Ряды Лорана и особые точки. Вычеты

Ряд Лорана. Ряд Лорана – это формальная сумма вида

$$\ldots + a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \ldots + a_{-1}\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots =$$

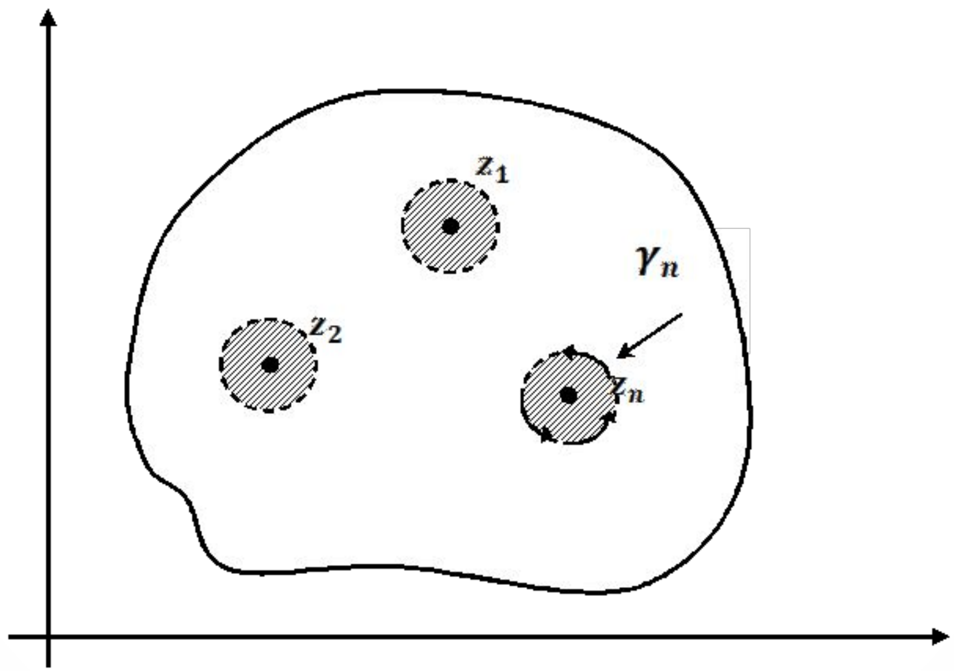
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Теорема. Если $f(z)$ - аналитическая ФКП в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$, тогда она единственным образом представима рядом Лорана вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad R_1 < r < R_2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Особые точки. Если $f(z)$ - аналитическая ФКП в «выколотом» кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, за исключением точки z_0, тогда точка z_0 называется изолированной особой точкой (ИОТ) для функции $f(z)$.



Название ИОХ	Определение
Устранимая ИОХ	$\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
Полюс	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$
Существенно особая точка	$\overline{\exists} \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

Пример

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

$f(z)$ **является аналитической в кольце** $0 < |z-1| < \infty$

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

Название ИОТ	Форма ряда Лорана
Устранимая ИОХ	Отсутствуют члены ряда с отрицательными показателями степенного ряда
✓ **Полюс**	Конечное число членов ряда с отрицательными показателями степени
Существенно особая точка	Бесконечное число членов ряда с отрицательными показателями степени

✓ Полюс порядка m, если m наибольшее натуральное число, такое, что

$a_{-m} \neq 0$. Полюс первого порядка называется простым полюсом.

Теорема. Если $z = z_0$ - ИОТ для функции $f(z)$ и существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = A, \quad A \neq 0,$$

Тогда $z = z_0$ - полюс порядка m.

Особыми точками являются полюсы и устранимая особая точка.

Особая точка может быть бесконечно удаленной.

Тогда ряд Лорана в ее окрестности будет иметь вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

При этом полюс $z = \infty$ - порядка m, если m наибольшее натуральное число,

такое, что $a_m \neq 0$.

Название ИОТ	**Форма ряда Лорана**
Устранимая ИОХ	Отсутствуют члены ряда с положительными показателями степенного ряда
✓ **Полюс**	Конечное число членов ряда с положительными показателями степени
Существенно особая точка	Бесконечное число членов ряда с положительными показателями степени

Пример. Считаем известным разложение функции в ряд Лорана

$$f(z) = z^3 e^{1/z} \Rightarrow z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0} \frac{1}{n!\, z^n} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!\, z} + \frac{1}{5!\, z^2} + \dots$$

$z = \infty$ -полюс порядка 3.

Функция $f(z)$ называется ***мероморфной***, если в каждом круге она является аналитической, за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Пример. Функция

$$f(z) = \frac{1}{\sin x}$$ - мероморфная функция.

$z = k\pi$ - простые полюсы этой функции, их счетное число $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ поскольку

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin z} = \left| \begin{array}{c} s = z - k\pi \\ \sin z = \sin(s + k\pi) = (-1)^k \sin s \end{array} \right| = \lim_{s \to 0} \frac{s}{(-1)^k \sin s} = (-1)^k.$$

Вычеты. Интеграл, взятый по любой замкнутой гладкой кривой Жордана, обходимой точку z_0 в положительном направлении называется ***вычетом функции*** $f(z)$ ***в точке*** z_0 и обозначается

$$\operatorname*{Res}_{z\to z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz.$$

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z\to z_0} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z) = -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} f(z)dz$$

Формулы для вычетов.

1. Если $z = z_0$ - полюс порядка *m*, то

$$\operatorname*{Res}_{z\to z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)f(z)\right).$$

2. Если $z = z_0$ - простой полюс, однократный полюс функции

$f(z)/g(z),\ f(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$, тогда

$$\operatorname*{Res}_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

3. Для вычисления контурного интеграла имеем формулу

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где z_k - конечное число изолированных особых точек.

Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Теорема. Если $f(z)$ аналитическая функция на области комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $\infty, z_1, z_2, \dots, z_m$.Тогда

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}.$$

$$\lim_{z\to\pm i}(z-(\pm i))\cdot\frac{1}{1+z^2} = \lim_{z\to\pm i}\frac{1}{|z+(\pm i)|} = \frac{1}{\pm 2i} \neq 0$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{2i}+\frac{1}{-2i}\right] = 0$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2} \,.\, z = e^{ix}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \; dz = i \cdot z \cdot dx \;\; dx = dz / iz$$

$$5 + 4\cos x = \frac{2z^2 + 5z + 2}{z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(2z^2 + 5z + 2)^2}$$

$$\lim_{z \to -1/2} \frac{z(z-(-1/2))^2}{i(2z^2+5z+2)^2} = \lim_{z \to -1/2} \frac{z(z-(-1/2))^2}{i(z-(-1/2))^2 (z-(-2))^2} = -\frac{1}{18i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z) = \lim_{z \to -1/2} \frac{d}{dz} \frac{z(z-(-1/2))^2}{i(z-(-1/2))^2 (z-(-2))^2} = \frac{5}{27i}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(2z^2+5z+2)^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{5}{27i} = \frac{10\pi}{27}$$