ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Применение методов оптимизации

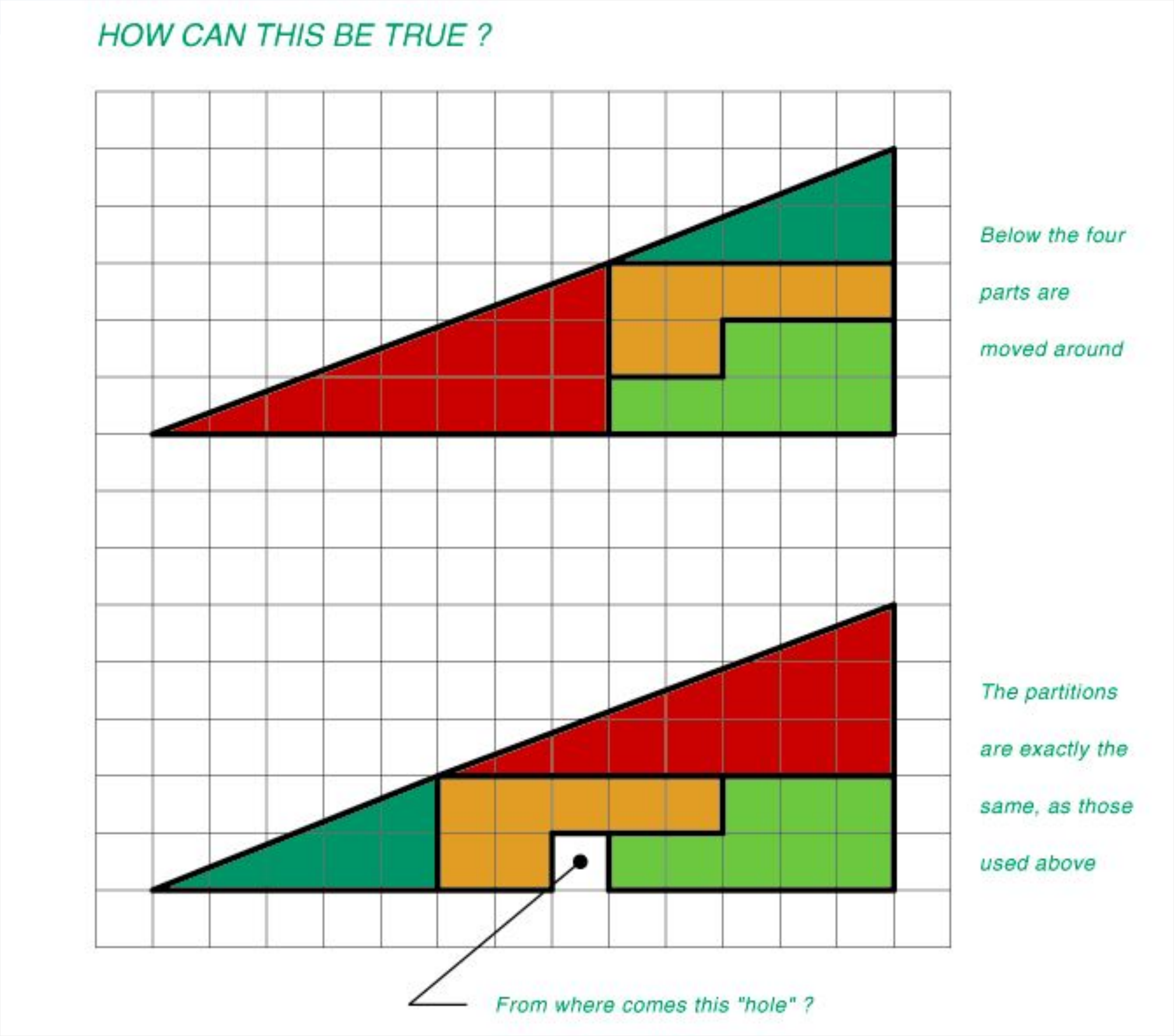
Константин Ловецкий

Декабрь 2012

Кафедра систем телекоммуникаций

Wedge Paradox

Contributed by Carsten Kolve



Нанооптика

Проектирование тонкопленочных структур используется в производстве:

- жидкокристаллических дисплеев
- солнечных батарей на основе диэлектриков
- фотоэмиссионных диодов
- просветляющих покрытий
- поляризаторов
- миниатюрных лазеров
- управляемых оптических элементов

Проектирование оптических покрытий состоит из следующих этапов

- Физическая модель
- Математическая модель
- Целевая функция – мера качества модели
- Решение оптимизационной задачи

Методы оптимизации

- Методы условной оптимизации
- Методы безусловной оптимизации

Что такое оптимизация?

Задача оптимизации: Максимизация или минимизация некоторой функции на некотором множестве, часто представляющем собой множество выборов в определенной ситуации. Функционально существует возможность сравнения различных выборов для определения «наилучшего».

Области применения: Минимальная стоимость, максимальный доход, оптимальное управление, вариационное исчисление, создание новых конструкций и приборов.

Что такое оптимизация?

Цель изучения: Усвоение практических и теоретических аспектов:
Результат моделирования: На какой результат надеяться при постановке оптимизационной задачи? Какие свойства благоприятны, а какие нет? Что может способствовать правильной постановке задачи? К какому классу лучше отнести конкретную задачу?
Анализ решения: Что подразумевается под «решением»?
Условия существования и единственности решения. Каким образом распознать и охарактеризовать решение? Что произойдет при возмущении исходной задачи?
Численные методы: Итеративные схемы решения. Существуют ли способы (локального) упрощения проблемы? Сравнение различных способов оптимизации.

Свойства оптимизации как математической дисциплины

Описательная *– предписывающая (****конструктивная****) математика:* Большая часть математических задач описывала ранее поведение различных (физических) систем. Появление компьютеров позволяет использовать математику для *проектирования* систем с *предсказуемым* поведением, что обеспечивается оптимизацией.

Равенства - неравенства: Оптимизация обычно имеет дело с переменными, которые лежат в определенном диапазоне, диктуемом ограничениями на допустимый результат. Это приводит к тому, что ограничения-неравенства используются гораздо чаще, чем равенства.

Свойства оптимизации как математической дисциплины

Линейные/нелинейные – выпуклые/невыпуклые: Подразделение между линейностью и нелинейностью задач гораздо менее важно при оптимизации, чем различие между выпуклостью и не выпуклостью целевых функций и ограничений. Этот факт требует от математической постановки задачи совершенно новых подходов.

Дифференцируемость - не дифференцируемость : Преобладание неравенств вместе с такими специальными функциями как «max» и «min» приводит к тому, что **методология классической математики** с опорой на гладкость поверхностей и дифференцируемость функций ***не является преобладающей*.**

Свойства оптимизации как математической дисциплины

Конечномерная оптимизация: Случай, когда результат расчета целевой функции соответствует выбору конечного числа действительных переменных, называемых искомыми переменными. Обычно их обозначают через $x_1, x_2, ..., x_n$
и возможный набор переменных соответствует точке

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

которая называется допустимой точкой.

Ограничения: Условия, налагаемые на искомые переменные, определяют множество допустимых точек в пространстве переменных задачи.

Конечномерная оптимизация

Ограничения типа равенств и неравенств: Это условия вида (строгих неравенств стараются избегать)

$$f_i(x) = c_i, \quad f_i(x) \le c_i, \quad f_i(x) \ge c_i$$

для функций $f_i(x), \quad x \in R^n$ и констант $c_i \in R$

Интервальные ограничения: Условия, налагаемые на некоторые искомые переменные, ограничивающие их изменения рамками заданных интервалов. Весьма важны в приложениях. Например, требование положительности некоторых переменных, или их ограниченность максимальными значениями.

Конечномерная оптимизация

Линейные ограничения : Это условия вида (строгих неравенств стараются избегать)

$$\sum a_i x_i \le c_i, \quad \sum b_i x_i \ge d_i$$

для линейных функций $f_i(x), x \in R^n$ и констант $a_i, b_i, c_i, d_i \in R$

Параметры (данные) : Задача обычно включает не только искомые переменные, но и коэффициенты целевой функции задачи и константы ограничений. Условия, налагаемые на эти параметры , такие как их положительность, не сказываются на формулировке исходной задачи, однако они могут серьезно влиять на алгоритмы и методы решения. Именно поэтому на эти условия необходимо обращать пристальное внимание.

Конечномерная оптимизация

Параметры (данные) :
Следует различать ***искомые переменные*** и ***коэффициенты целевой функции*** задачи и ***константы ограничений*** поскольку это позволяет не путать их при обращении к подпрограммам минимизации.

Обычно все переменные и константы передаются в стандартные подпрограммы минимизации единым массивом – вектором X.
Поэтому желательно учитывать такую возможность при программировании.

Математическое программирование

Математическое программирование **–** синоним конечномерной минимизации. Этот термин предшествовал термину «компьютерное программирование», который возник на ранних стадиях развития компьютеров при решении оптимизационных задач.
Термин «программирование» в смысле «оптимизация» до сих пор присутствует в классификации задач:

- **линейное программирование;**
- **квадратичное программирование;**
- **выпуклое программирование;**
- **целочисленное программирование;**

и т.д.

Пример №1. Дизайн коробки.

Общее описание. При конструировании некоторых объектов, систем либо структур, их параметры должны удовлетворять определенным условиям и ограничениям, налагаемыми свойствами конструкции. Необходим выбор независимых переменных, от которых зависит конечный продукт, таких как себестоимость, вес и т.д.

Искусственный пример.

Надо рассчитать параметры консервной банки заданного объема так, чтобы минимизировать общую стоимость коробки с 12-ю банками, уложенными по формуле 3х4.

Цена рассчитывается как сумма:

$c_1S_1 + c_2S_2$, где S_1 - площадь поверхности 12-ти банок, а S_2 - площадь поверхности коробки с банками. $c_1 > 0, c_2 > 0$

Пример №1. Дизайн коробки.

Общее ограничение. Сторона ящика не может превышать заданной величины D_0.

Параметры конструкции: r - радиус, h - высота банки;

Ограничение на объем: $\pi r^2 h = V_0$, или $\pi r^2 h \geq V_0$.

Боковая поверхность: $S_1 = 12(2\pi r^2 + 2\pi r h) = 24\pi r(r+h).$

Размеры коробки: $8r \times 6r \times h.$

Боковая поверхность коробки: $S_2 = 2(48r^2 + 8rh + 6rh) = 4r(24r + 7h).$

Ограничение размеров: $8r \leq D_0, 6r \leq D_0, h \leq D_0$

Положительность ограничений: $r \geq 0, h \geq 0 \quad (!)$

Пример №1. Дизайн коробки.

Резюме. Искомыми переменными являются радиус и высота банки. Их множество допустимых значений описывается ограничениями:

$$r \geq 0, h \geq 0, 8r \leq D_0, 6r \leq D_0, h \leq D_0, \pi r^2 h = V_0.$$

Первые пять условий – ограничения-неравенства, шестое – ограничение-равенство. На множестве допустимых значений надо минимизировать функцию:

$$f_0(r,h) = c_1\left[24\pi r(r+h)\right] + c_2\left[4r(24r+7h)\right] = d_1 r^2 + d_2 rh,$$

где $d_1 = 24\pi c_1 + 96c_2, d_2 = 24\pi c_1 + 28c_2.$

Величины V_0, D_0, c_1, c_2 и, следовательно, d_1, d_2

-исходные данные (константы).

Хотя неравенства $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ не являются «ограничениями» задачи.

Пример №1. Дизайн коробки.

Напомним, требуется определить радиус основания и высоту консервной банки заданного объема так, чтобы минимизировать общую стоимость коробки с 12-ю банками, уложенными в 4 ряда по три коробки в каждом ряду.

Математическая формулировка. Минимизировать функцию:

$$f_0(r,h) = c_1\left[24\pi r(r+h)\right] + c_2\left[4r(24r+7h)\right] = d_1 r^2 + d_2 rh,$$

где $d_1 = 24\pi c_1 + 96c_2, d_2 = 24\pi c_1 + 28c_2.$

на множестве допустимых значений переменных, заданном ограничениями:

$$r \geq 0, h \geq 0, 8r \leq D_0, 6r \leq D_0, h \leq D_0, \pi r^2 h = V_0.$$

Пример №1. Подробное рассмотрение

Избыточные ограничения. Очевидно, что ограничение

$6r \le D_0$ слабее уже имеющихся.

Оно может быть без ущерба опущено. Однако в реальных задачах распознавание избыточных ограничений может оказаться не менее сложной проблемой, чем решение исходной задачи оптимизации.

Неактивные ограничения. Оптимальное решение (r, h) (единственное?) может удовлетворять одному или всем условиям-неравенствам как строгим неравенствам.

$$8r \le D_0, \quad h \le D_0 \quad \Rightarrow \quad 8r < D_0, \quad h < D_0$$

Это **неактивные** ограничения. Они могут быть без ущерба опущены. Иногда может помочь предварительный отбор **неактивных** ограничений. И во многих численных приложениях это основная и очень сложная проблема.

Пример №1. Подробное рассмотрение

Избыточные переменные. Конечно же, возможно разрешить уравнение $\pi r^2 h = V_0$ относительно h и «упростить» задачу – оставить лишь одно неизвестное. Но, кроме того, что такой прием может быть полезен в данном конкретном случае, переход к меньшему числу переменных может ухудшить остальные ограничения.

Неравенства или равенства? Ограничение $\pi r^2 h = V_0$ может быть записано в виде $\pi r^2 h \geq V_0$, не влияя ни на что, кроме решения.

Задача такова, что оптимум все равно достигается при условии равенства. А неравенство определяет **выпуклое** множество допустимых значений, в то время как равенство – нет.

Пример №1. Подробное рассмотрение

Выпуклость. Даже с учетом последних формулировок задача не становится «выпуклой», поскольку сама целевая функция не выпукла.

$$f_0(r,h) = d_1 r^2 + d_2 rh,$$

Урок заключается в том, что формулировка задачи требует творческого подхода и опыта при учете важных свойств, необходимых для аккуратного решения проблемы оптимизации.