Применение конформных отображений для описания области устойчивости автоматизированной системы

Система автоматического регулирования (САР) называется устойчивой, если регулируемая величина после отклонения в результате внешнего воздействия возвращается к заданному значению.

Если САР неустойчива, то в системе возникают незатухающие колебания. Рассмотрим упрощенную, модельную задачу.

Известно, что линейные динамические звенья САР описываются уравнениями

$$a_0\ddot{x}_2 + a_1\dot{x}_2 + a_2 x_2 = b_0\dot{x}_1 + b_1 x_1,$$

де $x_1(t)$ - входная, $x_2(t)$ - выходная величины при нулевых начальных условиях:

$\begin{cases} x_2(0)=0 \\ \dot{x}_2(0)=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ \dot{x}_1(0)=0 \end{cases}$. Пусть для определенности $a_0, a_1, a_2 > 0$.

Устойчивость такой системы может быть установлена на основании анализа корней соответствующего характеристического уравнения

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

$$x_2(t) = x_2^{однор}(t) + x_2^{част.}(t)$$

$x_2^{однор}(t) = C_1 e^{\lambda 1 t} + C_2 e^{\lambda 2 t}$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, значения которых находим, удовлетворяя начальным условиям.

Пусть $\lambda 1 = s1 + i\omega$ и $\lambda 2 = s2 - i\omega$.

Если $s1 < 0$ и $s2 < 0$, то колебательный процесс происходит с затуханием по экспоненциальному закону, поскольку выходная величина $x_2(t)$ - решение ЛДУ, в форме будет содержать затухающие экспоненты вида $e^{st + i\omega t}$ ($s < 0$).

В этом случае говорят

САР—устойчива.

Если корни характеристического уравнения являются мнимыми $\lambda 1 = i\omega$, $\lambda 2 = -i\omega$, то система находится на границе устойчивости, поскольку выходная функция $x_2(t)$ будет изменяться по синусоидальному закону.

Область неустойчивости САР на КП ($\lambda \in C$, $\lambda = s + i\omega$, $s \geq 0$) находится справа от мнимой оси, это та область, где в решении могут появиться незатухающие экспоненты.

$$z = M(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \qquad \lambda \in C, \quad \lambda = s + i\omega$$

Областью определения функции $z = M(\lambda)$ служит область

КП : $\Omega = \{\lambda : \quad s \leq 0\}$, и ее границей будет прямая $\gamma : \lambda = i\omega$.

Отображение, осуществляемое ФКП $z = M(\lambda)$, конформно.

Областью значений $z = M(\lambda)$ служит область $Z = \{z \in C \mid z = \tau + i\sigma\}$.

Отображение $z = M(\lambda)$ переводит прямую γ в кривую Г

Получим уравнение этой кривой

$$z = \tau + i\sigma = a_0 (i\omega)^2 + a_1 (i\omega) + a_2, \qquad \lambda = i\omega \in \gamma$$

$$\begin{cases} \tau = a_2 - a_0 \omega^2 \\ \sigma = a_1 \omega \end{cases} \qquad \Gamma: \ \tau = a_2 - \frac{a_0}{a_1^2} \sigma^2$$

Область неустойчивости на КП(λ) переходит в область неустойчивости на КП(Z)