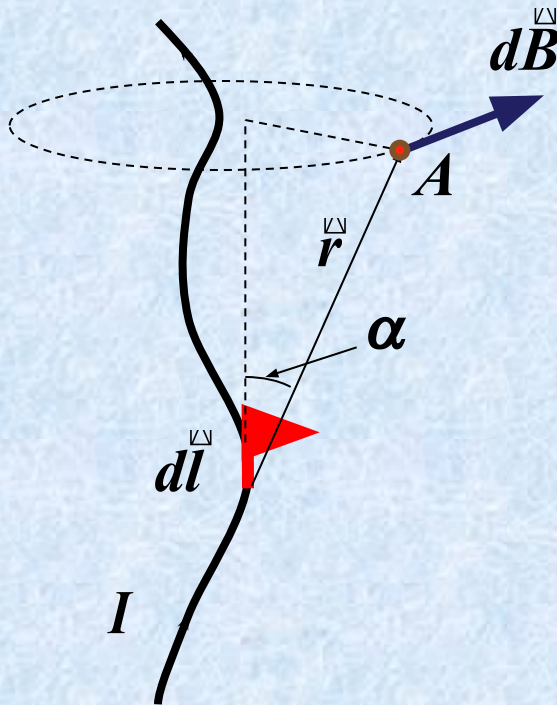


Направление $\vec{dB}$: перпендикулярно плоскости, в которой располагаются векторы $\vec{dl}$ и $\vec{r}$; его направление совпадает с направлением правого винта, вращающегося по кратчайшему пути от $\vec{dl}$ к $\vec{r}$.

Закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Магнитная индукция является силовой характеристикой магнитного поля.



Модуль dB определяется как

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

где α - угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Другой вид закона Био-Савара-Лапласа

$$\begin{aligned}
 d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^3} \left[\vec{dl}, \vec{r} \right] = \left[I d\vec{l} = \vec{j} S \cdot d\vec{l} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{S \cdot d\vec{l}}{r^3} \left[\vec{j}, \vec{r} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r} \right]}{r^3} dV \\
 d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r} \right]}{r^3} dV
 \end{aligned}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

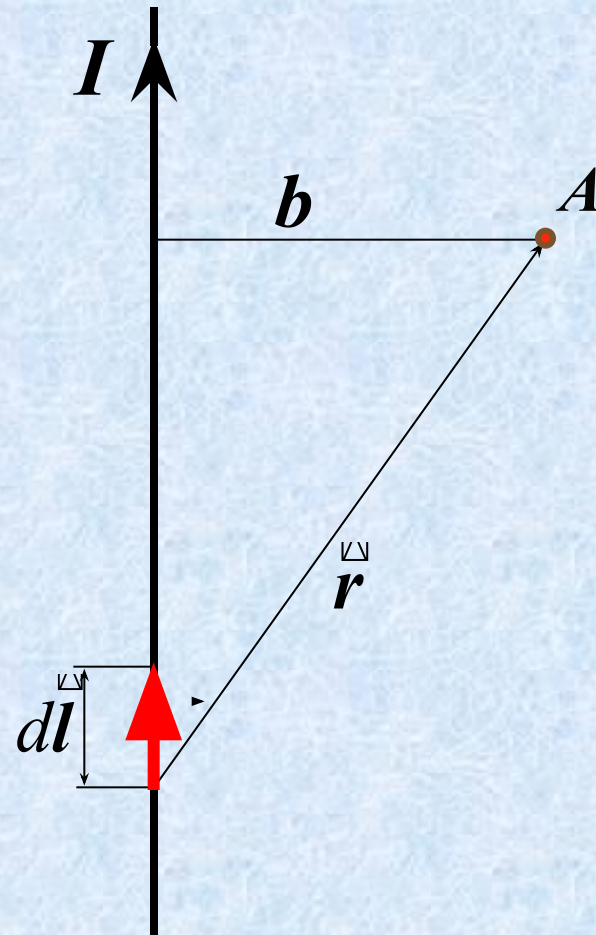
Примеры расчета магнитных полей

5.1. Поле прямого тока

Имеется тонкий, прямой, бесконечно протяженный проводник, по которому течет ток I .

Вычислим магнитную индукцию в точке A на расстоянии b от проводника.

Выделим элементарный участок тока dl , направим радиус-вектор $\mathbf{r}$ от элемента тока dl в точку A .



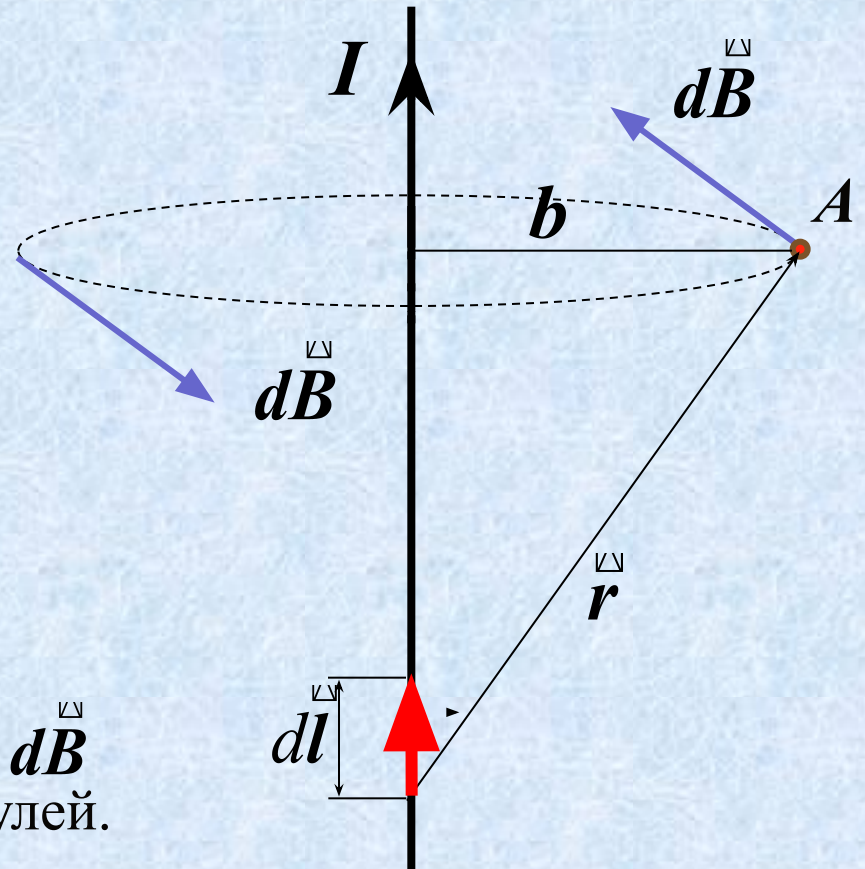
Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

Поле прямого тока

Элемент тока $d\vec{l}$ создает в точке A магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$.

Положение $d\vec{l}$ на рисунке выбрано произвольно, вектор $d\vec{B}$ от любого другого $d\vec{l}$ в точке A будет иметь одно и то же направление — перпендикулярно плоскости чертежа

Следовательно, сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.



Примеры расчета магнитных полей

Модуль dB определяется формулой

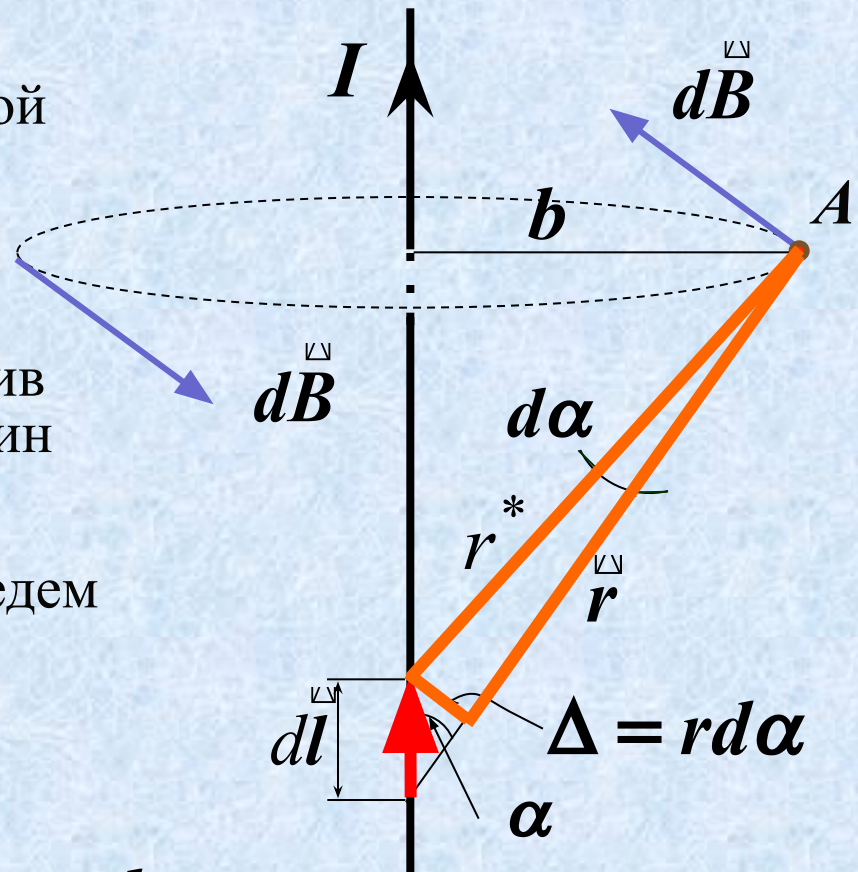
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

Упростим формулу, выразив входящие в нее величины через один переменный параметр — угол α .

Для этого дополним рисунок и введем новые обозначения.

$$\frac{\Delta}{r_*} = \sin d\alpha \approx d\alpha$$

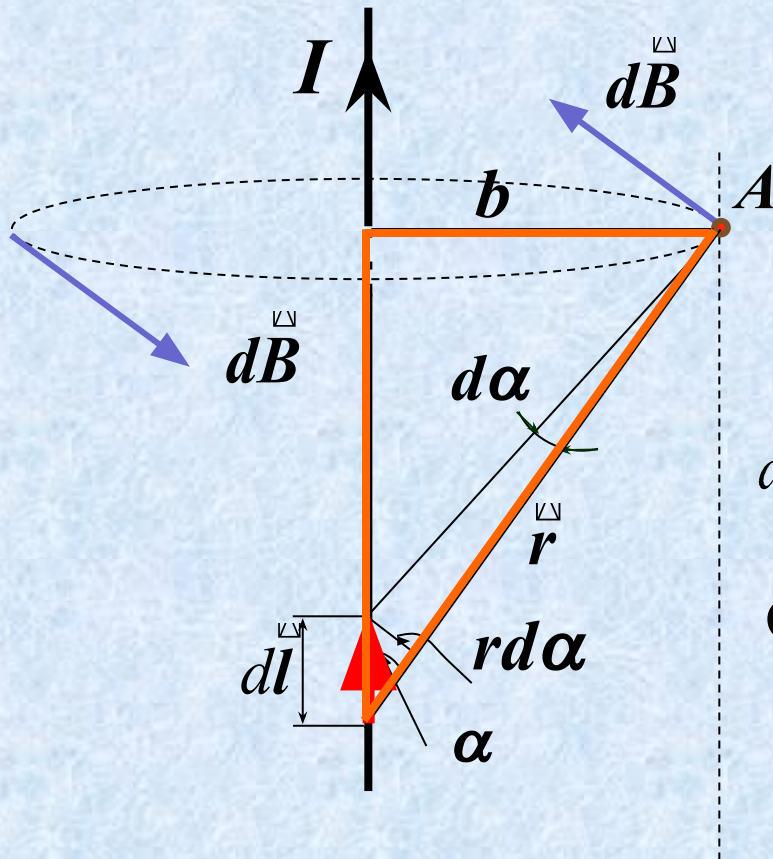
$$\Delta = r^* d\alpha \approx r d\alpha$$



Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Поле прямого тока



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

В итоге получим:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha d\alpha}{b}$$

Окончательно получили выражение:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Поле прямого тока

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha \, d\alpha$$

Для всех элементов тока угол α изменяется в пределах от 0 до π .
Проинтегрируем в этих пределах полученное выражение:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется выражением:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

5.2. Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Определим величину магнитного поля, создаваемого точечным зарядом q движущимся с постоянной нерелятивистской скоростью $\mathbf{v}$

Движущиеся заряды создают ток, поэтому выражение для $\mathbf{B}$ которое создается движущимся зарядом, получим из формулы

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$$

Пусть имеются носители заряда e любого знака, которые движутся упорядоченно со скоростью $\mathbf{v}$.

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле равномерно движущегося заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$$

Эти носители создают ток $I = \vec{j}S = en\vec{v}S$,

где S - площадь поперечного сечения проводника, n - число носителей заряда в единице объема (концентрация).

Преобразуем числитель формулы

$$I [\vec{dl}, \vec{r}] = [I \vec{dl}, \vec{r}] = [enS \vec{dl} \vec{v}, \vec{r}] = enS \vec{dl} [\vec{v}, \vec{r}]$$

В итоге получим выражение вида

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{enS \vec{dl} [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Произведение $S \vec{dl}$ это объем отрезка провода длиной dl , поэтому произведение $nS \vec{dl}$ равно числу носителей тока в этом объеме

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле равномерно движущегося заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{enS d\vec{l} [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Если полученное выражение разделить на $nSd\vec{l}$, найдем магнитную индукцию поля, создаваемого одним носителем тока e , который движется со скоростью $\vec{v}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Установлено, что это выражение справедливо для любых точечных зарядов, размеры которых много меньше r .

Заменив e на q , окончательно получим

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле равномерно движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

В полученной формуле $\vec{r}$ - это радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения, r - его модуль

Конец $\vec{r}$ неподвижен в выбранной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{v}$, поэтому вектор $\vec{B}$ зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени.

В соответствии с полученной формулой вектор $\vec{B}$ располагается перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$

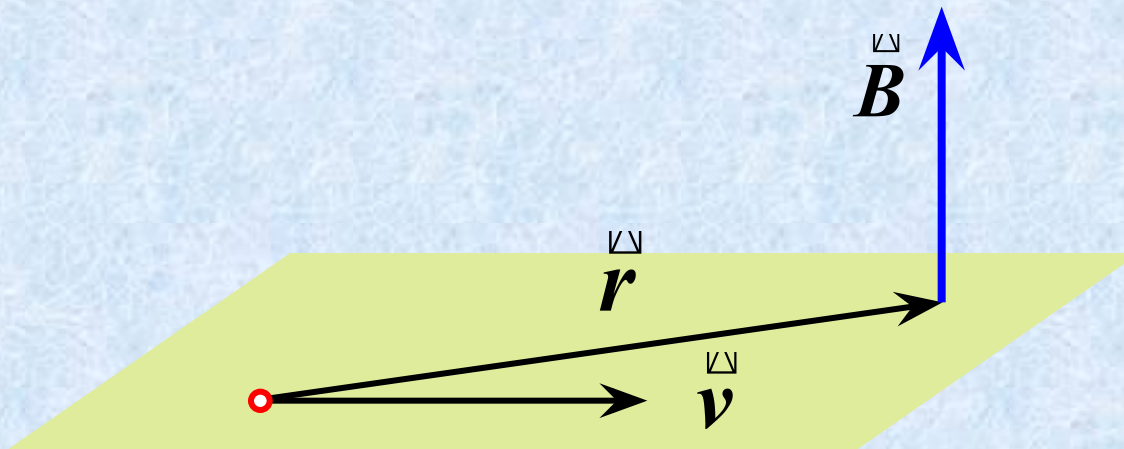
Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле равномерно движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Направление вектора $\vec{B}$ определяется
векторным произведением $[\vec{v}, \vec{r}]$



ПРОДОЛЖЕНИЕ

5. Примеры расчета магнитных полей:

- 5.3. магнитное поле на оси кругового тока.

6. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса- Остроградского для вектора $\vec{B}$.

7. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.

8. Примеры расчета магнитных полей:

- 8.1. магнитное поле соленоида.

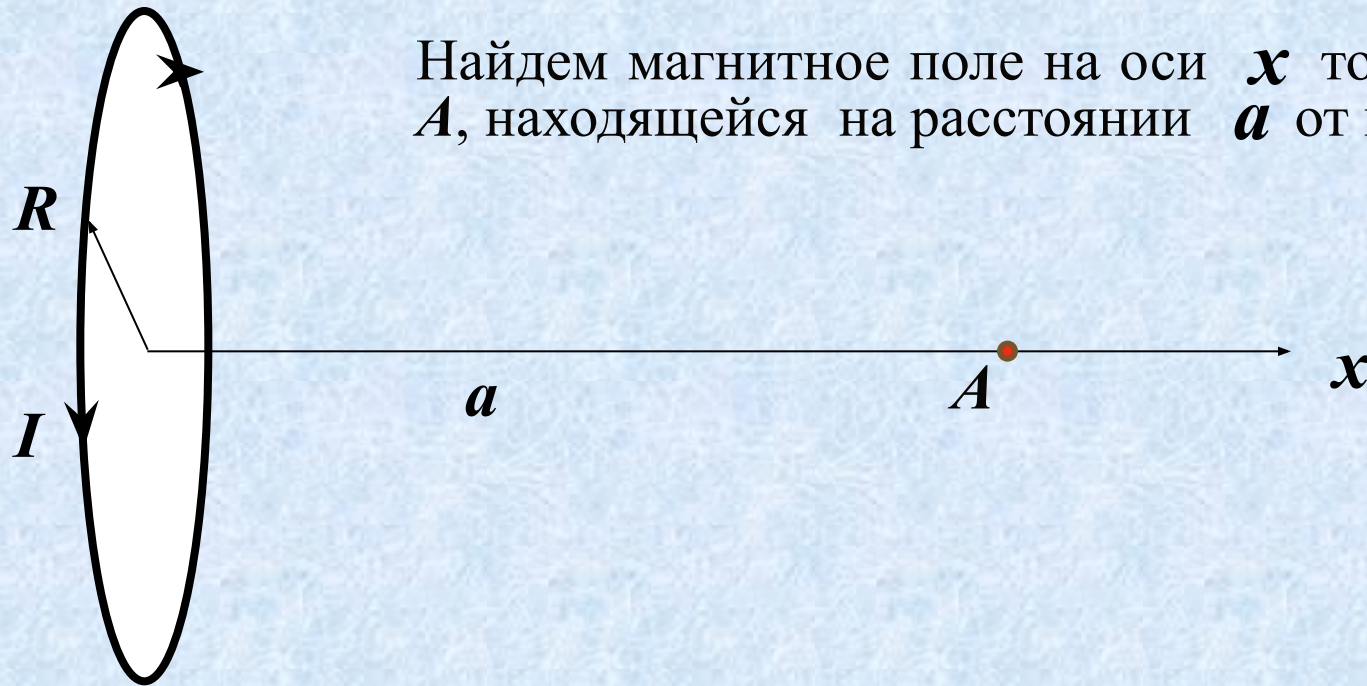
- 8.2. магнитное поле тороида.

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

5.3. Магнитное поле на оси кругового тока

Пусть электрический ток силой I течет по проводнику радиусом R .



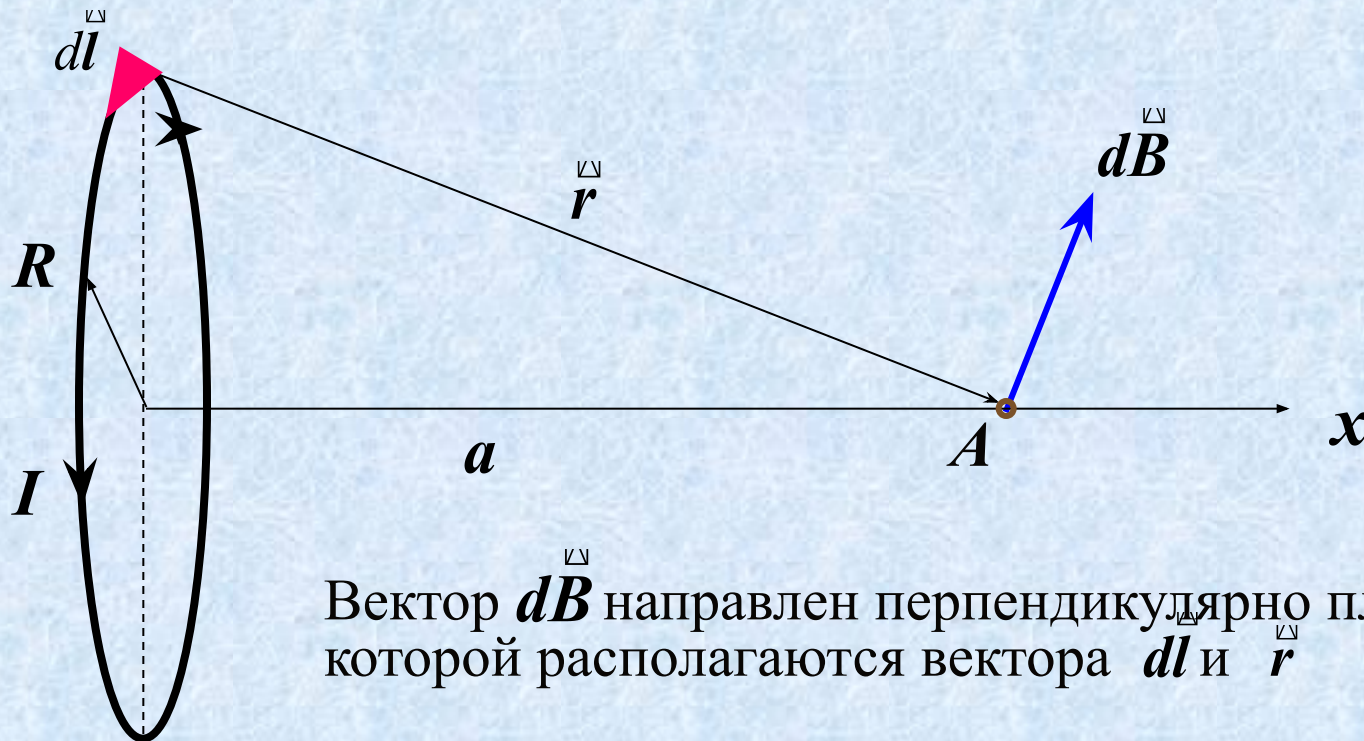
Найдем магнитное поле на оси x тока в точке A , находящейся на расстоянии a от центра

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока

Разобьем круговой ток на элементы тока длиной $d\vec{l}$ и проведем от произвольного элемента тока радиус-вектор $\vec{r}$ в точку A .

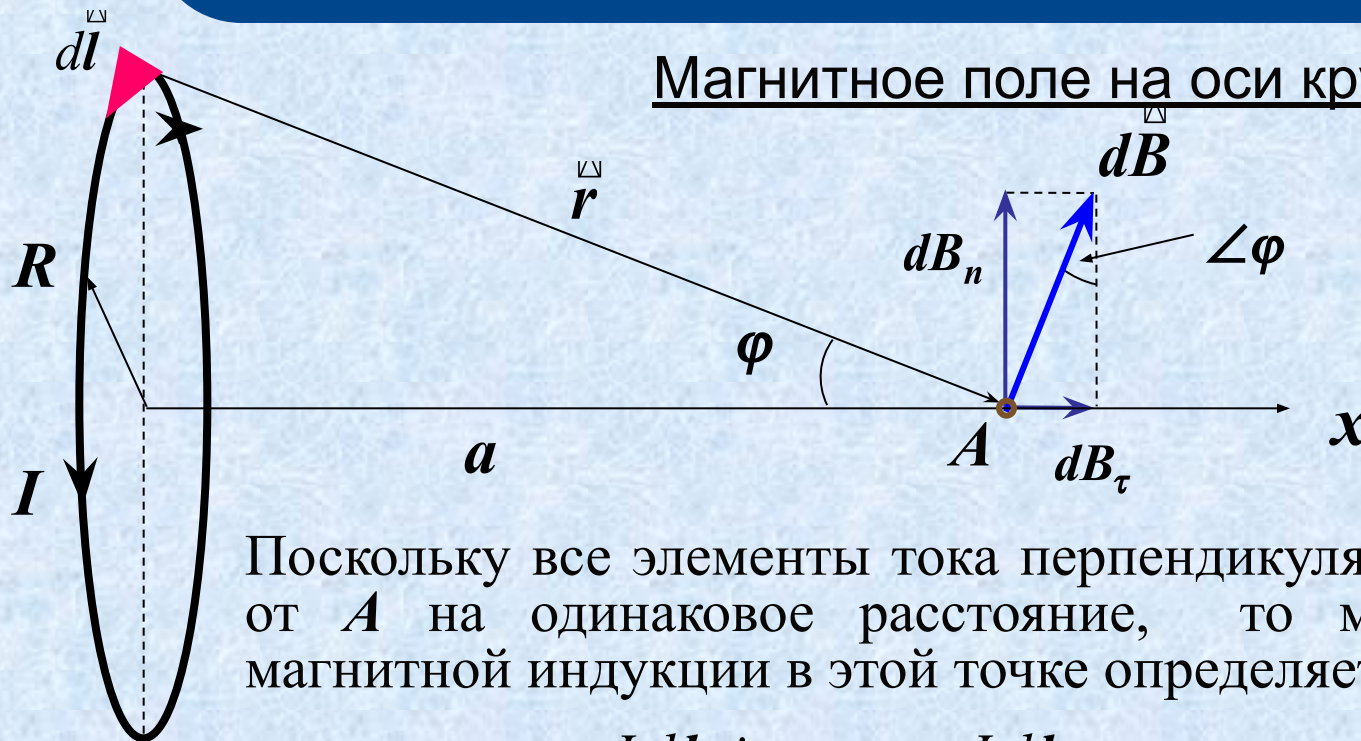


Вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора $d\vec{l}$ и $\vec{r}$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока



Поскольку все элементы тока перпендикулярны и удалены от A на одинаковое расстояние, то модуль вектора магнитной индукции в этой точке определяется выражением

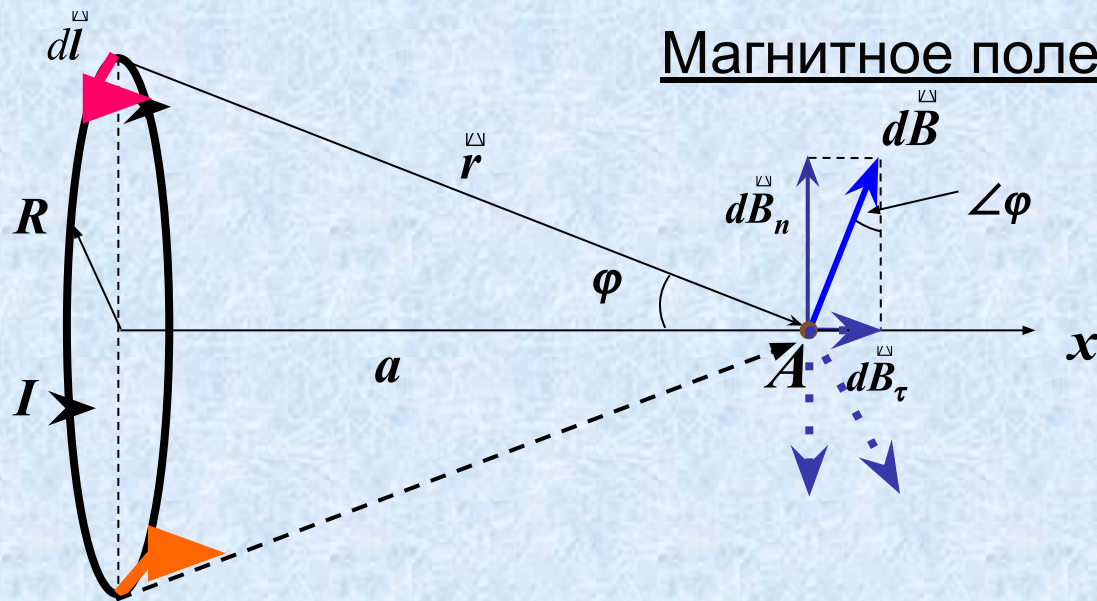
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \quad (\alpha = 90^\circ, \sin 90^\circ = 1)$$

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: $d\vec{B}_\tau$ и $d\vec{B}_n$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока



Любые два противоположных элемента тока создают поле, составляющие $d\vec{B}_n$ которых равны по величине и противоположно направлены.

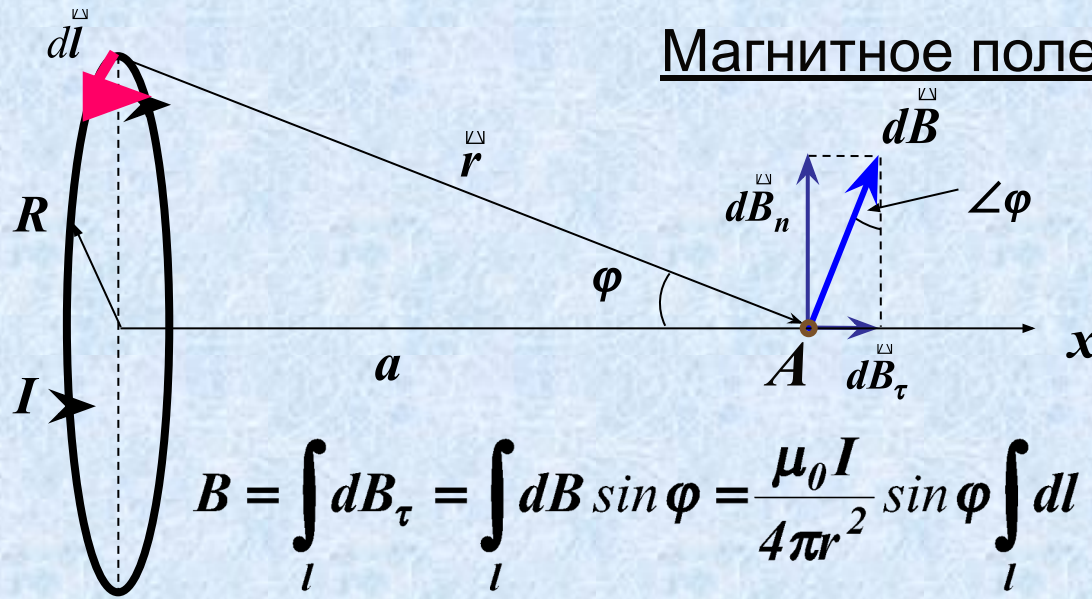
Следовательно, эти составляющие уничтожают друг друга

Поэтому вектор магнитной индукции можно определить, просуммировав составляющие модулей вектора $d\vec{B}_\tau$ (этот вектор направлен вдоль положительной нормали к контуру с током)

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

$$B = \int_l dB_\tau = \int_l dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2} \sin \varphi$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{R}{r}$,
 $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

Магнитное поле на оси кругового тока

В центре кругового тока $a = 0$,
индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вдали от контура на оси x ($a \gg R$): $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}$

Если умножить числитель и знаменатель
этого выражения на π , получим:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi a^3}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь, охватываемая круговым током.

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока

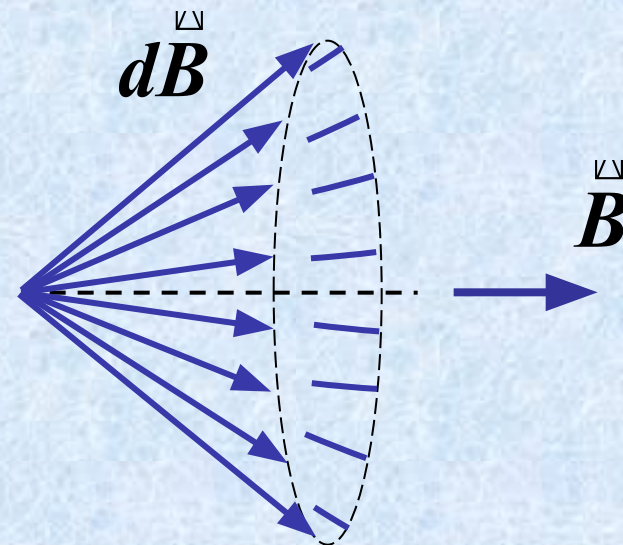
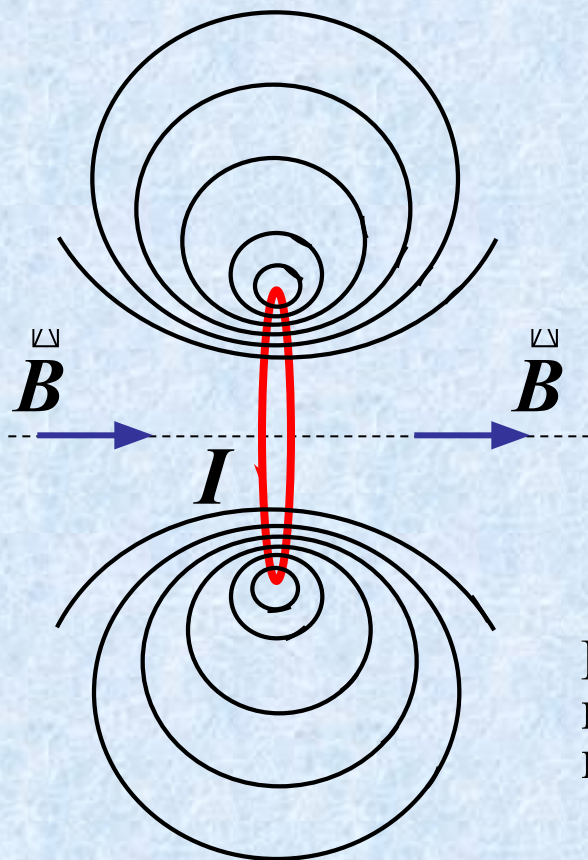
Учитывая, что произведение IS для контура с током есть *магнитный момент контура*, введенный нами ранее, выражение для индукции магнитного поля, созданного замкнутым круговым током вдали от тока, можно записать в виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$$

Записывая это соотношение приняли, что вдали от кругового тока $a \approx r$.

Графическое изображение магнитного поля кругового тока

Покажем линии магнитной индукции поля кругового тока, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока



Направления векторов индукции магнитного поля, в точке, лежащей на оси, которая проходит через центр кругового тока.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку S называется величина

$$\Phi_B = BS \cos \alpha = B_n S,$$

где α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции, B_n - проекция вектора $\mathbf{B}$ на нормаль к площадке.

Магнитный поток через площадку, в зависимости от ориентации вектора $\mathbf{B}$ по отношению к нормали, может быть как положительным, так и отрицательным, что определяется знаком проекции B_n .

Единицей магнитного потока в системе СИ является вебер (Вб).

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Магнитный поток через элемент dS поверхности S соответственно, выражается формулой

$$d\Phi_B = (\vec{B}, d\vec{S}) = B dS \cos \alpha$$

В этой формуле $d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\vec{n}$ - орт вектора нормали.

Полный поток через поверхность S равен сумме потоков через все элементы поверхности, т.е. равен интегралу:

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS$$

Если поверхность замкнутая, то $\Phi_B = \oint_S B_n dS = \oint_S (\vec{B}, d\vec{S})$

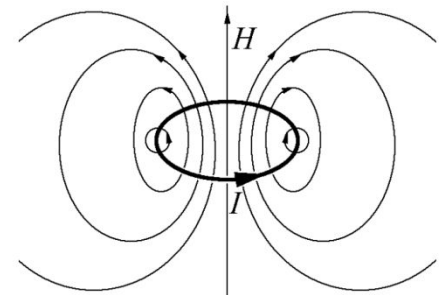
Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\mathbf{B}$

Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, то любая силовая линия пересекает замкнутую поверхность дважды (четное число раз), причем один раз в положительном по отношению к нормали направлении, а другой раз – в отрицательном. Поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность S , всегда оказывается равным нулю:

$$\Phi_B = \oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля.}$$

Поток вектора напряженности магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$



Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Важное следствие из теоремы Гаусса:

поток вектора $\vec{B}$ через замкнутую поверхность S не зависит от формы этой поверхности.

В дифференциальной форме уравнение Гаусса имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Сведения из векторного анализа: ... дивергенция характеризует интенсивность (обильность) истоков и стоков векторного поля.

Если $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, это означает, что магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии $\vec{B}$ замкнутые. Магнитное поле имеет соленоидальный или вихревой характер.

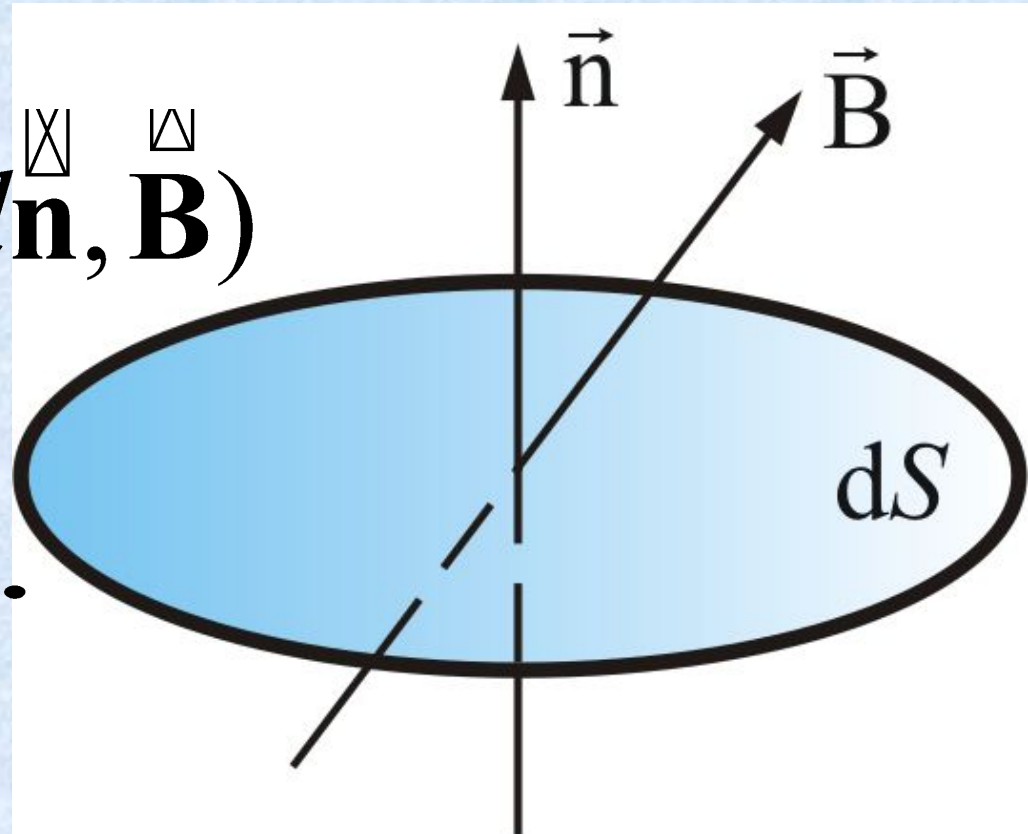
Физическая причина соленоидальности магнитного поля - отсутствие свободных магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам.

Другое определение: 1 Тл равен магнитной индукции при которой магнитный поток сквозь площадку 1 м², перпендикулярную направлению поля равен 1 Вб.

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

$$d\Phi_B = B dS \cos(\angle d\vec{n}, \vec{B})$$

$$\Phi = \int_S B_n dS.$$

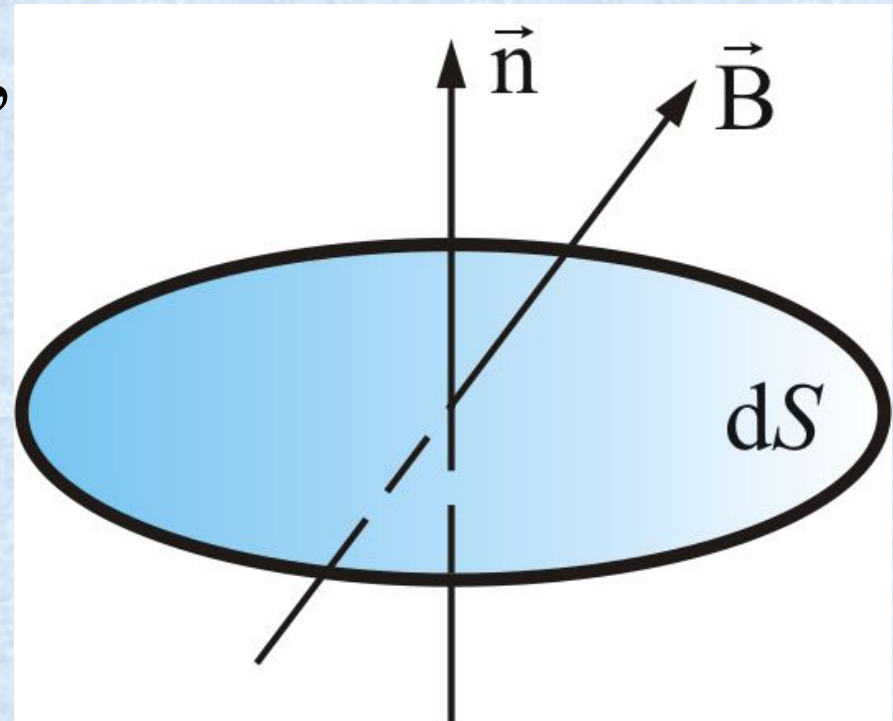


Единица измерения магнитного потока Вб, получила свое название в честь немецкого физика Вильгельма Вебера (1804 – 1891 г.) – профессора университетов в Галле, Геттингене, Лейпциге.

Как мы уже говорили, *магнитный поток Φ , через поверхность S – одна из характеристик магнитного поля*

$$d\Phi_B = B dS \cos(\angle \vec{n}, \vec{B}),$$

$$\Phi = \int_S B_n dS.$$



- Единица измерения магнитного потока в СИ:

- $[\Phi_B] = [B] \cdot [S] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}$

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \quad 1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$$

$$1 \text{ Вб} = 10^4 \text{ Гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ Мкс}$$

- Здесь *Максвелл* (*Мкс*) – единица измерения магнитного потока в СГС названа в честь знаменитого ученого Джеймса Максвелла (1831 – 1879 г.), создателя теории электромагнитного поля.
- Напряженность магнитного поля измеряется $\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$

$$1 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Э} \quad 1 \text{ Э} = 79,6 \approx 80 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$$

Таблица основных характеристик магнитного поля

Наименование	Обозначение	СИ	СГС	СИ/СГС
Магнитная индукция	B	$Tл \left(\frac{H}{A \cdot м} \right)$	Гс	10^4
Напряженность магнитного поля	H	$A/м$	Э	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Магнитная постоянная	μ_0	$\frac{H}{A^2}; \frac{\Phi}{м}$	1	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Поток магнитной индукции	Φ_B	$Вб$ ($Tл \cdot м^2$)	Мкс	10^8

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl$$

где $d\vec{l}$ - вектор элемента длины контура, $B_l = B \cos \alpha$, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

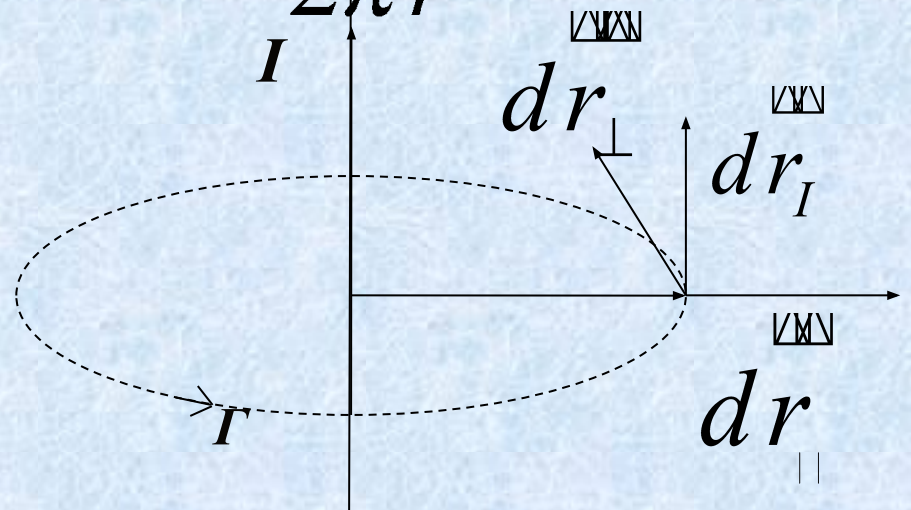
Это закон (теорема) о циркуляции вектора $\vec{B}$. Иначе эта теорема называется законом полного тока для магнитного поля в вакууме.

Найдем циркуляцию магнитного поля по контуру Γ

- Формула $\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{r}) = \mu_0 I$
- Справедлива для контура любой формы

$$C_{\Gamma} = \oint \vec{B} |d\vec{r}| = B \oint |d\vec{r}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$(\vec{B}, d\vec{r}) = (\vec{B}, d\vec{r}_{\perp})$$



Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I$$

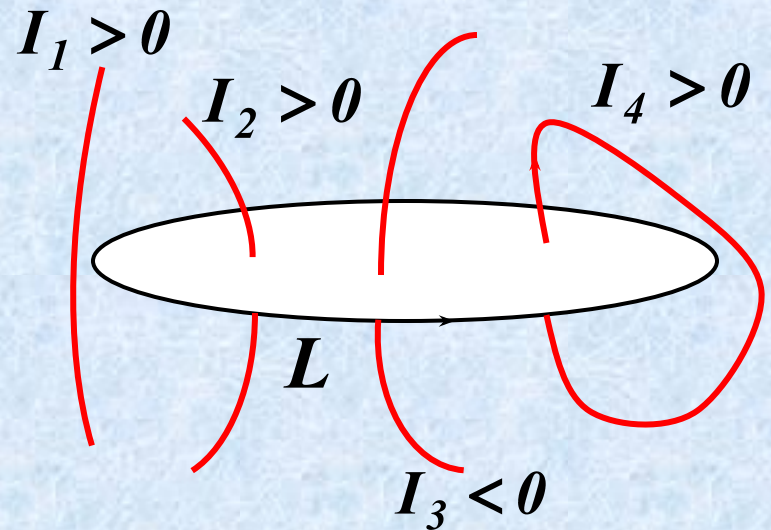
Ток I в теореме есть алгебраическая сумма токов I_k охватываемых контуром L : $I = \sum I_k$

Ток положительный, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления - отрицательный.

Пример

токи I_1 , I_2 и I_4 - положительные, ток I_3 - отрицательный. Сумма токов:

$$I_k = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_2 - I_3 + I_4$$



Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Если ток I распределен по объему, где расположен контур L , то этот ток можно представить как

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}$$

Интеграл берется по произвольной поверхности S , «натянутой» на контур L

Плотность тока $\vec{j}$ под интегралом — это плотность в точке, где расположена площадка $d\vec{S}$.

Вектор $d\vec{S}$ образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

Таким образом, теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ в общем случае будет выглядеть так:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S}$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ не равна нулю. Это означает, что магнитное поле в отличие от электростатического поля не потенциально.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

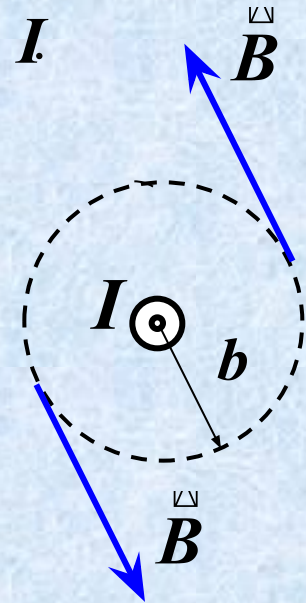
Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ в ряде случаев упрощает расчет поля, особенно если вычисление циркуляции $\vec{B}$ можно свести к произведению $\vec{B}$ (или проекции $\vec{B}$) на длину контура или его часть.

Пример. Вычислим магнитное поле прямого тока I

Пусть ток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

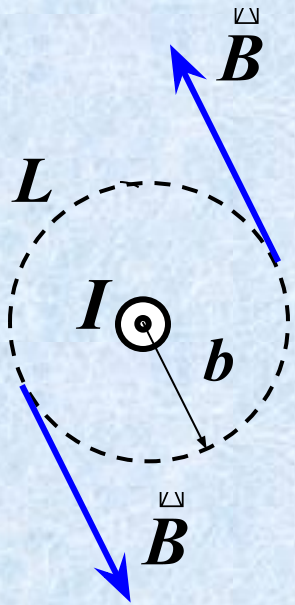
Линии вектора $\vec{B}$ имеют вид окружностей с центром на оси тока.

Во всех точках на расстоянии b от центра модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.



Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для выбранного круглого контура L :



$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi b = \mu_0 I$$

В итоге получили выражение $B 2\pi b = \mu_0 I$, или

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

Эта формула совпадает с выражением, полученным в прошлой лекции.

Примеры расчета магнитных полей

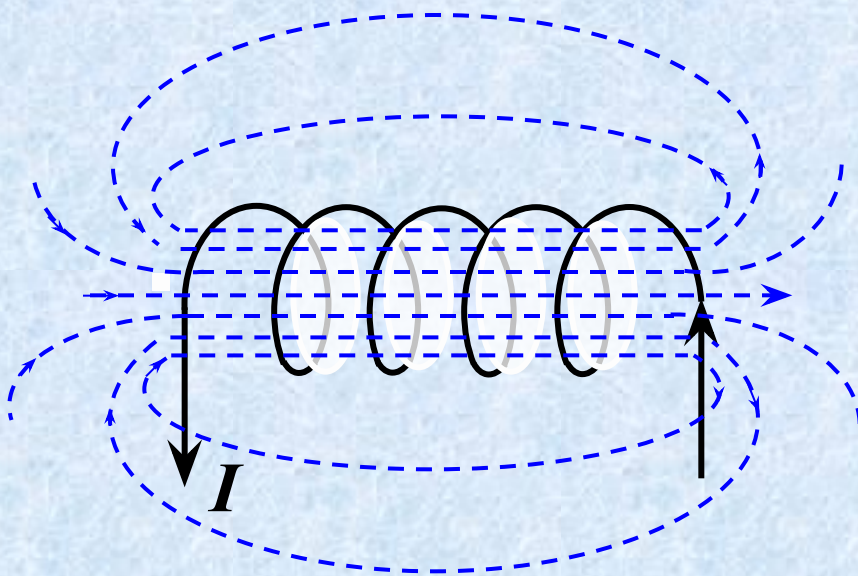
8.1 Магнитное поле соленоида

Используем теорему о циркуляции для расчета магнитного поля соленоида

Соленоид – это проводник, намотанный по винтовой линии на поверхность цилиндрического каркаса

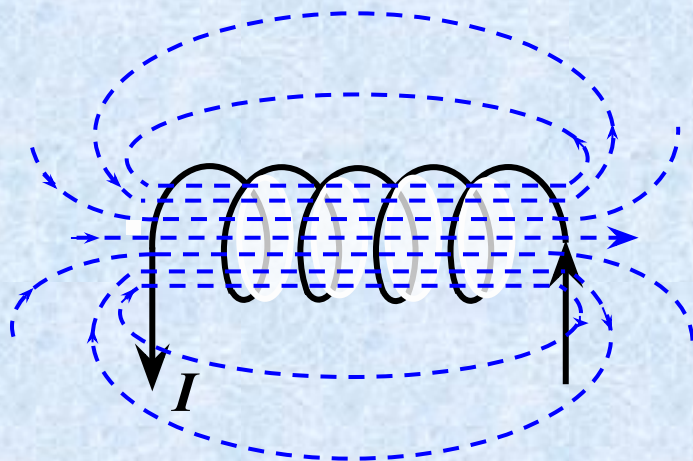
Линии магнитной индукции вне и внутри соленоида выглядят следующим образом:

Линии вектора $\vec{B}$ внутри соленоида направлены по оси так, что образуют с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему



Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше поле вне его. Поэтому можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено внутри его, а поле снаружи отсутствует

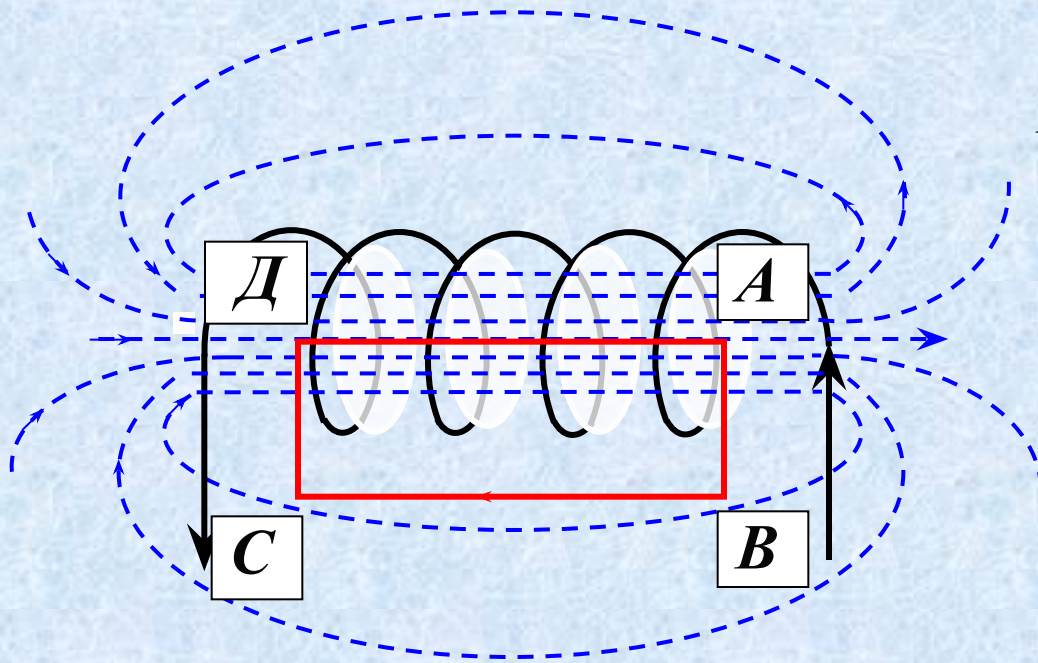
Пусть длинный соленоид с током I имеет n витков на единицу длины.

Если шаг винтовой линии мал, то каждый виток соленоида можно заменить замкнутым витком.

Для расчета поля внутри соленоида выберем прямоугольный контур и вычислим циркуляцию магнитного поля по этому контуру.

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



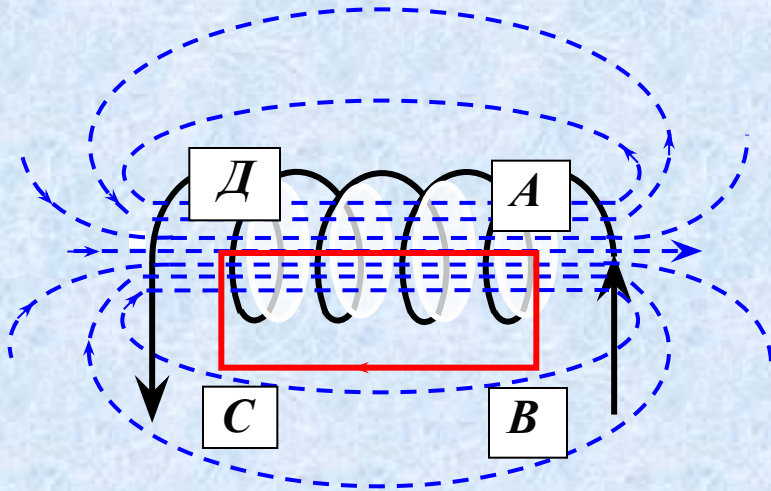
Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру $ABCD$, который охватывает N витков, вычислим по формуле:

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI$$

Интеграл по $ABCD$ можно представить в виде четырех интегралов: по AB , BC , CD и DA .

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида



На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$.

На участке DA контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора $\mathbf{B}$ равна $B l$.

На участке BC вне соленоида $B = 0$

В итоге получаем:

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \oint_{DA} B_l dl = B l = \mu_0 N I$$

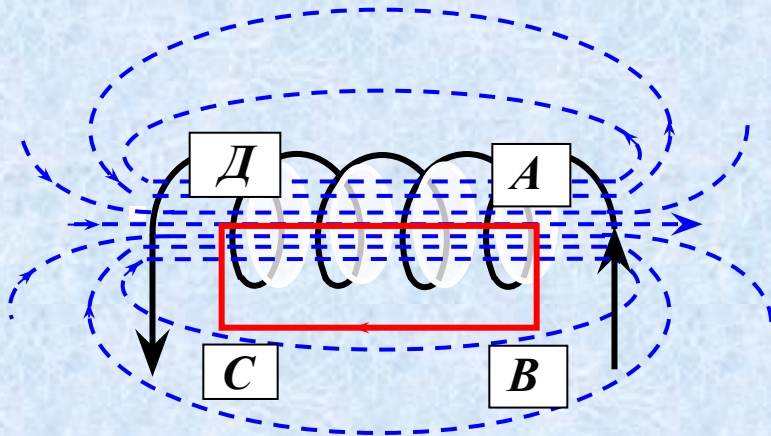
Или:
$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле соленоида

Поскольку $N/l = n$, то окончательно получим $B = \mu_0 n I$

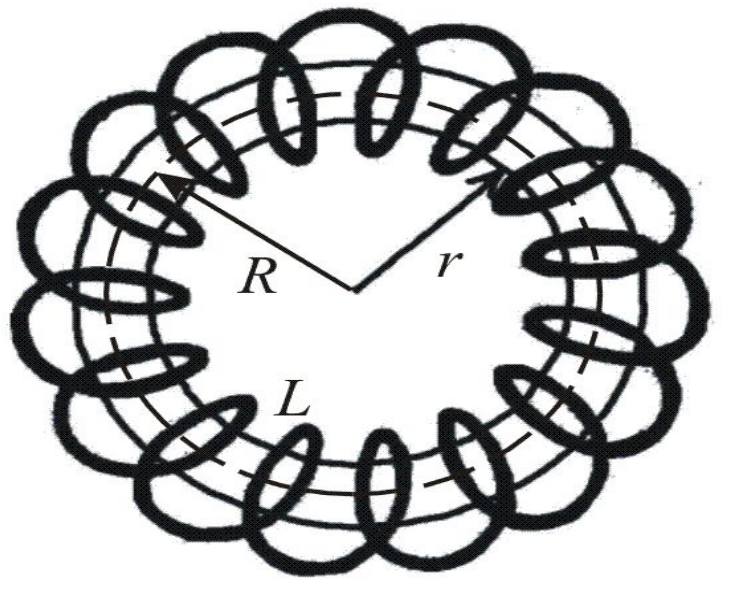
Таким образом, поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами пренебрегаем). Произведение nI называется числом *ампервитков* соленоида и относится к его характеристикам.



Некорректность при выводе формулы: интеграл по CB принят равным нулю. Строгий подход: линии магнитного поля замкнуты и внешнее поле не равно нулю. Однако, это некорректность принципиально на результате не отражается.

8.2. Расчет магнитного поля тороида.

- **Тороид** представляет собой тонкий провод, плотно (виток к витку) намотанный на каркас в форме тора (бублика)
- Возьмём контур L в виде окружности радиуса r , центр которого совпадает с центром тора R .
- В силу симметрии, вектор $\vec{B}$ в каждом токе направлен по касательной к контуру.



Следовательно,

$$\oint_L B_l dl = B 2\pi r = Bl,$$

где $l = 2\pi r$ — длина контура

- Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток $2\pi RnI$ (n – число витков на единицу длины).
- Тогда, в соответствии с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{B}$, можно записать:

$$B2\pi r = 2\pi RnI\mu_0$$

- Отсюда следует, что
- **внутри тора**

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}$$

- Контур вне тороида токов не охватывает, поэтому **вне тороида**

$$B = 0$$

- Для тороида, где радиус тора намного больше радиуса витка, отношение $R / r \approx 1$, тогда **магнитное поле тора B** можно рассчитать по формуле:

$$B = \mu_0 n I.$$

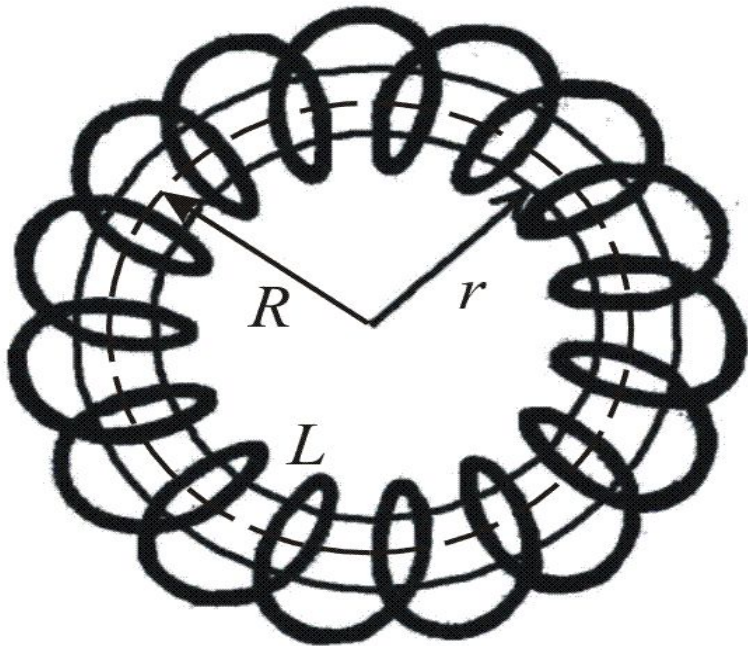
- В тороиде магнитное поле однородно

в любой точке, т.е. по

всему объему

его в

различно



Для самостоятельного изучения*

Релятивистская трактовка магнитных явлений (общие положения).

- *Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона.*
- *Однако закона Кулона недостаточно для анализа взаимодействия движущихся зарядов.*

Такой вывод следует не из конкретных особенностей Кулоновского взаимодействия, а обуславливается релятивистскими свойствами пространства и времени релятивистскими

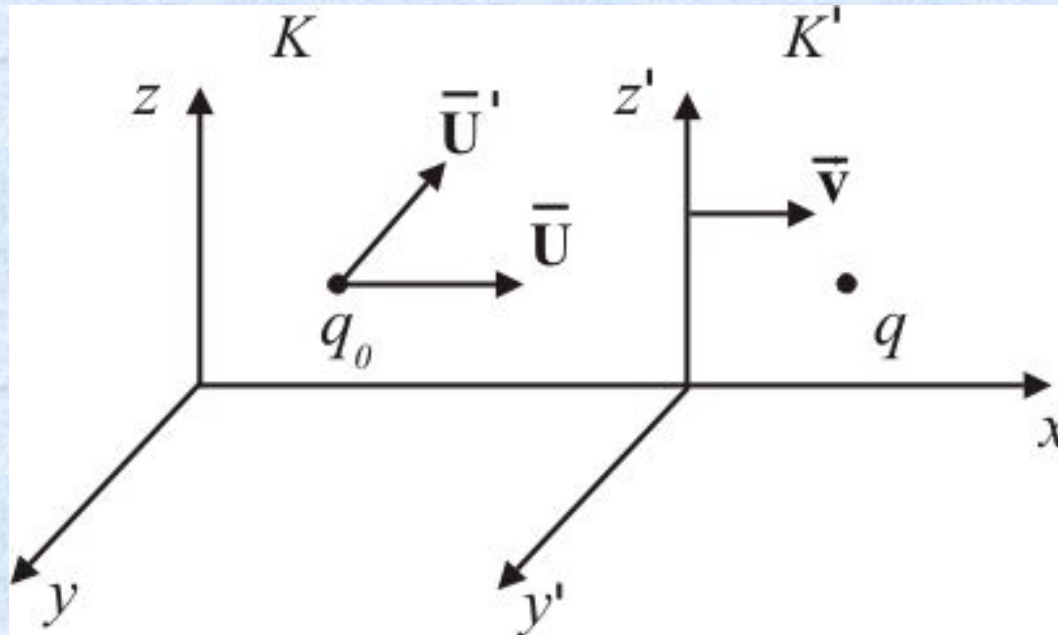
- Релятивистское уравнение движения имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта (ИСО)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

- Требования релятивистской инвариантности уравнения движения приводит к тому, что силы оказываются связанными определенными соотношениями при переходе от одной ИСО к другой. Причём из формулы преобразования сил следует неизбежная **зависимость силы от скорости в релятивистской теории.**

Существования магнитной и электрической сил можно выявить из следующего примера взаимодействия зарядов:

Имеем штрихованную систему K' отчёта, движущуюся со скоростью относительно неподвижной системы отсчёта K . Причём K' движется в направлении увеличения x



Заряд q неподвижен в системе K' , q_0 — движется в K со скоростью U а в K' со скоростью U' .

Рассмотрим взаимодействие этих двух зарядов в системе K и K' . Для этого нам необходимо знать закон преобразования сил при переходе от одной инерциальной системы отчёта к другой и влияние перехода на величину заряда. Но! Мы уже отмечали, что величина заряда не зависит от выбора системы отчёта. Если бы это было не так, то многоэлектронный атом, в котором электроны движутся с разными скоростями, не был бы электрически нейтральным.

Рассмотрим взаимодействие зарядов в системе: K' q — неподвижен, q_0 — движется. Таким образом сила с которой q действует на q_0 — кулоновская. Она будет зависеть от координат q и не зависеть от скорости q_0

$$\vec{\mathbf{F}}' = (F'_x, F'_y, F'_z),$$

эта сила определяется электростатическим полем, которое создаёт заряд q . Тогда

$$\vec{\mathbf{E}}'_{q(xyz)} = (E'_{qx}, E'_{qy}, E'_{qz})$$

где $\vec{\mathbf{F}}'_1$ — сила электростатического взаимодействия.

Теперь рассмотрим взаимодействие этих же зарядов в системе K . Найдём силу, которая действует на заряд q в этой системе.

Согласно формулам преобразования сил при переходе из одной системы отсчёта в другую

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} + [\mathbf{U}, \mathbf{L}]$$

обозначим

$$\mathbf{\Phi} = \left(F'_x, \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{F'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right);$$

Тогда

$$\frac{v^2}{c^2} = \beta^2$$

$$\mathbf{L} = \left(0, \frac{-\left(\frac{v}{c^2}\right)F'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\frac{v}{c^2}F'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

Можно записать $\vec{F} = \vec{\Phi} + [\vec{U} \times \vec{L}] = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Умножим и разделим правую часть на q_0

$$\vec{F} = q_0 \frac{\vec{\Phi}}{q_0} + q_0 \left[\vec{U} \times \frac{\vec{L}}{q_0} \right]$$

Если $v \ll c$ ($\frac{v^2}{2} \Rightarrow \beta^2 \approx 0$), то получим классический случай, т.е. — напряжённость электрического поля создаваемого зарядом q в системе K .

Тогда $\vec{F}_1 = q_0 \vec{E}_q$ — это электрическая сила, действующая на заряд q_0 в системе K , она не зависит от скорости частицы U .

Рассмотрим второе слагаемое

$\vec{F}_2 = q_0 \left[\vec{U} \times \frac{\vec{L}}{q_0} \right]$ — это слагаемое определяет зависимость силы от скорости заряда q_0 . Причем, опять же если $\vec{U} = 0$, то $\vec{F}_2 = 0$.

Кроме кулоновской силы $\vec{F}_1$, на заряд действует другая сила $\vec{F}_2$, отличающаяся от кулоновской. Она возникает в результате движения зарядов и называется магнитной.

То есть движение зарядов создаёт в пространстве магнитное поле или на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила $\vec{F}_2$.

Естественно было бы назвать $\frac{\vec{L}}{q_0}$ — напряжённостью магнитного поля. Однако по историческим причинам эта величина носит название индукции магнитного поля

$$\vec{B}_q = \left(0, \frac{-\left(\frac{v}{c^2}\right) E_{qz}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\frac{v}{c^2} E_{qy}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

Из сравнения $\vec{B}_q$ и $\vec{E}_q$ видно, что при $v \approx c$, $\vec{F}_2$ является величиной второго порядка малости относительно $\vec{F}_1$ — силы кулоновского взаимодействия.

- Кроме кулоновской силы $\vec{F}_1$ на движущийся заряд действует другая сила $\vec{F}_2$, отличающаяся от кулоновской. Она возникает в результате движения зарядов и называется магнитной:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

- То есть движение зарядов создаёт в пространстве магнитное поле или на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила $\vec{F}_2$

При $v \ll c$, $\vec{F}_2$ является величиной второго порядка малости относительно $\vec{F}_1$ — силы кулоновского взаимодействия.

• Т.о., при $v \ll c$, $F_2 \ll F_1$
тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = q_0 \vec{E}_q$$

• Следовательно *магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим по величине лишь при достаточно больших скоростях ($v \approx c$)* заряженных частиц.

Таким образом *при* $v \approx c, F_2 \approx F_1$

Полную силу, действующую на движущийся заряд q_0 со стороны заряда q в системе K можно записать, как

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}_q + q_0 [\vec{v}, \vec{B}_q]$$

Таким образом *магнитное поле мы ввели исходя из инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил.*

СТО вскрывает физическую природу магнетизма, как релятивистский эффект.

Лекция окончена

