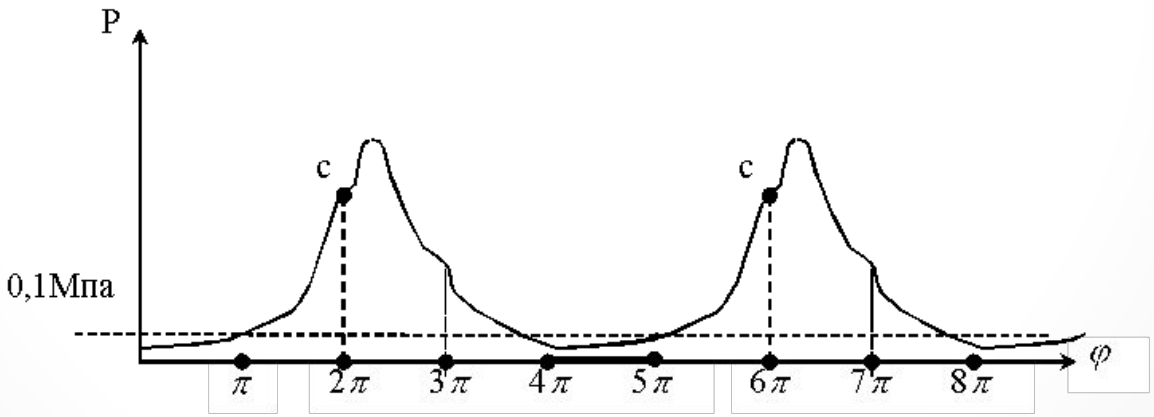
Преобразование Фурье

Ряды Фурье

Периодические функции

Периодические процессы



*Функция $y=f(x)$, определенная на множестве D, называется **периодической** с периодом $T>0$, если при каждом* $x \in D$ *значение* $(x+T) \in D$ *и кроме этого выполняется равенство* $f(x+T) = f(x)$.

Функция называется **периодической кусочно-непрерывной**, если она определена и непрерывна на всей действительной оси за исключением заданных точек, в которых терпит **разрыв первого рода**, и удовлетворяет равенству:

$$\boxed{f(x) = f(x+T)}$$

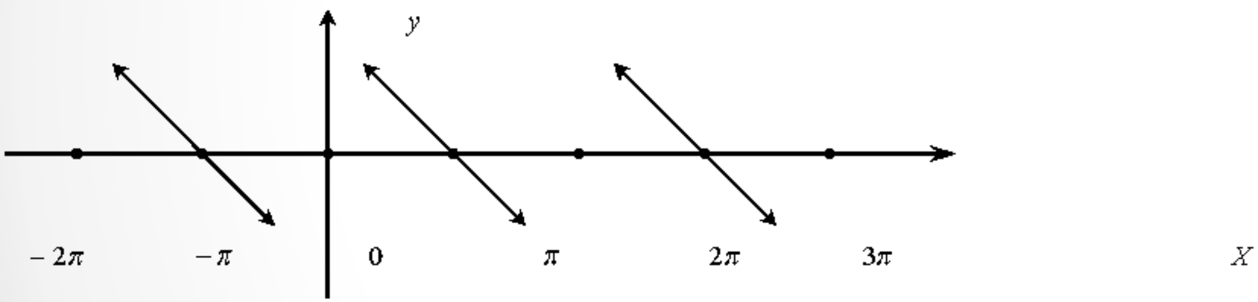
T – период.

Пример

Построить график периодической кусочно-непрерывной функции с периодом равным 2π.

$$f(x)=\begin{cases}\pi - x, & x\in(0,2\pi)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Чему равна функция в точках $x=\pm 2\pi$?



В силу периодичности $f(\pm 2\pi)=0$.

Основные свойства периодических функций.

1) Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же период T есть периодическая функция с периодом T.

2) Если функцию $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$.

3) Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \qquad a, b \in [x_0, x_1].$$

4) Если $f(x)$ и её первообразная – периодические функции (T), то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = F(a+T) - F(a) = 0.$$

Простое гармоническое колебание

$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$t \geq 0$

A – амплитуда колебаний,

ω *- частота,*

φ_0 *– начальная фаза*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Одно полное колебание совершается за промежуток времени

$$\frac{2\pi}{\omega}.$$

$$y=A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\sin\omega t\cos\varphi_0+A\cos\omega t\sin\varphi_0=a\cos\omega t+b\sin\omega t,$$

$$a=A\sin\varphi_0,\quad b=A\cos\varphi_0$$

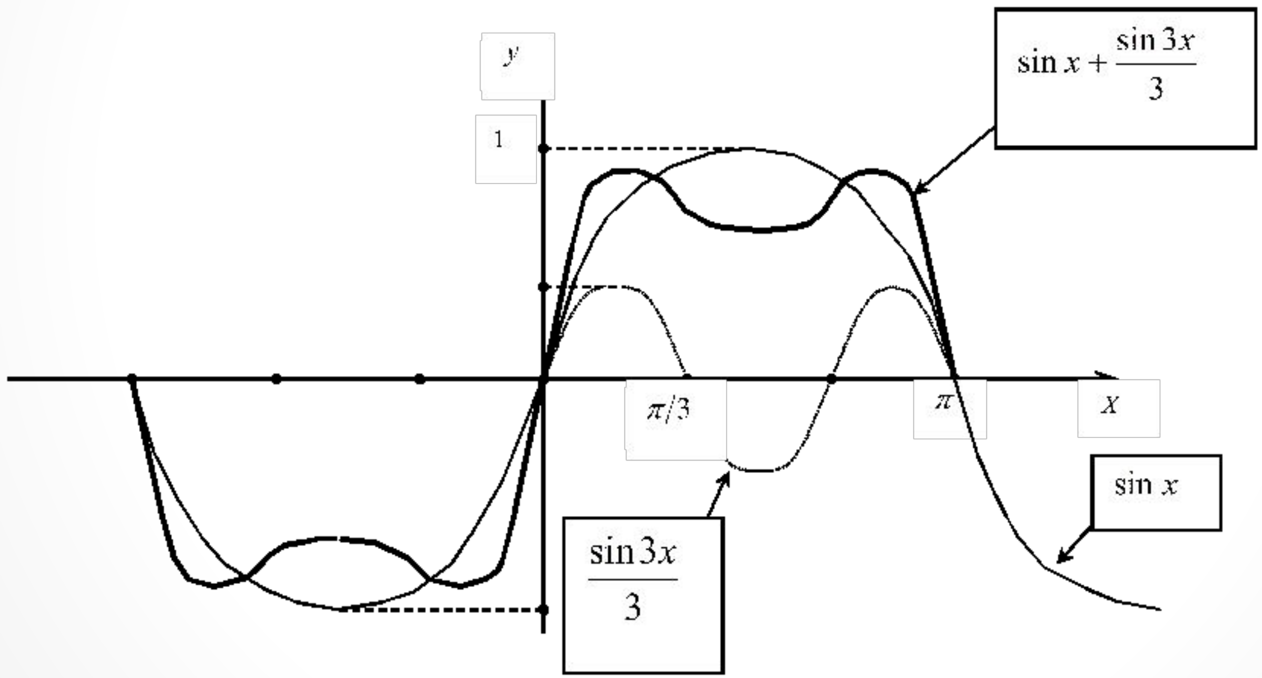
Простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, при этом сложное гармоническое колебание возникает при наложении конечного или бесконечного числа простых гармоник.

Пример

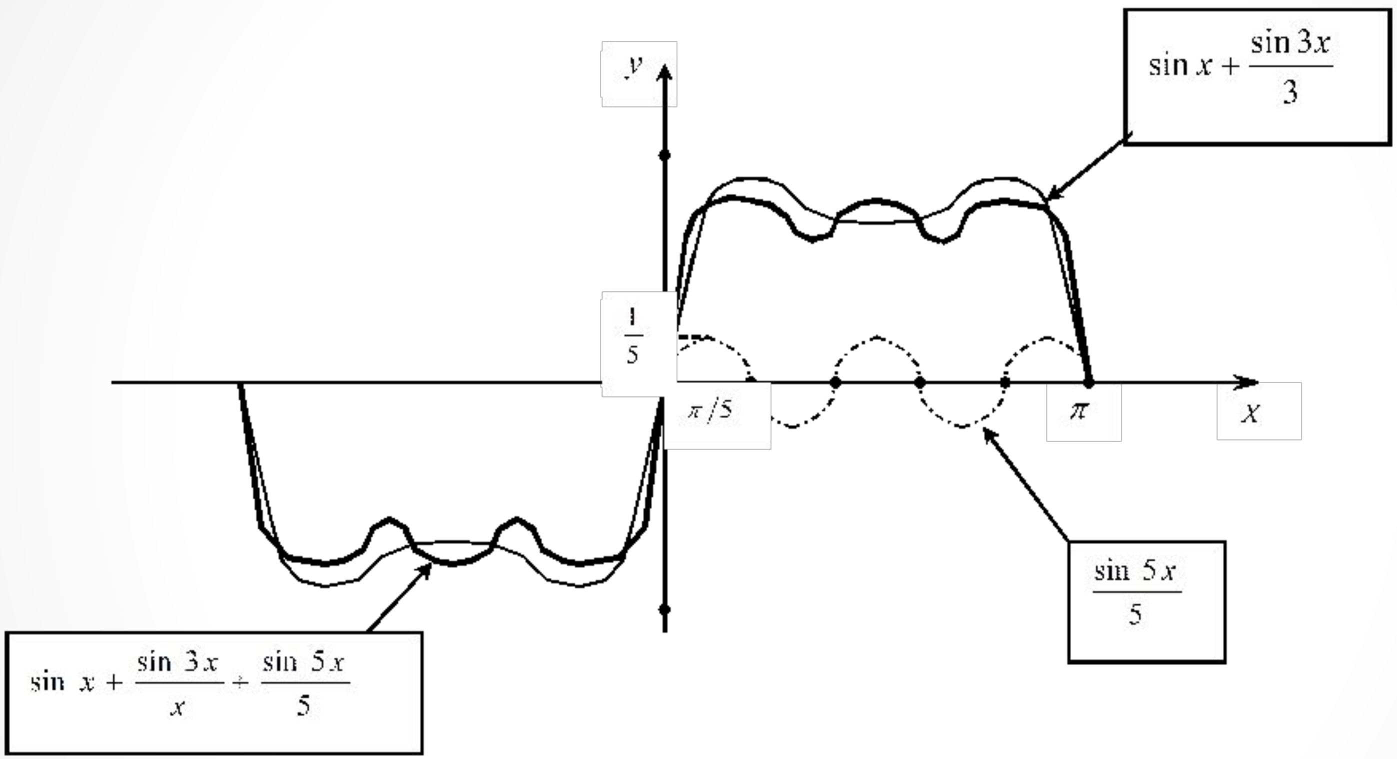
Графически отобразить сумму тригонометрического ряда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots..+\ldots..$$

Суммирование двух гармоник



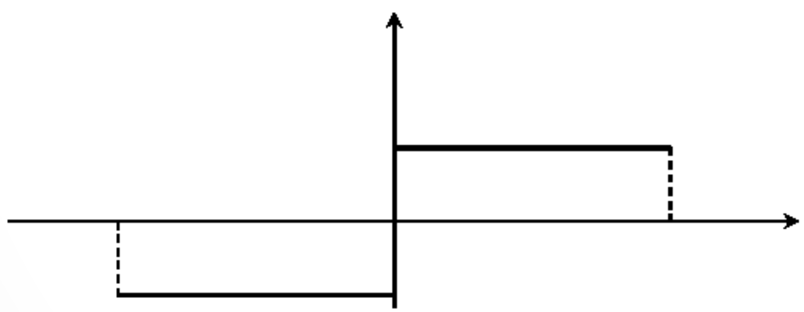
Суммирование трех гармоник



При суммировании подобного ряда гармоник происходит сглаживание, выравнивание

РЕЗУЛЬТАТ СУММИРОВАНИЯ ПРОСТЫХ ГАРМОНИК

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x \in (0,\pi) \\ -\dfrac{\pi}{4}, & x \in (-\pi,0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos kx+b_n\sin kx)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+$$
$$+a_3\cos 3x+b_3\sin 3x+\ldots.$$

$a_i\in R$, a_i - называются коэффициентами ряда.

Случай периодической функции

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

1) a_0 - ?

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx)$$

$$\cos mx \cos kx = \frac{1}{2}(\cos(m-k)x + \cos(m+k)x)$$

$$\cos mx \sin kx = \frac{1}{2}(\sin(m-k)x + \sin(m+k)x)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-k)x dx = \begin{cases} \pi, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Пример Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

$$T=2\pi$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x\in(0,\pi) \\ -\dfrac{\pi}{4}, & x\in(-\pi,0) \\ 0, & x=0, \quad x\in(-\pi,\pi) \end{cases} = \frac{\pi}{4}\cdot sign x$$

1) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4} signx}_{\text{нечетная функция}} \, dx = 0$,

2) $a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4} signx \cos kx}_{\text{нечетная функция}} \, dx = 0$,

3) $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{4}\underbrace{signx \sin kx}_{\text{четная}} \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{2k}\cos kx \Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos k\pi - 1}{2k}$

$\cos k\pi = (-1)^k \quad \Rightarrow \quad \cos k\pi - 1 = (-1)^k - 1 = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -2, & k = 2n-1 \end{cases}$. Значит, отличные от нуля коэфиициенты будут только для k – нечетных ($k=2n-1$).

В результате, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

$$(f(x+2l) = f(x))$$

Сделаем подстановку $x = \frac{l}{\pi}t \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(\frac{l}{\pi}t) = \varphi(t)$

$$\varphi(t+2\pi) = f(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)) = f(\frac{l}{\pi}t + 2l) = f(\frac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n = 1,2,3...$$

ДЛЯ ЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$n = 1,2,....$$

ДЛЯ НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$n = 1,2,3...$$