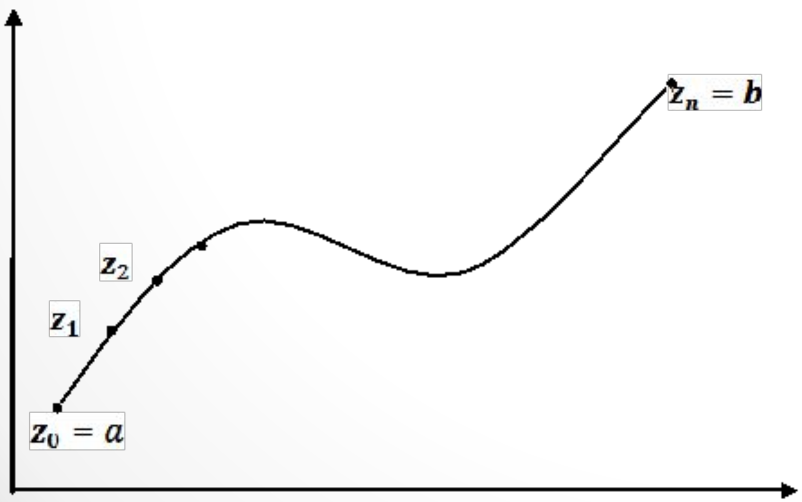
Интегрирование по комплексному аргументу. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Интеграл от функции комплексного переменного. Рассмотрим на комплексной плоскости Z кусочно-ориентированную кривую γ и предположим, что на этой кривой определена функция $f(z)$ комплексного переменного z. Разобьем кривую γ на n частичных дуг последовательными точками деления

$$z_0 = a, \quad z_1, \ldots, z_n = b,$$



Сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \quad \zeta_k$$ - произвольная точка k-ой частичной

называется комплексной интегральной суммой вдоль кривой γ.

Интеграл ФКП______ $\lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_\gamma f(z)dz$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1},$$
$$\zeta_k = \lambda_k + i\eta, \quad u_k = u(\lambda_k, \eta_k), \quad v_k = v(\lambda_k, \eta_k).$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$$

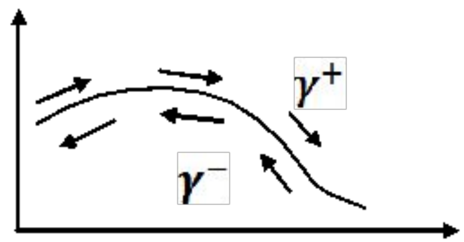
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

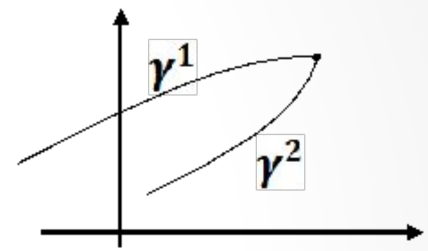
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)$$

При этом свойства интеграла ФКП совпадут со свойствами криволинейных интегралов ФДП:

1. $$\int\limits_{\gamma}(f_1(z)+f_2(z))dz=\int\limits_{\gamma}f_1(z)dz+\int\limits_{\gamma}f_2(z)dz$$

2. $$\int\limits_{\gamma}C\cdot f(z)dz=C\cdot\int\limits_{\gamma}f(z)dz$$





3. $$\int\limits_{\gamma^{+}}f(z)dz=-\int\limits_{\gamma^{-}}f(z)dz$$

4. $$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2}f(z)dz=\int\limits_{\gamma_1}f(z)dz+\int\limits_{\gamma_2}f(z)dz$$

5.

$$\left|\int\limits_{\gamma}f(z)dz\right|\le\int\limits_{\gamma}|f(z)||dz|\le M\cdot\int\limits_{\gamma}|dz|=M\cdot|l|;$$

$$M=\left|f(z)\right|_{z\in\gamma}$$

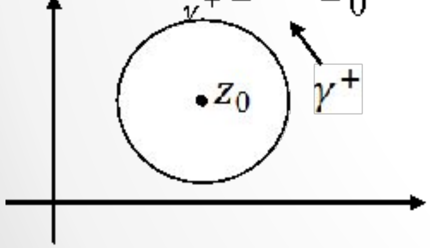
Вычисление интеграла ФКП. Если задано параметрическое задание кривой, то справедлива следующая формула:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

Пример. Показать, что если контур γ^+ - окружность с центом в точке z_0, обходимая против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении, то

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} dz = 2\pi i, \qquad \gamma^+ : z = z_0 + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$$



$$z'(t) = ire^{it}$$

$$\int_{\gamma+} \frac{dz}{z - z_0} dz = \int_{0}^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(z_0 + re^{it}) - z_0} = \int_{0}^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^n \, dz = 0, \quad n \neq 1$$

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^n \, dz = 0$$

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^n \, dz = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} \left(e^{2\pi(n+1)i} - 1 \right) = 0 \, .$$

Теорема Коши (для односвязной области)

Если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, γ - произвольная замкнутая кривая Жордана из области D, тогда интеграл ФКП по замкнутому контуру равен нулю

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma udx - vdy + i\oint_\gamma vdx + udy = \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Следствие. Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D и выбраны две кривые Жордана γ_1, γ_2 с общим началом и концом, лежащие в односвязной области D, тогда

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Возможна следующая запись

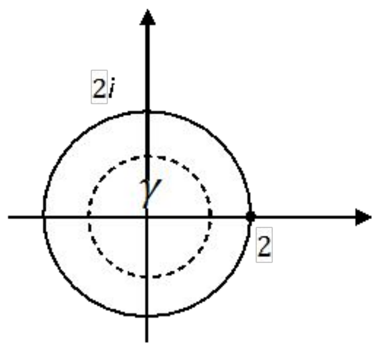
$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$, z_0, z_1 - начальная и конечная точка для кривых γ_1, γ_2.

Теорема Коши для односвязной области не выполняется для многосвязной области!!!

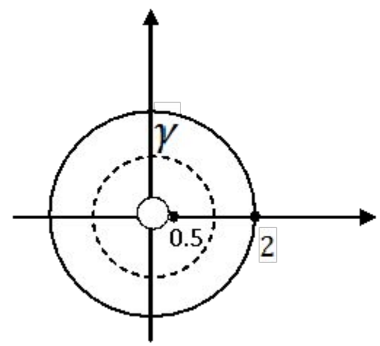
Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}$, применяя формулу Коши

А) контур γ принадлежит односвязной области КП $\gamma \in D = \{|z| < 2`\}$;

В) контур γ принадлежит 2-связной области КП $\gamma \in D = \{0.5` < |z| < 2`\}$.



$A)$



$B)$

A) подинтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z}$ не является аналитической в этой области, в точке $z=0$ функция не определена, поэтому нельзя применить формулу из теоремы Коши для односвязной области.

B) в 2-связной области функция будет аналитическая, выберем в качестве контура интегрирования окружность единичного радиуса, принадлежащую заданной 2- связной области.

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{z},\quad D=\{z:0.5<|z|<2,\}\quad \gamma(t)=\cos t+i\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z}=\oint_{|z|=1}\frac{\bar{z}dz}{z\bar{z}}=\oint_{|z|=1}\frac{\bar{z}dz}{|z|^2}=\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=\int_0^{2\pi}(\cos t-i\sin t)d(\cos t+i\sin t)=$$

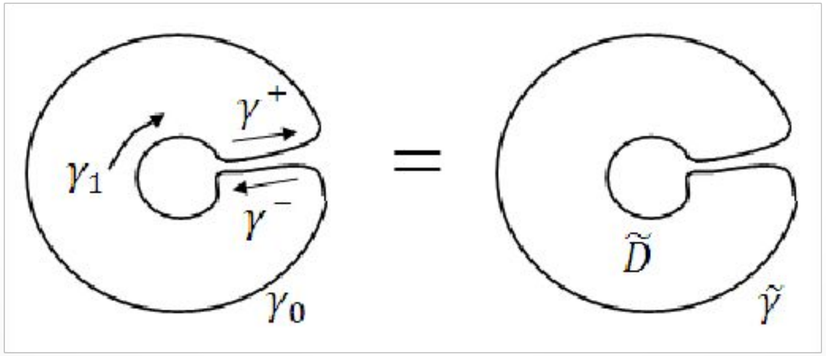
$$=\int_0^{2\pi}(-\cos t\sin t+\cos t\sin t+i(\cos^2 t+\sin^2 t))dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i\neq 0$$

Теорема Коши *(для многосвязной области)*

Если $f(z)$ аналитическая функция в многосвязной области D, с границей ∂D и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ - контурные гладкие кривые Жордана из области D, тогда при условии обхода контуров в положительном направлении для расчета интеграла по границе многосвязной области справедлива следующая формула:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \sum_{k=2}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz .$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 .$$



Первообразная

$$F'(z) = f(z)$$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz + C$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))$$

$$\int_a^b F(z)dG(z) = F(z)G(z)\Big|_a^b - \int_a^b G(z)dF(z)$$

Пример. Вычислить интеграл от аналитической функции

$$\int_\gamma z\cos z dz$$

вдоль контура $\gamma((t) = t + it, \quad t \in [0,1]$.

$$\int_\gamma z\cos z dz = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} z\cos z dz = \int_0^{1+i} z\cos z dz = \left| \begin{matrix} u = z \\ dv = \cos z dz \end{matrix} \right| = z\sin z \Big|_0^{1+i} - \int_0^{1+i} \sin z dz =$$

$$= (1+i)\sin(1+i) + \cos(1+i) - 1$$

Теорема. Если в односвязной области D задана аналитическая ФКП

$f(z)$ и

и γ - гладкая кривая Жордана, принадлежащая области D, а z_0 - внутренняя точка области, обходимая контуром γ в положительном направлении, то справедлива ***интегральная формула Коши***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} .$$