Элементы операционного исчисления. Преобразование Лапласа.

Основная идея операционного мет ода

$$\chi' \div p\,\chi$$

$$\int_0^t \chi(t)\,dt \div \frac{1}{p}\chi$$

Решение простого дифференциального уравнения с начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{\chi} - \chi = 1 \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$

, $\chi(t)$ - функция, зависящая от времени.

$$p\chi - \chi = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots \frac{1}{p^n} + \cdots\right)$$

$$\chi(t) = \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right)dt = \int_0^t e^t\,dt = e^t - 1 + C$$

$$\begin{cases} \chi(t) = e^t - 1 + C \\ \chi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \chi(0) = 1 - 1 + C = 0 \ \Rightarrow \ C = 0$$

$$\chi(t) = e^t - \mathbf{1}$$

ЭТАПЫ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

1) от искомой функции $x(t)$ переходим к функции $X(p)$ комплексного переменного p, так называемому p - изображению;
2) над изображением $X(p)$ производят операции, получают алгебраическое, "операторное уравнение" относительно $X(p)$, т.к. дифференцирование становится равносильно умножению на переменную p, а интегрирование - делению на переменную p;
3) затем решают полученное операторное уравнение относительно $X(p$;
4) от найденного изображения $X(p)$ переходят к оригиналу $x(t)$, который и является искомым решением.

Функцией - оригиналом будем называть любую функцию $f: R \to C$, определенную на всей действительной оси и удовлетворяющую следующим условиям:

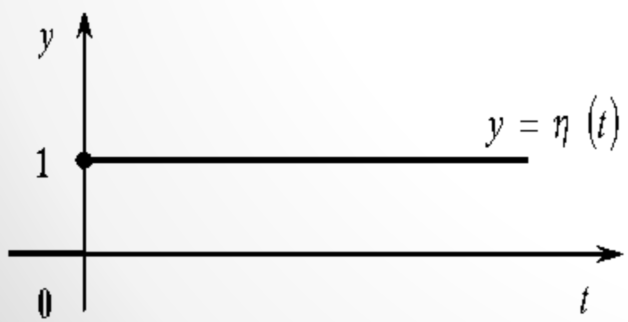
1) f - непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными до n - ого порядка включительно;

2) $\forall\, t < 0, \quad f(t) = 0$;

3) существуют такие постоянные $M>0$ и $\alpha>0$, что $\forall\, t>0$ справедлива оценка $|f(t)| \le Me$

Пример Простейшей функцией оригиналом, является функция Хевисайда $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$$



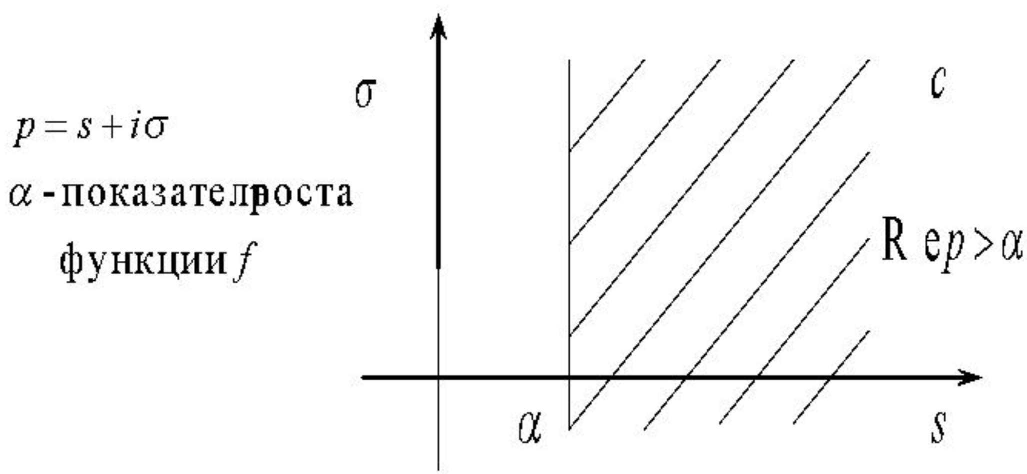
Изображение или образ преобразования Лапласа

Изображением функции f по Лапласу называют функцию комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \;.(\boldsymbol{f} \div \boldsymbol{F})$$

Т 1 **О существовании оригинала**

Если f – оригинал с показателем роста α, то функция F существует в полуплоскости $P=\{p\in C \mid Re\, p>\alpha\}$ и является в ней аналитической функцией.



- Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$.
- Если функция $F(p)$ служит изображением для двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают $f_1(t) \equiv f_2(t)$ во всех точках, где они непрерывны.

Основные свойства преобразования Лапласа

ОДНОРОДНОСТИ

Если $f \div F$ и $a \in C$, то $af \div aF$.

ЛИНЕЙНОСТИ

Если $f_j \div F_j$, $Re\, p > \alpha_j$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j f_j \div \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j F_j$

$Re\, p > \max\limits_{1 \le j \le n} (\alpha_j)$, μ_j - заданная постоянная

ПОДОБИЯ

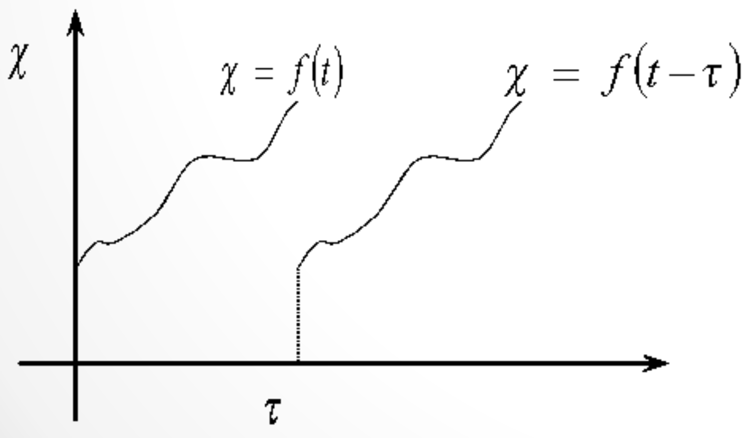
Пусть $f \div F$, $Re\, p > \alpha$. Тогда $\forall \beta > 0$, $\beta \in R$.

$$f(\beta t) \div \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right)$$

ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Если $f \div F$, и $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$$



ОПЕРЕЖЕНИЯ

Если $f \div F$, и $\tau > 0$, то $f(t+\tau) \div e^{p\tau} F(p)$.

<u>Следствие:</u>

Если f - периодичная функция с периодом T, то

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$$

СМЕЩЕНИЯ

Если $f \div F$, $p_0 \in C$, тогда

$$e^{p_0 t} f \div F(p - p_0)$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛА

Если $f \div F$, и функция $f^{(k)}$ является оригиналом ($f^{(k)}$ – k-ая производная), тогда

$$f'(t) \div pF(p) - f(0)$$

$$f''(t) \div p^{2}F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \div \mathrm{p}^{3}F(p) - p^{2}f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

$$f^{(n)}(t) \div \mathrm{p}^{n}F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Если $F \div f$, $Re\, p > \alpha$, то

$$F'(p) \div -t \cdot f(t)$$

$$F''(p) \div t^{2} \cdot f(t)$$

$$\dots\dots$$

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^{n} \cdot t^{n} \cdot f(t)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛА

Если $f \div F$, $Re\, p > \alpha$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Если $f \div F$, $Re\, p > \alpha$ и интеграл $\int_q^\infty F(q)dq$ сходится в полуплоскости $P = \{p \in C \mid Re\, p > \alpha\}$, тогда

$$\int_p^\infty F(q)dq \div \frac{f(t)}{t}$$

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ

Если $f \div F$ и f' - является оригиналом, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

Если существует $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = f(\infty)$

УМНОЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ - СВЕРТКА

Произведение двух изображений *F(p)*, *Φ(p)* также является изображением

$$F(p)\,\Phi(p) \div \int\limits_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau$$

Этот интеграл называется сверткой функций *f(t)* и *φ(t)* и обозначается символом $f*\varphi$ $\quad f\square\varphi$.

Пример Найти изображение для функции Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}\mathbf{1}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\cdot\end{cases}$$

$$\eta(t)\div F(p)=\int_0^\infty 1e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)\ e^{-pt}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-\rho b}+\frac{1}{p}e^{0}\right)=\frac{1}{p}$$

$$\boxed{\eta(t)\ \div\ \frac{\mathbf{1}}{p}}$$

Пример . Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, $a - const$.

$$f(t) \div F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{p-a}\right) e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \frac{1}{p-a}$$

$Re(p\text{-}a)>0$, тогда $Re\, p > Re\, a$

$$\boxed{e^{at} \div \frac{1}{p-a}}$$

Пример

$$f(t) = \sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin\omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos\omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathrm{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

$$\mathrm{sh}\, t \div \frac{1}{p^2 - 1}$$

$$\mathrm{ch}\, t \div \frac{p}{p^2 - 1}$$

$$\mathrm{sh}\, \omega t \div \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\mathrm{ch}\, \omega t \div \frac{p}{p^2 - \varpi^2}$$