

Численный анализ Фурье

Дискретное преобразование Фурье

Целью получения спектральных характеристик является выделение частот гармонических колебаний, появление которых особенно существенно, значимо для заданной функции. На практике методами спектрального анализа обычно исследуются периодические модели данных, оцифрованные данные в режиме реального времени. Цель спектрального анализа таких временных рядов – разложить комплексные или действительные ряды с циклическими компонентами на сумму элементарных гармоник с определенными круговыми частотами.

Модель множественной регрессии может быть записана в виде

$$g_j = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos\left(k_j \cdot \frac{2\pi}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin\left(k_j \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j$$

$$a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos j\pi = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j g_j$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(j \cdot \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \sin\left(j \cdot \frac{2\pi k}{N}\right) \quad j \leq k \leq N/2$$

$$g_j = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos(\lambda_k \cdot j) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin(\lambda_k \cdot j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

λ_k - круговая частота, выраженная в радианах, $\lambda_k = 2\pi\nu_k$, $\nu_k = \frac{k}{N}$.

Таким образом, дискретный спектральный анализ определяет корреляции функций синусов и косинусов различной частоты с наблюдаемыми значениями, данными. Если найденная корреляция (коэффициент при определенном синусе или косинусе) велика, то можно заключить, что существует строгая периодичность на соответствующей частоте данных.

Пример объяснения ДПФ (Шамвэй, 1988)

Создадим ряд из 16 наблюдений

$$g_j = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 0.0625 \cdot j) + 0.75 \cdot \sin(2\pi \cdot 0.2 \cdot j)$$

$$\lambda_1 = 0.0625 \quad \lambda_2 = 0.2$$

Аналогом спектральной функции $C(\omega)$ служит периодограмма. Значения периодограммы рассчитываются по формуле

$$P_0 = N \cdot a_0^2,$$

$$P_k = (a_k^2 + b_k^2) \cdot \frac{N}{2}, \quad 0 < k \leq \frac{N}{2}$$

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕМЕННОЙ G

ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ 16

J	Частота $\nu_j = \frac{j}{N}$	Период $T_j = \frac{1}{\nu_j}$	Косинус коэфф.	Синус Коэфф.	Периодо- грамма
1	0.0625	16.00	1.006	0.028	8.095
2	0.1250	8.00	0.033	0.079	0.059
3	0.1875	5.33	0.374	0.559	3.617
4	0.2500	4.00	-0.144	-0.144	0.333
5	0.3125	3.20	-0.089	-0.060	0.092
6	0.3750	2.67	-0.075	-0.031	0.053
7	0.4375	2.29	-0.07	-0.014	0.040
8	0.5000	2.00	-0.068	0.000	0.037